自學參考用書

初中代數講話

裘頌蘭 著

浙江人民出版社

初中代數講話

裘頌蘭編著

浙江人民出版社

出版者的話

我們出版這套書，是爲了滿足具有初中文化程度的青年羣衆、干部（包括初中畢業生）學習文化科學知識的需要，使他們通過自學，一方面打下進一步掌握科學知識的牢固基礎，另一方面能夠把學到的知識應用到實際生活和生產中去，更好地爲祖國的社會主義建設事業服務。

這套書是根据自學這个特點進行編寫的，在合乎科學性和系統性的原則下，適當地與實際相聯系，並結合貫徹政治思想教育。每一种學科各有重點，不是初中課本的複述，而是課本內容的概括和提高。因此，這套書不但可作爲初中畢業生的自學參考讀物，也可作爲初中教師教學上的輔助材料。

目　　　　錄

第一講　學好代數要準備些什麽

第二講　學會怎樣使用字母

第三講　數概念的擴充　有理數

第七講　比例與比例關係的量

第八講　一次方程式與一次聯立方程式

第九講　數的開平方

第十講　二次方程式與不等式

習題答案

第一講　學好代數要準備些什麽

§1. 思想上作好準備：

(1) 要消除害怕數學的情緒，樹立學好代數的信心。過去學校裏教師講解數學時，多半是不從實際出發，往往叫學生背誦條文死記方法，以致多數學生害怕數學，喪失學習信心。這主要是由于教師掌握數學知識不夠，教學方法不妥當的緣故。其實，正確的數學知識都是從實際中得來的，它存在在我們日常生活的周圍，也存在在我們各項生產活動中。我們的祖先把長時期從勞動中所積累起來的數學知識，用語言符號把它系統地記錄在書本上，便利于我們學習，使我們在短時間內就能學會數學知識，用它去解决實際問題。但是書本上所記錄的語言符號，僅僅是數學知識的表達形式，不是數學知識的內容本身。我們眞眞要學會數學知識，就應當從實際中去理解。倘使我們學習數學的時候，能結合實際事物去領會數學知識，那就不會感到困難，更談不到害怕。

例如我們度量茶杯口子的周圍，知道周長是茶杯口的直徑的 3.14 倍；度量面盆的周圍，周長也是直徑的 3.14 倍；我們度量任何圓形的周長都是直徑的 3.14 倍。而且在幾何學裏還可證明圓周長是直徑的π倍。(π表示圓周與直徑的比値，等于 3.1416) 這樣的性質存在在凡是有圓形的一切物體中，我們通過度量，經過思考就可理解它的道理。學好數學又可以解决許多實際問題，我們倘能結合實際來學習，一定會感到很大興趣。可是學習畢竟是一種艱苦的勞動，要學好數學，困難總是

有的，只要我們樹立信念，開動腦筋，困難是可以克服的。

(2) 不要把數學看做單純是一種計算方法。過去總是把數學看做就是計算方法，一般學數學的人往往專學方法，記牢怎樣算，不知道爲什麼要這樣算的道理，這種看法是錯誤的。其實數學是一種科學，它是從研究實際事物的數量關係所獲得的一種知識。這種知識和任何科學知識一樣，是由淺到深、由簡到繁、有系統地組織起來的。當然數學知識也包括許許多多計算方法，但每種方法都有一定的道理做它的依據。因此學好數學，首先要系統地懂得數學知識，在懂得數學知識的基礎上去掌握計算方法；只有這樣，才能把學好的數學知識用來解決實際問題。所以我們反對重方法不重理解地學習數學，我們認爲學習數學必須先求理解再學方法，必須懂得道理之後再掌握計算方法。

§2. 注意學習方法：

(1) 要循序漸進，有系統地學習，不能跳躍：數學知識都是從實際出發，按照一定系統組織起來的一種科學知識。我們學習的時候，一定要面向實際，按步就班地去學習，把開始的基本概念搞清楚，然後循序漸進地學下去，決不容許跳躍，也不容許斷章取義。例如在算術中，首先學習自然數和它的運算，然後才能夠進一步學習分數和它的運算。不學好自然數馬上想學好分數，這是不可能的，也是不應該的。初步的數學知識是很重要的，因爲它是基礎知識，基礎打得愈好，以後就可學得更深入。把基礎知識看得很容易，不去認眞學習當然是錯誤的。

(2) 必須把基本概念搞清楚，在懂得基本概念的基礎上掌握運算方法：前面已經說過，數學是一種科學，它所包括的一切計算方法，都是有一定的道理做依據的。因此我們學習的時

候，如果光記方法不去理解它的道理，那末碰到解應用題的時候，就會感到手足無措。倘使懂得道理再去記住方法，那末不僅容易記憶，而且還能靈活運用。

(3) 把數學知識和實際結合起來去理解：數學知識既然是從實際中得來，是實際事物間數量關係或空間形式的反映，因此要做到眞眞懂得數學知識，必須和實際事物結合起來，才能理解。倘使光從數學教本上，咬文嚼字地去學習，即使把書上的條文背得爛熟，也是無用的。

(4) 要把懂得的概念牢牢記住，掌握的方法練習得純熟，還要學會應用這些來解應用題：數學既然是有系統的科學知識，所以不僅要把基本概念搞清楚，還得把它們牢牢記住，因爲它們是學習以後的知識的重要條件，不記住前面的概念，就不可能去理解以後的知識。已經掌握了運算方法，不僅要懂得爲什麼這樣算的道理，還要化工夫多多練習，到達一定的熟練程度。倘使簡單的運算不熟練，碰到較繁的運算就沒有辦法。學習數學的人，倘使能夠面向實際去學習，學懂的數學知識又能牢記，掌握的方法又練習得純熟，那末就可以用這些去解決實際問題。但解決實際問題並不是馬上就會的，應當經常地學習解應用問題，培養分析問題的能力，只有這樣，才能應用已經學得的知識，去解決遇到的實際問題。

§3. **要有鞏固的算術知識基礎**：代數是算術的繼續，它繼續研究數的運算，再把數概念加以擴張，研究對象加以擴大，所以沒有算術知識做基礎，代數是學不好的。爲了學好代數，把算術知識複習一次是必要的。複習當然要全面複習，特別是下列提出的幾個問題，對代數關係更大：

(1) 什麼是量？怎樣用數去標幟量？數與量間有什麼關係？算術裏的運算對象究竟是數還是量？

(2) 整數、分數、十進小數以及和它們有關的基本概念要搞清楚；整數是怎樣產生的？整數的主要性質是什麼？整數怎樣擴大爲分數？分數是否包括整數？十進小數和分數的關係，分數的主要性質是什麼？

(3) 整數的加法、減法、乘法、除法等運算定義怎樣？分數的加法、減法、乘法、除法等運算定義又怎樣？整數的運算定義是否可以包括在分數的運算定義之中？反過來又怎樣？

(4) 整數的運算定義與分數的運算定義是不同的，可是不論整數的運算或分數的運算，它們都具有共同的運算性質，這些運算性質都是從長期實踐中總結出來的，是非常重要的，它們是以後運算時的根據：

〔一〕加法交換律：交換加數的位置，他們的和不變。

例如 $7+8=8+7$； $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{4}{5}+\frac{2}{3}$

這個基本的運算定律，不論是整數，分數或十進小數都是適用的。若以字母 a,b 代表任何兩個數，那末這條運算定律就可很簡單地寫做公式：

$$a+b=b+a.$$

這一定律還可推廣到兩個以上的數相加的時候。

〔二〕加法結合律：三個數相加，可以將任意兩數先相加，再將和與另一數相加，它們的結果不變。

例如 $(5+7)+3=5+(7+3)$；

$$\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{7}=\frac{3}{5}+\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{7}\right).$$

如以 a,b,c 代表任意三數，這個運算定律可簡單地寫做公式：

$(a+b)+c=a+(b+c)$ （都等于 $a+b+c$）

這一定律還可推廣到三個以上的數相加的時候。

〔三〕乘法交換律：交換乘數的位置，它們的積不變。

例如　$5\times7=7\times5$;　$\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}=\frac{7}{5}\times\frac{2}{3}$.

若以 a,b 代表任意兩數，那末這一定律可以簡單地寫做公式：

$ab=ba$,

這定律還可推廣到兩個以上的數相乘的時候。

〔四〕乘法結合律：三個乘數相乘，任意兩個乘數先乘，再與另一乘數相乘，它們的積不變。

例如　$(3\times7)\times5=3\times(7\times5)$;

$$\left(\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{3}{5}\times\left(\frac{5}{7}\times\frac{2}{3}\right).$$

若以 a,b,c 代表任意三個數，那末這一定律可以簡單地寫做公式：

$(ab)c=a(bc)$.　（都等于 abc）

這定律還可推廣到三個以上的數相乘的時候。

〔五〕乘法分配律：某數乘以若干個數的和，那末可用每個加數乘該數，再把各個乘積相加。

例如　$7\times(6+5)=7\times6+7\times5$;

$$\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}.$$

若以 a,b,c 代表任意三個數，那末這一定律可以簡單地寫做公式：

$a(b+c)=ab+ac$.

這定律還可推廣到加數在兩個以上的時候。

以上五條運算定律，是算術中任何數相加、相乘的時候所具有的最基本的運算性質。根據這五項運算性質，已經推出下

面的幾項運算性質，現在把它們都寫成公式，讀者可以看出這些公式的意義，並用語言表達出來：

1. $a+(b+c+d+\cdots)=a+b+c+d+\cdots$;

2. $a-(b+c+d+\cdots)=a-b-c-d-\cdots$;

3. $a+(b-c)=a+b-c$;

4. $a-(b-c)=a+c-b$;

5. $a(bcd\cdots)=\{[(ab)c]d\}\cdots$;

6. $(abc\cdots)m=(am)bc\cdots=a(bm)c\cdots=\cdots$;

7. $(a-b)c=ac-bc$; （這裏 $a>b$）

8. $\dfrac{a+b+c+\cdots}{m}=\dfrac{a}{m}+\dfrac{b}{m}+\dfrac{c}{m}+\cdots$;

9. $\dfrac{a-b}{m}=\dfrac{a}{m}+\dfrac{b}{m}$;

10. $(abc\cdots)\div m=(a\div m)bc\cdots=a(b\div m)c\cdots=\cdots$;

11. $a\div(bcd\cdots)=[(a\div b)\div c]\div d\cdots$;

以上公式中的除數m是不能等于零的；除數 $bcd\cdots$ 中也不允許有任何一個乘數等于零。

(5) 運算的時候，首先要看被運算的對象是什麼數？假使是整數，就按照整數的運算定義去運算。假使是分數，就按照分數的運算定義去運算。整數也可以按照分數的運算定義去運算，因爲整數包括在分數之中，但是分數不能按照整數的運算定義去運算。其次運算的時候要有根據，也就是根據五條基本運算定律與十一項運算性質去運算，倘使沒有根據地去運算就要犯錯誤。再其次還得認清所使用的運算符號與運算的先後順序，因爲符號搞錯與順序搞亂，也會使結果不正確的。以上三點是運算時應當掌握的三大環節。懂得這三點，可以說是懂得了運算技能，但還應當多多練習，達到一定的熟練程度。

練　習　題

1. $$\frac{\left(8\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)\div 3\frac{1}{2}}{\left(5-4\frac{2}{5}\right)\div 10}+\frac{\left(3\frac{1}{8}-1\frac{7}{8}\right)\times 1\frac{3}{5}}{\left(2-1\frac{3}{8}\right)\div 3\frac{1}{8}}$$

2. $$\frac{\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{10}}{\frac{15}{16}\times\frac{14}{39}\times\frac{24}{25}\times\frac{13}{21}}\div\left(2\frac{1}{8}\times 2\frac{2}{7}\times 2\frac{15}{17}\times 4\frac{2}{3}\right)\div 196.$$

3. $$\left\{\frac{\left(53\frac{3}{4}+9\frac{1}{6}\right)\times 1\frac{1}{5}}{\left(10\frac{3}{10}-8\frac{1}{2}\right)\times\frac{5}{9}}-\frac{\left(6\frac{4}{5}-3\frac{3}{7}\right)\times 5\frac{5}{6}}{3\frac{2}{3}-3\frac{1}{6}}\right\}-29\frac{5}{6}.$$

4. $$\frac{8\div\left[3\div\left(2\frac{3}{4}-1\frac{15}{28}\right)+\frac{2}{3}\div\frac{3}{2}\right]+\frac{57}{223}}{14\times\left(5\frac{5}{7}-4\frac{3}{4}\right)-9\frac{5}{7}+\frac{3}{14}}$$

5. $$\frac{5.2+17.25-3.36\div 0.3}{2.7\div 0.18+0.65\div 0.13}\div 0.05.$$

6. $$\frac{(2.1-1.965)\div(0.12\times 0.45)}{0.0325\div 0.13}-\frac{1\div 0.25}{0.16\times 6.25}.$$

第二講　學會怎樣使用字母

§4.使用字母代表數：在學習算術的時候，曾經使用過字母去代表數。這樣的結果有兩種作用：(1)把任何數所具有的共同運算性質表示了出來。例如"交換加數的位置它們的和不變"這一加法運算性質，就用$a+b=b+a$很簡單明白地表示出來。(2)把某些數量關係用公式表示出來之後，便利了計算。例如圓面積A就用公式$A=\pi r^2$來表示。這裏的π是常數，r是圓半徑，只要知道圓的半徑，代入這公式，就可算出圓的面積。在代數裏專門研究使用字母代表數，這樣可以研究數的更多的性質，研究數量間更多的相依關係以及更多的運算問題。所以要學好代數的第一步，就是學會善于使用字母，能把字母所代表的數與2,5,$\frac{1}{3}$等等數，同樣熟悉的來看待它，而且要深深領會使用字母代表數的優越性。在算術中，主要是研究數的加、減、乘、除四種運算。要曉得這種運算不是憑空臆造出來的，而是根據實際數量間的關係總結出來的寶貴經驗。例如甲籃有桃15個，乙籃有桃27個，把兩籃桃子合併起來一共有桃$15+27=42$個。不要認爲這種簡單問題是當然的，倘使追問一句，爲什麽用加法而不用別的方法？因爲加法的產生就是爲解决"把兩個數量合併起來計算是多少"這一類問題的。上面這個問題恰好是屬于這類問題，因此用加法運算。而且經驗告訴我們，用加法運算的結果是與實際合併後的桃數符合的。當然兩籃的桃數是可以有任何不同的整數，但要計算合併後的桃數總是用加法。這不僅對桃子合併是如此，就是計算任何兩個數

量相合併也是如此。這一普遍性倘使用字母代表數，就可把它表示出來：卽一個數量是a，另一個數量是b，合併起來就是$a+b$。不同類型的問題就得用不同的表示方式，舉例如下：

例1 某農業合作社今年收穫早穀a斤，晚穀b斤，那末今年共收稻穀是$a+b$斤。

有的問題就得用減法不能用加法。

例2 某農業社社員今年分到稻穀總量爲x斤，除賣給國家y斤外，其餘留作自用。那末留作自用的稻穀一定是$x-y$斤。

有的問題就得用乘法。

例3 某農業社今年共種水田a畝，每畝收割稻穀b斤。那末共收稻穀是$a\times b$斤。

有的問題還得用除法。

例4 某校有獎學金A元，平均獎給優秀學生n人。那末每人所得獎金是$(A\div n)$元。

究竟哪些問題要用加法？哪些問題要用乘法？這應當從兩方面去考慮：一方面要明確認識每種運算的定義，因爲每種運算都是爲解決某類實際問題才產生出來的。另一方面應當徹底搞淸楚問題的實際意義。只有這兩方面結合起來，問題才能獲得解決。例如上面的例3.問題的意義是有a畝田，每畝割稻穀b斤，換句話說就是a個b斤相加。而乘法是這樣定義的：同樣的數累次相加時的簡法叫乘法。這樣兩方面的意思是一致了，因此斷定稻穀總數是$a\times b$斤。很顯然倘使說稻穀總數是$a+b$斤或$a-b$斤都是錯誤的，這種錯誤還會鬧成笑話，因爲a畝田不能和b斤穀加成爲一件東西。當然稻穀總數也不會是$b\div a$斤，因爲把b斤穀分散到a畝田中去毫無實際意義。此外有的是幾何問題，就得同幾何知識相結合。例如一塊矩形的土地，長爲a尺，寬爲b尺，那末周圍長是$2\times(a+b)$尺；面積是$a\times b$平方

尺。這都是根據矩形的性質來决定的。有很多問題，還需要有其他科學知識才能解决。

練　習　題

7. 某農業生產合作社有甲等田 m 畝，每畝產穀 a 斤；有乙等田 n 畝，每畝產穀 b 斤。問每畝田的平均產量是多少？甲等田的總產量比乙等田總產量要多幾斤？

8. 某汽船行駛在江中，順流速度每小時爲 a 里，逆流速度每小時爲 b 里。求每小時汽船開行速度與水流速度。

9. 汗背心每件 a 元，襪子每雙 b 角，某人買汗背心 m 件，襪子2雙；共用幾元？

10. 設 m 爲自然數，那末一般的偶數與奇數怎樣表示？

11. 有一個三位數，個位數字是 a，十位數字是 b，百位數字是 c，寫出這三位數。

倘使把問題中的所有數都用字母去代表，這樣就得出一種公式。例如上面例1中假設共收稻穀爲 c 斤，那末就得出公式：$c=a+b$。這公式把問題中包含的三個數量間的關係表示了出來。用語言說就是稻穀總斤數是早穀斤數與晚穀斤數的和。同樣可以把例2，例3，例4的數量關係差、積、商表示出來。實際問題中所存在的數量關係是非常複雜的，這裏所舉的和、差、積、商四種關係，僅僅是最簡單的幾種，這種關係不一定單獨存在，常常是聯合的出現。例如上面習題7中假設每畝田的平均產量爲 x，則

$$x=\frac{ma+nb}{m+n}.$$

這公式中的關係是不止一種，它包含兩次乘法兩次加法與一次除法。再舉幾個例：

例1　1952年，某汽車製造廠生產汽車 M 輛，到1957年生

產汽車 N 輛，比 1952 年增產百分之 P 。那末 M，N 與 P 間的關係是：

$N = M \times (1+P\%)$.

例 2　有一兩位數，十位數字是 a，個位數字是 b；若加 m 到這數，那末所得的和仍為兩位數，不過十位數字與個位數字對調了一下。那末 a，b，與 m 間的關係是：

$10a+b+m=10b+a$。

例 3　有一汽船在靜水中每小時走 m 里，水流每小時 n 里，但知順流速度是逆流速度的 a 倍。那末 m，n 與 a 間的關係是：

$m+n=a \times (m-n)$.

例 4　秤鈎上掛着重為 P 斤的物體，秤鈎距秤紐為 m 寸；秤錘重 Q 斤，秤錘距秤紐為 n 寸。那末 P，m，Q 與 n 間的關係是：

$m \times P = n \times Q$.

練　習　題

把下列問題中的數量關係寫出來：

12. 制服 m 套，每套 a 元，共值 n 元。

13. 杭州到某處相隔 x 里，汽車每小時走 v 里，來回共化 t 小時。

14. 圓柱底半徑為 a 尺，高為 h 尺，全面積為 T 平方尺；體積為 V 立方尺。

15. 三個連續奇數的和為 s，中間這個奇數是 c。

16. 某班畢業生為 a 人，參加勞動生產的有 b 人，佔全班人數的百分之 P。

17. 有立方體合金一塊重為 m 克，比重為 P 克/厘米，每邊長為 a 厘米。

18. 測量同一長度，用公尺去量得 a 公尺；用市尺去量得 x

尺。

19. 甲說火車要a小時後可到，乙說要b分鐘後可到。結果二人都說得對。

§5. **與代數式有關的基本概念**：使用字母代表數，把實際問題中的數量關係表示出來的結果，得到下列許多式子：

$$a+b;\ x-y;\ a\times b;\ \frac{A}{n};\ \frac{ma+nb}{m+n};$$

$$\frac{1}{2}bh;\ \frac{2}{3}x-1;\ 2x+\frac{3}{x+1};\ ax^2-bx+c;\cdots$$

這些式子都單獨地或聯合地表示幾個數中間的和、差、積、商的關係。在算術裏我們知道任何數的和、差、積、商還是一個數，因此這些式子都代表一個數，代表一個整數、分數或小數，究竟代表什麽數要看問題來決定。例如$a+b$代表兩小組學生的總人數，那末a、b都是整數，所以$a+b$一定也是整數。若$a+b$代表今天用去的人民幣，那末a,b都是整數或小數，所以和$a+b$也是整數或小數。但$a+b$不允許是一個任意的分數，例如說今天用了$\frac{1}{3}$元這句話是沒有實際意義的。這種式子都是把字母或數字用運算符號連接起來的，替它取個名字叫代數式。兩個代數式用等號連接起來的叫等式。例如$N=M\times(1+P\%)$。用不等號連接起來的叫不等式。例如$2a\times b<a^2+b^2$。代數式是代表一個數，它與3×7也代表一個數這一點是相同的。所不同的，3×7只能代表唯一的數21，可是代數式$a\times b$它可以代表任何數，它比3×7有更廣泛的代表性，而3×7僅僅是$a\times b$的一個特例。在代數學裏，把$3,\frac{1}{2},0.4\times7,\cdots$等等算術中學過的數與算式都包括在代數式之內，作爲代數式的特殊形式來看待。所以我們說：代數式是代數學中研究的主要對象。

上面列舉的代數式，有的是不用字母做除數的。例如$a+b$；$x-y$；$a\times b$；$\frac{1}{2}bh$；… 等叫做整式。有的是用字母做除數的，例如$\frac{A}{n}$；$2x+\frac{3}{x+1}$；$\frac{ma+nb}{m+n}$；…等叫做分式。整式中沒有加減關係只有乘的關係的，例如$a\times b$；$\frac{1}{2}bh$；s；…等，叫做單項式；有加減關係的例如 $a+b$；$x-y$；ax^2+bx+c；…等叫做多項式。前二個叫二項式，後一個叫三項式，另外可類推。

單項式是多項式的特例，多項式是單項式相加相減的結果。

單項式既然只有乘的關係，這乘積中若包含數字乘數與字母乘數的話，一般都要把所有數字乘數乘起來寫在前面，把字母乘數寫在後面。例如 $2a^2\times\frac{2}{3}b$ ，根據乘法交換律寫做 $2\times\frac{2}{3}a^2b$ 即 $\frac{4}{3}a^2b$ 。這樣變換之後，叫 $\frac{4}{3}$ 是單項式$\frac{4}{3}a^2b$ 的係數。同樣$\frac{1}{2}$是$\frac{1}{2}bh$的係數；3是$3a^2x$的係數；因爲s就是$1\times s$，所以s的係數是1，ab的係數也是1。係數1是略去不寫的。係數既然是指它與字母乘數的乘積，所以

$3a^2b=(a^2b)\times 3=a^2b+a^2b+a^2b$。意思就是$3a^2b$的係數3，是表示3個$a^2b$的和。同樣

$$\frac{4}{3}ax=4\times\frac{1}{3}ax=\frac{1}{3}ax+\frac{1}{3}ax+\frac{1}{3}ax+\frac{1}{3}ax.$$

意思就是$\frac{4}{3}ax$的係數$\frac{4}{3}$，是表示把ax三等分取它四份。這與算術裏的整數乘法、分數乘法的意義，是完全一致的。

也有一種特別情況應加注意。例如三項式ax^2+bx+c根據上述的係數定義來講，那末各項的係數都是1。倘把這三項式

中的字母 a,b,c 看做已知數，把字母 x 看做未知數，那末已知數可以叫做未知數的係數。這時候第一項的係數是 a，第二項的係數是 b，第三項的係數是 c。第三項因爲不含未知數所以也可叫做常數項。

§6. **代數學中的運算方法與運算符號：** 在算術裏學過的加、減、乘、除四種運算方法，在代數裏還要繼續採用。加號減號完全相同，只有乘號可以略去不寫。例如 $a\times b$ 可寫做 ab；或 $a\cdot b$；$5\times a$ 可寫做 $5a$ 或 $5\cdot a$。但數字與數字中間的乘號仍不能簡略。例如 $3\times 5a$ 不能寫做 $35a$，這樣容易誤解爲35個 a，與原來15個 a 不同了。除號與除綫都可並用，但以採用除綫較便。例如 a 除以 b 寫做 $a\div b$ 或 $\frac{a}{b}$ 都是可以的。此外還要講兩種運算方法：

(1) 乘方或叫乘羃又叫方羃，它是一種特殊的乘法運算。就是幾個相同的數相連乘的乘積，這乘積叫做乘方；乘數的個數叫做指數；乘數叫做底數。例如 $a\cdot a\cdot a\cdot a$ 寫做 a^4，這裏 a^4 叫做四乘方，4 叫指數，a 叫底數。若兩個相同數連乘的積，叫這數的二乘方或叫平方；若三個相同數連乘的積，叫這數的三乘方或叫立方。如此類推。例如 a^2 叫 a 的二乘方或 a 的平方；a^3 叫 a 的三乘方或 a 的立方；a^m 叫 a 的 m 次乘方，不過這裏的 m 是一個自然數，a^m 就是 $\overbrace{a\cdot a\cdots a}^{m\text{個}}$ 的意思。若 $m=1$，那末 a^1 常略寫爲"a"，讀做 a，它的意思就是 a 的一次乘方。

(2) 開方是乘方的逆運算，某數 a 的 n 次方等於 b，即 $a^n=b$，那末 b 叫做 a 的 n 次乘方，而 a 叫做 b 的 n 次方根，寫做 $a=\sqrt[n]{b}$，這裏的 $\sqrt{\ }$ 是開方符號或叫根號。橫綫下面的 b 叫

被開方數，根號左上角的 n 叫根指數。若$n=2$的時候，$\sqrt[2]{b}$ 略寫做$\sqrt{b}$，讀做平方根 b；即它的平方等于 b 的意思。又 $\sqrt[3]{64}$ 讀做立方根64，因爲 $4^3=64$，所以 $\sqrt[3]{64}$ 等于 4 。開方運算這裏只提出一個名詞，以後還要詳細講到。

§7.**運算的順序與符號**：代數學中的六種運算，普通劃分爲三級。加法與減法叫第一級，乘法與除法叫第二級，乘方與開方叫第三級。倘使一個式子中各級運算都有，那末它們的運算順序是：

首先算第三級，即先算乘方與開方。

其次算第二級，即再算乘法與除法。

最後算第一級，即算加法與減法。

例如演算代數式 $5a^3b-\frac{b^2}{c}+\sqrt{d}$.

首先演算乘方與開方，即 a 的立方，b 的平方與 d 的平方根。其次演算乘除法即 5 乘 a^3 的積再乘以 b，b^2 除以c。最後演算加減法，即 $5a^3b$ 減去 $\frac{b^2}{c}$ 後再加上 $\sqrt{d}$ 。倘使代數式中只有同一級的運算，那末就按排列先後演算。例如 $a+b-c$ 就先求 a 與 b 的和，再減去 c。$a\div b\times c$ 就是先 a 除以 b，再把所得的商乘以 c。若以 b 與 c 的乘積去除 a 就錯了。例如

$36\div6\times2=6\times2=12$，但$36\div6\times2\neq36\div12=3$.

倘使代數式中的第一級或第二級運算要提前先算的話，或者同級運算的代數式中要把後面的提前先算的話，都可使用括號。例如代數式 $a+bc-5$ 中，若要先算 a 與 b 的和，再乘以 c 減去 5；那末必須要把 $a+b$ 添上括號，寫做 $(a+b)c-5$.

例如以兩數b與c的積去除另一數a，應當寫做 $a\div(b\times c)$。若寫做 $a\div b\times c$ 不添括號那就錯了。

倘使在一個括號裏面的式子，還需要再指定某些演算順序時，那末可再使用第二層括號，如此類推還可使用第三層括號。普通使用的括號有三種：$\{[(\ )]\}$。括號“( )”讀做圓括號，用在最裏面；括號“[ ]”讀做方括號，用在第二層；括號“{ }”讀做花括號，用在最外層。

例如 $a\{b-[c+(d-e)n]\}$ 式中，首先算 d 減 e 的差，再乘以 n，加到 c 上去，再從 b 減去所得的和，最後以求得的差乘 a。

所以括號的使用目的就在指定運算的順序。必須引起注意，運算順序搞錯也會使結果不正確的。例如“二數 a，b 的和的 5 倍”用式表示的時候，首先要辨別它有哪幾種運算，是按照什麼順序來進行的。這例子裏，先要求 a, b 的和，再求這和與 5 的乘積。因此第一級運算加法要提到第二級運算乘法以前來進行，必須添加括號才能把加法先算的意義指示出來，應寫做 $(a+b)\cdot 5$；若寫做 $a+b\cdot 5$ 那就錯了。

注意：除綫有時也可當括號用，例如求二數 a 與 b 的和除以 5 的商。可寫做 $\frac{a+b}{5}$，它與 $(a+b)\div 5$ 有同樣意義。

練　習　題

按照運算順序讀出下列各代數式：

20. $m-[a+(b-c)]$；　　21. $c\div a\times b-b\times n$；

22. $3(a+b)-2(a\div b)$；　　23. $a\{a[a(a-b)]\}$；

24. $ab+c\div d+3d$；　　25. $2a^2+ba-c$；

26. $2(3a+b^2)^3$；　　27. $(m-n)^k\div k$；

28. $(3a^n-b)\cdot na$；　　29. $\sqrt{a}+(a^2-b^5)$。

§8 **算術中的運算定律和性質可以應用在代數中**：算術中實施運算的每一步驟，都是有理論根據的。首先它有五條基本運算定律：加法的交換律與結合律，乘法的交換律與結合律，乘法對加法的分配律。這五條定律是人類在長期運算實踐中所獲得的寶貴經驗。從基本定律出發，再根據各種數的運算定義與特有性質，可推出其他的運算性質。這些定律與性質，就是算術中進行運算的理論根據。當我們進行數的運算時，如果說不出每一步驟的根據，就一定會犯錯誤，換句話說，正確的運算總是有理論根據的。代數是繼續算術研究數（不過是用字母代表數）的運算。因此算術裏的五條基本運算定律與其他運算性質，也要作為代數中進行運算的根據，現在舉例說明怎樣應用定律與性質來化簡代數式：

例1 $x+y+3+x+12+y+y$.

根據加法交換律，結合律，得

$$(x+x)+(y+y+y)+(3+12);$$

根據係數定義，數的加法，得

$$x\times2+y\times3+15;$$

根據乘法交換律簡寫做 $2x+3y+15$.

例2 $\left(\frac{7}{10}a^2x\right)\times30$.

根據乘法性質，得 $\frac{7}{10}\times30\cdot a^2x$,

相乘後，得 $21a^2x$.

例3 $15+(a+b+2)\times3$.

根據分配律，得 $15+(3a+3b+6)$,

根據加法性質，得 $15+3a+3b+6$,

根據加法交換律，得 $3a+3b+15+6$,

相加後，得 $3a+3b+21$。

例4 $(72x-18y)\div 9$.

根據除法性質，得　　$(72x)\div 9-(18y)\div 9$,

根據除法性質，得　　$(72\div 9)x-(18\div 9)y$,

相除後，得　　$8x-2y$.

§9. **代數式的值**：由于代數式含有代表任何數的字母，因此代數式雖則代表一個數，但這個數的值是沒有確定的。倘使代數式中的字母都給它一個定數，那末代數式經運算後也得出一個定數。這個定數叫做代數式的值。

例1 若 $x=2$，求代數式 $3x^2-2x-1$ 的值。

$3x^2-2x-1=3\times 2^2-2\times 2-1=12-4-1=7$.

例2 若$a=5$，$b=3$，求下列代數式的值：

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

原式$=5^3-3\times 5^2\times 3+3\times 5\times 3^2-3^3$

$=125-225+135-27=8$。

練　習　題

使用字母把下列問題寫成代數式，並注意運算順序：

30. 兩數的和乘以該兩數的差。

31. 兩數差的立方加該兩數立方的差。

32. 兩數平方的和減去該兩數之積的 2 倍。

33. 兩數平方和的立方根。

34. 一數的 n 次方根與另一數的 n 次方根的差。

35. 兩數立方的和，再加一數平方與另一數乘積的 3 倍，再加一數與另一數平方相乘積的 3 倍。

36. 設$x=\dfrac{1}{2}$，$y=3$。求$\dfrac{1}{3}(x^3-x^2y+3xy-1)$的值。

37. 設$a=10$，$b=5$，$c=2$。求$a\div b\div c\cdot(a-b)$的值。

38. 設$x=1$，$y=2$，$z=3$. 求下式的值：

$$\{x(z^2-y^2)-xy+12\}y\div 2,$$

39. 設$a=\frac{2}{3}$，求下式的值：

$$\left\{\left[\left(a-\frac{1}{3}\right)a+\frac{1}{3}\right]a+\frac{1}{3}\right\}a+\frac{1}{3}.$$

第三講　數概念的擴充　有理數

§10.**有理數概念的引出**：在算術裏，由于一個個的數東西，就產生了自然數1, 2, 3, 4,……；由于數東西的時候會發現數數沒有的情況，就用"0"來表示沒有，于是自然數擴充了，成爲整數 0, 1, 2, 3, 4,……；有了整數，在人類的生活上就可以解决了一系列的問題。例如要計算學校裏的教職員工人數，學生人數，教室間數，課桌凳數，黑板數，床鋪數等等，都是通過整數就能解决的。但是光用整數，還有很多問題不能解决。例如單用人民幣基本單位"元"，就不能完全適應貨幣流通時的需要，必須要增加輔幣角（$\frac{1}{10}$元），分（$\frac{1}{100}$元）。度量布的長短，單用"尺"也是不夠的，必須要用丈，寸，分等輔助單位；夏天吃西瓜不是一個一個的吃，而是要剖成小塊來分吃。爲了解决這些問題，我們就把數擴充到分數（包括小數）。于是有更多的問題可以解决了。但還有很多問題不能解决：

例1　我袋裏有人民幣5元，用去3元，還剩2元。如以算式表示　$5-3=2$,

倘使我袋裏只有人民幣3元，要買價值5元的一件東西，很顯然還不夠2元，

即　$3-5=$ 不夠2元，

這說明算術裏的減法，只有當被減數大于減數的時候才能算出，換句話說，就是在夠減的時候，才有可能；遇到不夠減

的時候，就無法解决了。

例 2　就算術加法、減法來說，加 5 就意味着增加 5；減 5 就意味着減少 5。

例 3　有人向我問路的時候，我單單告訴他有 3 里遠是不夠的，必須告訴他方向，就是告訴他“向北走 3 里就到”，這樣才能解决問題。倘使不指出方向，他很可能向南走 3 里。那末他不僅沒有達到目的地，反而越走越遠了。

例 4　冰凍天寒暑表上的溫度，光說 3 度是不夠的，必須說明零上 3 度還是零下 3 度。

例 5　某企業公司的財產情況，光說 5 萬元也是不夠的，必須說明獲利 5 萬元還是虧欠 5 萬元。

例 6　某水文站報告水位變化情況，光說 2.5 公尺也是不夠的，必須說明上漲 2.5 公尺還是下退 2.5 公尺。

例 7　體育教師叫口令 3 步走，是不明白的，必須叫向前 3 步走，或退後 3 步走。

例 8　在直綫上，倘使取 0 點爲原點，一定的綫段 u 爲單位長，向右截取綫段，那末如圖，所有的整數分數都可表示出來，

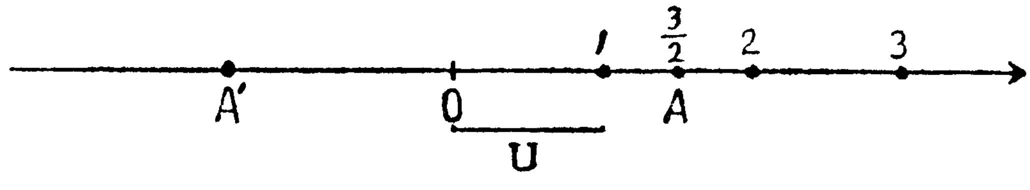

圖 1.

若 A 點表示 $\frac{3}{2}$，意思就是說 A 點在原點的右側，離原點 O 的距離 OA 等于 $\frac{3}{2}$。

這裏有一個問題沒有解决，就是離原點 O 的距離等于 $\frac{3}{2}$，

但位置在原點 O 的左側，這樣一點 A' 應當用什麼數來表示它呢？當然說 A' 也表示 $\frac{3}{2}$ 是不應該的，因爲這樣 A 和 A' 就沒有區別了。

以上例子說明，實際存在的許許多多的量，不僅有値的大小，而且還具有對立（相反）的意義：　例如

例 1　中的剩餘　　與　　不夠減，

例 2　中的加法　　與　　減法，

例 3　中的向北　　與　　向南，

例 4　中的零上　　與　　零下，

例 5　中的獲利　　與　　虧欠，

例 6　中的上漲　　與　　下退，

例 7　中的向前　　與　　後退，

例 8　中的向右　　與　　向左。

事實上需要我們再把數的概念加以擴充，使擴充了的數，不僅能把量的値標記出來，而且要把量的對立意義也同時表示出來。由例 2 知道加法與減法具有對立意義，因此加號“＋”與減號“－”也具有對立意義，所以用“＋”號與“－”號寫在數的前面，來表示對立量的對立意義。

例如例 8 中，直綫上在原點右側的任一點，都用 $(+1)$，$\left(+\frac{3}{2}\right)$，$(+2)$，……等等去表示。直綫上在原點左側的對應點（卽和右側的點離原點的距離相等而方向相反的），都用 (-1)，$\left(-\frac{3}{2}\right)$，$(-2)$，……等等去表示。

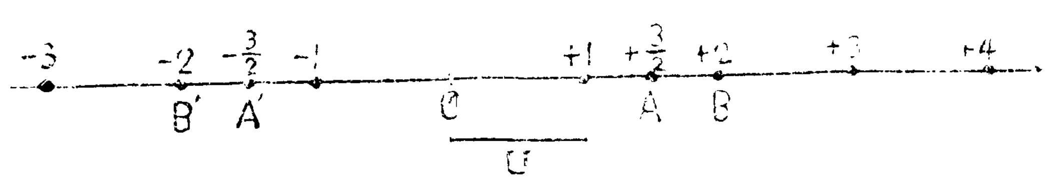

圖 2.

$$\left.\begin{array}{l}\text{如圖右側的 } A \text{點表示} +\dfrac{3}{2} \\[2ex] \quad\text{左側的} A'\text{點表示} -\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}\text{但} OA=OA',$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{右側的 } B \text{點表示} +2 \\[2ex] \text{左側的} B'\text{點表示} -2\end{array}\right\}\text{但} OB=OB',$$

$+\dfrac{3}{2}$讀做正二分之三，$-\dfrac{3}{2}$讀做負二分之三。同樣 $+2$ 讀做正二，-2讀做負二。這裏的加號當正號用，減號當負號用。

所以直綫上的點可以劃分兩類：在原點右側的點表示正數，而在原點左側的點表示負數，每個正數都有一個負數與它對立，$+\dfrac{3}{2}$的對立數是$-\dfrac{3}{2}$。反過來每個負數都有一個正數與它對立，-2的對立數是$+2$。這樣一來，A 點表示$+\dfrac{3}{2}$，A' 就表示$-\dfrac{3}{2}$。所以 A 與A' 儘管離原點的距離相等，但A點在右用$+\dfrac{3}{2}$表示，A' 在左用$-\dfrac{3}{2}$表示。所以有了正數和負數，不僅距離的大小表示出來，而且左右方向的對立意義也表示出來了。

同樣在例 7 中，用 $+3$ 表示向前 3 步，用 -3 表示退後 3 步。例 6 中，用$+2.5$ 表示上漲 2.5 公尺，用-2.5 表示下退 2.5 公尺。例 5 中，用$+5$ 表示獲利 5 萬元，用-5 表示虧欠 5 萬元。例 4 中，用$+3$ 表示零上 3 度，用-3 表示零下 3 度。例 1 中，$5-3=+2$表示剩餘 2；$3-5=-2$ 表示不夠 2。

$+7, +15, +316, \cdots\cdots$叫做正整數，$-7, -15, -316, \cdots\cdots$叫做負整數。

$+\dfrac{2}{3}$，$+\dfrac{17}{15}$，$+\dfrac{53}{100}$，$\cdots\cdots$叫做正分數，$-\dfrac{2}{3}$，$-\dfrac{17}{15}$，

$-\frac{53}{100}$……叫做負分數。

當然介于正數與負數之間的"O"是不分正負的。所以數"O"可以說是正整數、負整數，也可以說是正分數、負分數。正整數、負整數、正分數、負分數與O合起來統叫做有理數（課本上叫正負數）。

爲便利起見，正整數與正分數前面的"+"號都可以略去不寫，但負數前的負號絕對不能省略。

我們已經把數概念擴充到有理數了。算術中所講的數，僅僅是有理數中的一部分，卽零、正整數與正分數。數概念的擴充是這樣的：自然數最簡單，整數又增加了零的概念，而分數又是用兩個自然數來表示的數（分母表示把單位若干等分，分子表示取幾份）。到了有理數，不僅表示了量的值，而且還表示量的對立關係。所以有理數的主要性質是數值與符號。這裏引進一個新名詞和新符號，卽正數的絕對值是正數自己；負數的絕對值是這負數的對立數。例如 +2 的絕對值是 +2 或略寫做 2，用符號寫：

$|+2| = +2$. 或 $|+2| = 2$.

-3的絕對值是$+3$或略寫做 3，用符號寫：

$|-3| = +3$. 或 $|-3| = 3$.

這樣可以知道：任何兩個對立數的絕對值相等而符號相反。

$$|+7| = |-7| = 7. \quad \left|+\frac{2}{5}\right| = \left|-\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}.$$

我們研究有理數的時候，不僅要注意它的絕對值，還得注意它的正負符號。

實際上，收入 5 元支出 5 元等于沒有進出。卽 $(+5)+(-5)=0$，

前進3步，退後3步等于沒有動，

即$(+3)+(-3)=0$

上漲2.5公尺，下退2.5公尺，等于不漲不退，

即$(+2.5)+(-2.5)=0$，

這裏容易理解，任何兩個對立數的和等于0。如以$(+a)$與$(-a)$代表任何兩個對立數，則上述結論可簡寫做公式：

$(+a)+(-a)=0.$

這裏應當注意：由于數的擴大，以後字母代表數的代表性也擴大了。設a代表有理數，那末a就可以代表零、正整數或負整數、正分數或負分數。所以：

當a是正數的時候，a代表正數。

當a是負數的時候，a代表負數。

當a是負數的時候，$-a$代表正數。

當a是正數的時候，$-a$代表負數。

但不論a代表正數或負數，a與$(-a)$一定是代表兩個對立數。因為對立數只許有正、反兩個，不容許有第三個。例如把正面朝外的衣服翻一個面，就是反面朝外了。再翻一個面，又是正面朝外了。所以容易理解：

$-(-3)=3, -[-(-3)]=-3.$

現在進一步來研究擴大了的有理數是否有大小？怎樣進行加、減、乘、除等運算？運算的時候是不是也適用運算基本定律？

§11. **有理數的大小：** 就正數講，絕對值愈大的數愈大。而且所有的正數都比零大。

$\because 35>17,$ 即 $|+35|>|+17|$； $\therefore +35>+17.$

$\frac{25}{3}>8,$ 即 $\left|+\frac{25}{3}\right|>|+8|$； $\therefore +\frac{25}{3}>+8$

而且$\frac{1}{2}>0$，　$7>0$，　$\frac{1}{1826}>0$，……

∴若 a 代表正數，則 $a>0$，

反過來，若 $a>0$，就是說 a 是正數。

就負數講，絕對值愈大的數愈小，而且所有的負數都比零小。

事實上，負債愈多的人財產愈少，甲負債 300 元，乙負債 58 元，很顯然乙的財產比甲多。卽 $-58>-300$；但 $|-58|<|-300|$．（讀做負 58 大于負 300；負 58 的絕對值小于負 300 的絕對值。）

零下 18 度比零下 7 度的溫度來得低。

卽 $-18°<-7°$，但 $|-18|>|-7|$．

就直綫上代表有理數的點來看：

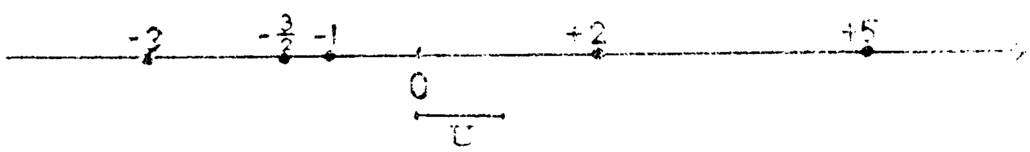

圖 3.

$$-3<-\frac{3}{2}<-1<0<+2<+5$$

左邊的點所代表的數，比在右邊的點所代表的數來得小。

若 b 代表負數，則 $b<0$。反過來，若 $b<0$，就是說 b 是代表負數。

練　習　題

40．從實際生活中另舉幾個可用正負數表示的量。

41．寫出下列各數的對立數與它的絕對值：$+7$；-3.5；$+186.12$；$-7\frac{3}{5}$；$-(-8)$；$-(+32)$；　$-[-(-5)]$；

$-\{-[-(+5)]\}$.

42. 把下列有理數按照大小排列起來：

$+\frac{1}{316}$，$5\frac{1}{2}$，$-7\frac{2}{3}$，$-7\frac{4}{5}$，-0.301.

§12. **有理數的加法和性質**：算術中所講的數只有值的大小，所以進行加法運算的時候，也只要把它的值相加就可以，但有理數除值外還有正負符號。因此應分別情况來研究。

(1) 同號兩數相加：

〔一〕兩個正數相加：這情况與算術中加法完全一致。例如：

$$(+8)+(+7)=+15\ (\text{即 } 8+7=15)$$

$$\because |+8|+|+7|=|+15|.$$

所以兩正數相加，和的絕對值等于加數的絕對值的和，而和的符號仍舊是正的。

〔二〕兩負數相加：這是一種新的情况，我們從實際中來理解。例如我負債 9 元，後來又負債14元，我一共負債23元。

即 $(-9)+(-14)=-23$，$\because |-23|=|-9|+|-14|$.

所以兩負數相加，和的絕對值等于加數的絕對值的和，而和的符號仍舊是負的。

把〔一〕，〔二〕兩句話合併成一句話：

同號兩數相加，和的絕對值等于加數的絕對值的和，而和的符號不變。即加數是正的和也是正的，加數是負的和也是負的。

例 1　求$(-3\frac{5}{7})+(-5\frac{1}{3})$的和。

首先這是求兩個負數的和，所以和的符號是負的。其次

和的絕對值$=\left|-3\frac{5}{7}\right|+\left|-5\frac{1}{3}\right|=3\frac{5}{7}+5\frac{1}{3}=9\frac{1}{21}$，

$\therefore(-3\frac{5}{7})+(-5\frac{1}{3})=-9\frac{1}{21}.$

(2) 異號兩數相加：

〔一〕一個正數與一個負數相加，而正數的絕對值較大。例如我向前走18步，然後我再退後11步，結果我還前進7步。

卽 $(+18)+(-11)=+7$, $\quad\because |+7|=|+18|-|-11|.$

這時候和的絕對值等于加數的絕對值的差，而和的符號是正的，卽與絕對值較大的加數的符號相同。

〔二〕一個正數與一個負數相加，而負數的絕對值較大。例如寒暑表水銀柱上昇6度，然後再下降14度，結果水銀柱下降8度。

卽 $(+6)+(-14)=-8$, $\quad\because |-8|=|-14|-|+6|.$

這時候，和的絕對值等于加數的絕對值的差，而和的符號是負的，卽與絕對值較大的加數的符號相同。

把〔一〕，〔二〕兩句話合併成一句話：

異號兩數相加，和的絕對值等于加數的絕對值的差，而和的符號與絕對值較大的加數的符號相同。

例2 求 $(-19\frac{2}{3})+(+7\frac{1}{3})$ 的和。

這是求異號兩數的和，而絕對值較大的加數 $(-19\frac{2}{3})$ 是負的，所以和的符號是負的。

和的絕對值 $=\left|-19\frac{2}{3}\right|-\left|+7\frac{1}{3}\right|=19\frac{2}{3}-7\frac{1}{3}=12\frac{1}{3}.$

$\therefore(-19\frac{2}{3})+(+7\frac{1}{3})=-12\frac{1}{3}.$

根據有理數加法定義，求 $(+7\frac{1}{3})+(-19\frac{2}{3})$ 的和，和的

符號還是負的，和的絕對值還是$12\frac{1}{3}$.

$$\therefore\left(+7\frac{1}{3}\right)+\left(-19\frac{2}{3}\right)=-12\frac{1}{3},$$

$$\therefore\left(-19\frac{2}{3}\right)+\left(+7\frac{1}{3}\right)=\left(+7\frac{1}{3}\right)+\left(-19\frac{2}{3}\right).$$

水銀柱先上昇 6 度再下降14度與先下降14度再上昇 6 度，結果都下降 8 度。

即$(+6)+(-14)=(-14)+(+6)$。（都等于-8）

以上這兩個例子說明，有理數加法也具有交換性質。設a，b代表任何兩個有理數（即正數或負數），則有理數的加法交換律可簡寫做公式：　　$a+b=b+a$.

注意：這公式同算術中加法交換律的公式的表面形式完全一樣，可是a,b所代表的數的範圍是擴大了。

例 3　求$(-8)+(+5)+(-9)$的和。

$$(-8)+(+5)+(-9)=[(-8)+(+5)]+(-9)$$
$$=(-3)+(-9)=-12;$$

或　$$(-8)+(+5)+(-9)=(-8)+[(+5)+(-9)]$$
$$=(-8)+(-4)=-12.$$

$$\therefore[(-8)+(+5)]+(-9)=(-8)+[(+5)+(-9)].$$

這個例子說明，有理數加法也具有結合性質。設a, b, c代表任何三個有理數，那末有理數的加法結合律可簡寫做公式：

$(a+b)+c=a+(b+c)$　　（都等于$a+b+c$）

§13. **有理數的減法：**

例 1　某人從原點出發，第一次前進 9 步，問第二次要走幾步才走到原點前15步的地方？

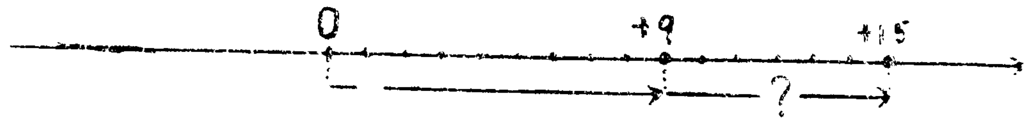

圖 4.

如圖容易知道第二次前進 6 步就到目的地。

$\therefore (+15)-(+9)=+6$，$\because (+9)+(+6)=+15$.

例 2　某人從原點出發，第一次前進23步，問第二次要走幾步才走到原點前15步的地方?

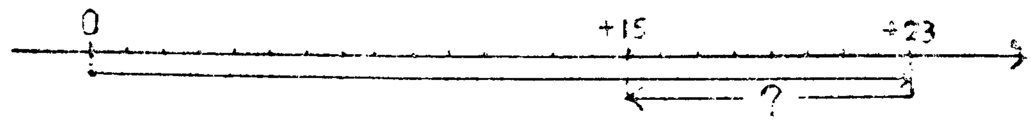

圖 5.

如圖容易知道第二次要後退 8 步才到目的地。

$\therefore (+15)-(+23)=-8$，$\because (-8)+(+23)=+15$.

例 3　某人從原點出發，第一次後退 9 步，問第二次走幾步才走到原點前15步的地方?

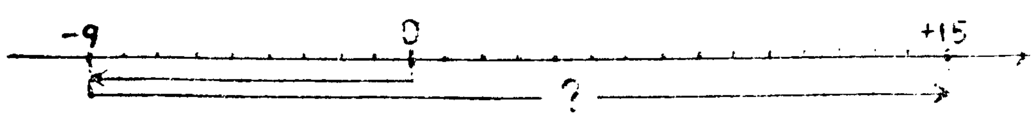

圖 6.

如圖容易知道第二次要前進24步才到目的地。

$\therefore (+15)-(-9)=+24$，$\because (+24)+(-9)=15$.

例 4　某人從原點出發，第一次前進13步，問第二次走幾步才走到原點後 7 步的地方?

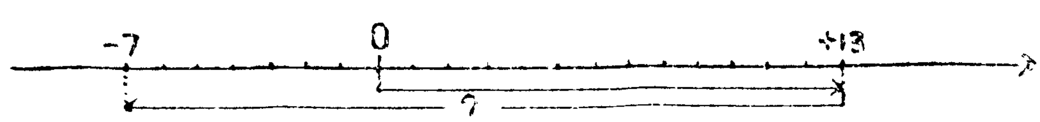

圖 7.

如圖容易知道第二次要後退20步才到目的地。

$\therefore (-7)-(+13)=-20$，$\because (-20)+(+13)=-7$.

例 5　某人從原點出發，第一次後退13步，問第二次走幾步才走到原點後 7 步的地方？

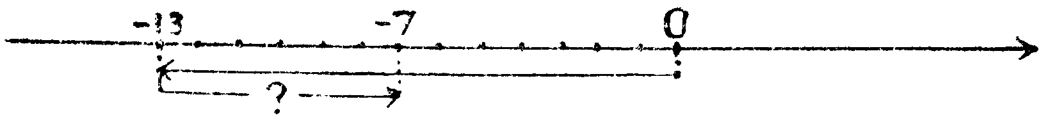

圖 8.

如圖容易知道第二次要前進 6 步才到目的地。

$\therefore (-7)-(-13)=+6$，$\because (+6)+(-13)=-7$.

倘使某人從原點出發，第一次後退 7 步，第二次再前進13步，那末其結果也走到原點前 6 步的地方。用算式表示如下：

$(-7)+(+13)=+6$

我們來把下面的兩個式子比較一下：

$$\left.\begin{array}{l}(-7)-(-13)=+6\\(-7)+(+13)=+6\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{負 7 減負 13 等于正 6}\\\text{負 7 加正 13 等于正 6}\end{array}$$

這兩個式子的首項是相同的，等號後面的結果也是相同的，不過第一式用減法，而第二式用加法。第一式的減數是-13，而第二式的加數是-13的對立數$+13$。這就告訴我們，從負 7 減負 13 的結果與負 7 加正 13 的結果是一樣的。我們再比較一下。下面例 1 到例 4 的幾個同樣的式子，也具有這種情况：

例 1 $\begin{cases}(+15)-(+9)=+6\\(+15)+(-9)=+6\end{cases}$　例 2 $\begin{cases}(+15)-(+23)=-8\\(+15)+(-23)=-8\end{cases}$

例 3 $\begin{cases}(+15)-(-9)=+24\\(+15)+(+9)=+24\end{cases}$　例 4 $\begin{cases}(-7)-(+13)=-20\\(-7)+(-13)=-20\end{cases}$

從以上這些共同情况，可以作出結論：兩個有理數的減法，可以轉化爲加法去計算。怎樣轉化呢？就是把減數的對立數加到被減數上去。換句話說，就是改變減數的符號再與被減數相加。

例如 $3-5$，即 $(+3)-(+5)$ 的簡寫，這裏減數 5 是正的（注意不要把 5 前面的減號看做負號），正 5 的對立數是負 5，所以上式可以這樣轉化：　$3-5=3+(-5)=-2$。

有理數的減法定律可以用下面公式來表示：

$-(+a)=-a$，　$-(-a)=+a$。

第一式讀做減去正 a 等于加負 a。

第二式讀做減去負 a 等于加正 a。

例如計算 $25-2\frac{1}{3}+17-8\frac{2}{3}$，根據減法定義，可轉化爲 $25+(-2\frac{1}{3})+17+(-8\frac{2}{3})$，各項都是加法的形式。這種形式叫做代數和。它與算術和不同的地方，就是代數和中的加數是正數或負數；而算術和的加數只限於正數。因此算術和大于任一加數，這一性質在代數和裏是不成立的。

代數和的形式也可轉化爲代數差的形式。

例如 $25-2\frac{1}{3}+17-8\frac{2}{3}=25-2\frac{1}{3}-(-17)-8\frac{2}{3}$。

運算時，還可根據有理數加法的交換律與結合律，改變運算順序，使運算更爲便利。

$$25+(-2\frac{1}{3})+17+(-8\frac{2}{3})$$

$$=(25+17)+[(-2\frac{1}{3})+(-8\frac{2}{3})]$$

$$=42+(-11)=31.$$

任何兩數都可求它的差。有了有理數，算術中減法的被減數必須大于減數的限制，就打破了。換句話說，在代數中減法是可以通行無阻的。因爲有理數和與差的絕對值，是按照算術運算得來的，所以數 0 在有理數中的加減與算術中一樣，即 $-3+0=0+(-3)=-3$，$0+0=0$，$0-3=0+(-3)=-3$。

練　習　題

計算下列各題：

43. $(+68)+(-132)$；

44. $(-5\frac{1}{3})+(+11)$；

45. $(-8.5)+7.6$；

46. $(-27)+115+(-85)$；

47. $15+(-9)+(-8)+25+(-27)$；

48. $2\frac{1}{3}+(-5\frac{1}{6})+(-3\frac{2}{9})+10\frac{2}{3}$；

49. $3\frac{1}{2}-(-2\frac{1}{3})+(-\frac{5}{6})+4\frac{1}{3}$；

50. $\frac{5}{6}-\frac{1}{2}-(-2\frac{1}{6})+(-\frac{1}{2})$；

51. $1.27-(-7.46)-3.21$；

52. $3.5-\frac{1}{2}-(-5\frac{1}{2})-(7.5)$；

53. 某人從某地出發，先前進 19 步，以後又後退 32 步，接着再前進 11 步，最後又後退 2 步，問某人現在站的地方。

54. 某企業公司某年營業情況如下：第一季度獲利 3255元；第二季度虧損 315 元；第三季度虧損38元；第四季度獲利1223元。問該公司年終結賬情况如何？

§14. **有理數的乘法：** 我們仍舊從實際問題中來理解正負數乘法的存在，從而來給正負數乘法下定義。例如從金華開出的火車，經過杭州開往上海的叫上行車；反過來從上海開出，經過杭州開往金華的叫下行車。大家知道上海在杭州的北

面，而金華在杭州的南面。所以，火車開行的速度還有上行、下行的對立關係；火車距離杭州站還有北面、南面的對立關係；火車經過杭州站的時間有以前、以後的對立關係。

設距離為 s，每小時速度為 v，時間為 t 小時，那末關係式 $s=vt$ 中的 s、v、t，單用算術數來講，是反映不出實際問題的全部情況的，也就是說它們的對立關係表示不出來。

倘使火車上行速度假定它為正，下行速度假定為負；火車在杭州北面的距離為正，在南面的距離為負；火車經過杭州以後的時間為正，以前的時間為負。

現在設火車每小時行 40 公里。那末火車經過杭州站的情況就有下列四種：

(1) 火車從金華開出，半夜時經過杭州站，則 2 小時後火車顯然在杭州北面 80 公里的地方。

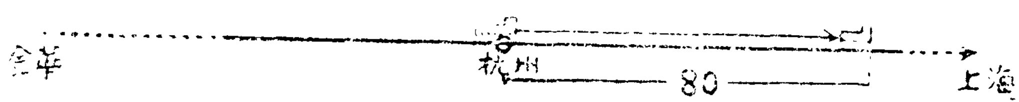

圖 9.

這時候速度是正 40 公里，時間是正 2 小時，距離是正 80 公里。它的關係式是： $+80=(+40)\times(+2)$.

(2) 火車從金華開出，半夜時到杭州站，那末 2 小時前火車顯然還在杭州南面 80 公里的地方。

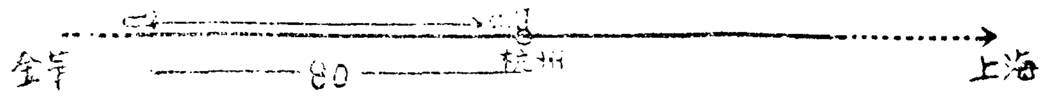

圖 10.

這時候火車速度是正40公里，而時間是負 2 小時，距離是負80公里，它的關係式是： $-80=(+40)\times(-2)$.

(3) 火車從上海開出，半夜時經過杭州站，那末 2 小時後

火車顯然在杭州南面80公里的地方。

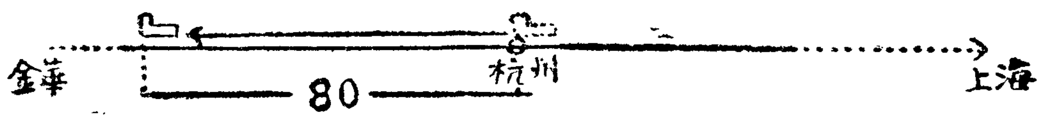

圖 11.

這時候火車速度是負40公里，而時間是正 2 小時，距離是負80公里，它的關係式是：　$-80=(-40)\times(+2)$.

(4) 火車從上海開出，半夜時到杭州站，那末 2 小時前火車顯然在杭州北面 80 公里的地方。

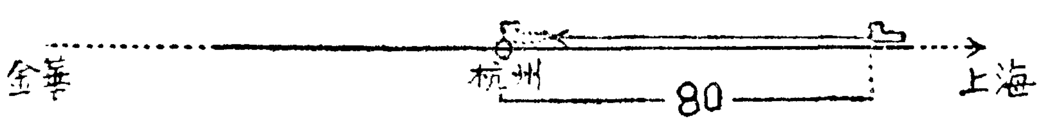

圖 12.

這時候火車速度是負 40 公里，而時間是負 2 小時，距離是正 80 公里，它的關係式是：　$+80=(-40)\times(-2)$.

以上的實例說明，兩個有理數相乘是能夠把更多的實際情況表示出來的。實例中所表示出來的關係就是：

(1) 正數乘以正數得正數。

(2) 正數乘以負數得負數。

(3) 負數乘以正數得負數。

(4) 負數乘以負數得正數。

總括起來說，兩個有理數的乘積是一個有理數，這個乘積是這樣決定正負和它的絕對值的：

若乘數是同號的，乘積的符號是正的。

若乘數是異號的，乘積的符號是負的。

乘積的絕對值等于乘數絕對值的乘積。

這就是兩個有理數相乘的定義，也可以叫做正負數乘法法則。

任何有理數乘零，它的積還是零；用零去除任何有理數是不允許的；任何有理數乘以正數，它的符號不變；任何有理數若乘以負數，它的符號要變。

例1　求 $(-318)\times(-75)$的積。

乘積的符號是正的，因爲乘數是同號。

乘積的絕對值 $=|-318|\times|-75|=318\times 75=23850$.

$\therefore(-318)\times(-75)=23850$.

例2　求 $-5\frac{2}{3}\times 4\frac{1}{17}$的積。

乘積的符號是負的，因爲乘數是異號。

乘積的絕對值 $=\left|-5\frac{2}{3}\right|\times\left|4\frac{1}{17}\right|=\frac{17}{3}\times\frac{69}{17}=23$.

$\therefore -5\frac{2}{3}\times 4\frac{1}{17}=-23$.

當然實際進行運算的時候，中間的兩個步驟是可以省去的。遇到兩個以上的有理數相乘時，可以逐步進行運算。

例3　$2\cdot(-3)\cdot(-5)\cdot(+2)\cdot(-4)$

$=(-6)\cdot(-5)\cdot(+2)\cdot(-4)$

$=(+30)\cdot(+2)\cdot(-4)$

$=(+60)\cdot(-4)=-240$

例4　$(-5)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)$

$=(+10)\cdot(-3)\cdot(-4)$

$=(-30)\cdot(-4)=+120$

從上二例容易推知，若乘數中負數的個數是偶數時，他們的乘積是正數。若負數的個數是奇數時，他們的乘積是負數。

例5　$(-2)^2=(-2)\cdot(-2)=+4$.

$(-2)^3=(-2)^2\cdot(-2)=-8$.

$$(-2)^4=(-2)^2\cdot(-2)^2=+16.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

這例說明，負數的偶數次乘方是正數，負數的奇數次乘方是負數。設 n 代表自然數，那末 $2n$ 代表偶數，$2n+1$ 代表奇數。

$$\therefore\ (-1)^{2n}=+1.\quad (-1)^{2n+1}=-1.$$

§ 15. **有理數的除法：** 有理數除法與算術中除法的定義相同，有理數除法是有理數乘法的逆運算。就是已知乘積及一個乘數，求另一個乘數的運算方法。例如 a 除以 b，就是要找一個數 x，使 $bx=a$，這個 x 就寫做 $a\div b$。因此有理數除法的法則，就可直接從有理數乘法的法則推得。

$$\therefore(+80)\div(+40)=+2;\qquad \because +80=(+40)\times(+2).$$

$$\therefore(-80)\div(+40)=-2;\qquad \because -80=(+40)\times(-2).$$

$$\therefore(-80)\div(-40)=+2;\qquad \because -80=(-40)\times(+2).$$

$$\therefore(+80)\div(-40)=-2;\qquad \because +80=(-40)\times(-2).$$

從上面的例子說明，兩個有理數相除的商是一個有理數。這個商是這樣決定正負和它的絕對值的：

若被除數與除數同號，商的符號是正的。

若被除數與除數異號，商的符號是負的。

商的絕對值，等于被除數的絕對值除以除數的絕對值的商。

例 1　求 $\left(-\frac{6}{7}\right)\div\left(-\frac{9}{14}\right)$ 的商。

商的符號是正的，因爲被除數與除數同號。

商的絕對值 $=\left|-\frac{6}{7}\right|\div\left|-\frac{9}{14}\right|=\frac{6}{7}\div\frac{9}{14}=\frac{4}{3}.$

$$\therefore\ \left(-\frac{6}{7}\right)\div\left(-\frac{9}{14}\right)=+\frac{4}{3}.$$

例2　求$\frac{3}{2}\div\left(-\frac{9}{2}\right)$的商。

商的符號是負的，因爲被除數與除數異號。

商的絕對值$=\left|\frac{3}{2}\right|\div\left|-\frac{9}{2}\right|=\frac{3}{2}\div\frac{9}{2}=\frac{1}{3}$.

$\therefore\frac{3}{2}\div\left(-\frac{9}{2}\right)=-\frac{1}{3}$.

因爲有理數乘積或商的絕對值，是按照算術運算一樣得來的，所以0在有理數乘除運算中和算術中一樣：

即　$(-3)\times 0=0\times(-3)=0$.

任何有理數乘以零，乘積必定爲零。

$0\div(-3)=0$。

零除以任何有理數，商必定是零。

$(-15)\div 0$是不允許的，$0\div 0$是無意義的，因爲它可以等于任何數。

§16. **有理數乘法與除法的性質：**　按照有理數乘法定義，可以確定乘積$(-8)\cdot(+7)$與$(+7)\cdot(-8)$的符號都是負的，確定它們的絕對值也是相同的。根據算術數的乘法交換律：$|-8|\cdot|+7|=|+7|\cdot|-8|$.

$\therefore\quad(-8)\cdot(+7)=(+7)\cdot(-8)$.

同樣　$\left(-2\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-3\frac{2}{5}\right)=\left(-3\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-2\frac{1}{3}\right)$.

所以有理數乘法運算具有交換性質。如以a,b代表任何兩個有理數，那末有理數乘法交換律可簡寫做公式：

$a\cdot b=b\cdot a$ 又因爲：

$[(+5)\cdot(-3)]\cdot(-4)=(-15)\cdot(-4)=+60$

$(+5)\cdot[(-3)\cdot(-4)]=(+5)\cdot(+12)=+60$

$\therefore[(+5)\cdot(-3)]\cdot(-4)=(+5)\cdot[(-3)\cdot(-4)]$

∴有理數乘法結合律可簡寫做公式：

$(ab)c=a(bc)$。因爲：

$(-3)\cdot[(-2)+(+5)]=(-3)\cdot(+3)=-9.$

$(-3)\cdot(-2)+(-3)\cdot(+5)=(+6)+(-15)=-9.$

$\therefore(-3)[(-2)+(+5)]=(-3)(-2)+(-3)\cdot(+5).$

∴有理數乘法的分配律可簡寫做公式：

$m(a+b)=ma+mb$。

從此可見，數概念擴大到有理數之後，它們的加、減、乘、除的運算定義，是更複雜了。不過算術中的四則運算定義，是包括在有理數運算定義之內的，例如當兩個都是正數相加、相減(被減數大于減數)、相乘、相除的特殊情況，也就是算術數相加、相減、相乘、相除的情況。但數概念擴大到有理數之後，所有加法交換律，加法結合律，乘法交換律，乘法結合律，乘法分配律，這五條基本運算定律還是成立的。從這基本運算定律推演出來的十一項運算性質也都是適用的。此外在算術中已經講過除法性質，那就是被除數與除數乘以(或除以)同一數(這數不等于零)，商的值不變。寫做式子是$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$.現在證明這一性質在有理數除法中也是成立的。

例　$(-5)\div(3)=\frac{-5}{3}=\frac{(-5)\cdot(-2)}{3\cdot(-2)}=-\frac{10}{6}$.

但　$(-5)\div(3)=-\frac{5}{3}$.

∴符號相同而絕對值相等，即$\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$.

所以今後對有理數進行運算的時候，還是要根據運算定律與運算性質去進行的。至于運算符號與運算順序，還是同從前一樣。在有理數進行運算的時候，應當特別注意的，就是有理

數不僅要算出它們的絕對值，還得注意它們的正負符號，數的前面沒有正負號的，就是省略了正號。在實際上減號與負號有同等意義。例如我有一張15元的債票與我要付出15元，對我所有的錢數來說是一樣的。但在運算過程中，因它所在的地位，可以看做減號，也可以看做負號。

$-3+(+8)$，這裏應讀做負3加正8，不應當讀做減3加正8。根據加法得

$$-3+(+8)=-3+8=+5.$$

倘使根據加法交換律與加法轉化減法，得

$$-3+(+8)=(-3)+(+8)=(+8)+(-3)$$

$$=+8-(+3)=8-3.$$ 這裏就應當讀做正8減3；結果與前面一樣也是5。

現在再舉幾個有理數四則運算的混合例題如下：

例1 計算$\left(-\frac{7}{12}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(+2\frac{3}{4}\right)+\left(-3\frac{1}{3}\right)\div\left(-2\frac{2}{3}\right)$.

按運算順序先算乘與除，得

$$\left(-\frac{7}{12}\right)-\left(-\frac{22}{12}\right)+\left(+\frac{5}{4}\right)$$

再按次序進行加減，得：

$$\left(-\frac{7}{12}\right)+\left(+\frac{22}{12}\right)+\left(+\frac{5}{4}\right)=\left(+\frac{15}{12}\right)+\left(+\frac{5}{4}\right)=2\frac{1}{2}.$$

例2　設 $a=-\frac{2}{3}$，$b=-5$，

求 $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ 的值。

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$=\left(-\frac{2}{3}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2(-5)+3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot(-5)^2-(-5)^3$$

先乘方，得：

$$\left(-\frac{8}{27}\right)-3\cdot\left(+\frac{4}{9}\right)\cdot(-5)+3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot(+25)-(-125)$$

再做乘法，得： $-\frac{8}{27}-\left(-\frac{20}{3}\right)+(-50)-(-125)$

最後加減，得：

$$-\frac{8}{27}+\frac{20}{3}+(-50)+125=\frac{172}{27}+75=81\frac{10}{27}.$$

練　習　題

55．求下列各數的乘積：

$(-7)\cdot(+5)$；　　$(+5)(-30)$；

$(-7)\cdot(-8)$；　　$(+0.1)(+0.001)$；

$(-7)\cdot\left(+\frac{18}{21}\right)$；　　$\left(-\frac{6}{7}\right)\cdot\left(-\frac{14}{9}\right)$；

$(-2.5)\cdot(+8)$；　　$(-3.02)\cdot(-1.1)\cdot(-2.2)$；

$\left(-\frac{5}{8}\right)\cdot(+0.2)\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot(-1)^3$；

$(-3)^3\cdot(-2)^2\cdot(-1)^5$。

56．求下列各數的商：

$(-81)\div7$；　　$-36\div(-4)$；

$81\div(-9)$；　　$+125\div(+25)$；

$\left(-1\frac{3}{10}\right)\div\left(-2\frac{2}{5}\right)$；　　$-3\frac{1}{3}\div\left(2\frac{1}{2}\right)$；

$(+0.2)\div(-0.1)$；　　$(-0.3)\div(-0.06)$；

$(-1.5)\div\left(-2\frac{1}{3}\right)$；　　$(+3.003)\div(-0.01)^2$。

57．計算下列各式的值：

(1) $1+\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6}\div\left(-\frac{1}{5}\right)$.

(2) $\frac{1}{2}+8\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0\div 5$.

58. 設 $a=-\frac{1}{2}$, $b=-3$. 計算下列代數式的值:

(1) $a^2+2ab+b^2$.

(2) $(a+b)^2$.

(3) $(a+b)(a-b)$.

(4) a^2-b^2.

(5) $(a+b)^3$.

(6) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

第四講　單項式與多項式

§17. **基本概念：**　代數學裏，是用字母代表數來進行運算的，運算的結果必然產生代數式。代數式是以字母與數字用運算符號結合起來的一種式子，其中最簡單的一種就是整式或叫多項式，這和算術中的整數相仿。代數式中較複雜的一種就是分式，這和算術中的分數相仿。初中代數學，只研究多項式與分式，其他更複雜的代數式留在高中繼續研究。現在我們來研究單項式與多項式，並先把有關的幾個名詞搞清楚。

像下列式子都叫單項式：

$$3a;\quad a^2;\quad 2ab;\quad \frac{1}{2}a;\quad -2ab;\quad 7x^3;\quad 5;\quad \cdots\cdots$$

字母前面的數字叫做係數（這裏暫時不提到以字母做係數的情況），上列各單項式的對應係數是：

$$3;\quad 1;\quad 2;\quad \frac{1}{2};\quad -2;\quad 7;\quad 5;\quad \cdots\cdots$$

這些單項式裏依着指定字母乘方的指數，叫做該單項式的次數。例如$3a$；$\frac{1}{2}a$；叫字母 a 的一次項。a^2；叫 a 的二次項。$2ab$；$-2ab$；叫字母 a, b 的二次項，也可叫字母 a 的一次項，或字母 b 的一次項。$7x^3$ 叫做字母 x 的三次項。5 叫做零次項或常數項。

大家注意，所謂單項式的次數，是就它所含的指定字母來講的。

上列單項式中，凡字母相同，次數相同，不論係數是否相同，那末這樣的單項式叫做同類項。凡同類的單項式相加相減的時候可以合併：

例如　$3a$ 與 $\frac{1}{2}a$ 是同類項。

$\therefore$　$3a+\frac{1}{2}a=(3+\frac{1}{2})a$（分配律）

係數相加，得：$\frac{7}{2}a$。

例如　$2ab$ 與 $-2ab$ 就是同類項，

$\therefore$　$2ab+(-2ab)$

$=(2-2)ab=0\cdot ab=0$。

又　$2ab-(-2ab)$

$=2ab+2ab=(2+2)ab=4ab$。

同類項可以合併的意義，應當這樣去理解：單項式中的字母，都是代表數的，在同一問題中，每個字母只能代表相同的數；單項式只是係數與字母所代表的數的乘積，本身是一個數。因此單項式進行運算時，可以根據數的運算性質進行合併。把 a 當做一個數看，$3a+\frac{1}{2}a$的意義就是 a 的 3 倍加a的 $\frac{1}{2}$ 倍，結果是 a 的 $\frac{7}{2}$ 倍。

不同類的單項式相加減的時候，不能合併，用加、減號把它們連在一起就好了。

例如　把 a^2，$2ab$ 與 7 相加，就可以寫做 $a^2+2ab+7$。

例如　把單項式 a^2 減去$-2ab$，就可以寫做 $a^2-(-2ab)$；把減法轉化爲加法，也可以寫做 $a^2+(+2ab)$，簡寫爲 a^2+2ab。

以上二例中的$a^2+2ab+7$與a^2+2ab都叫做多項式，第一個叫做三項式，第二個叫做二項式。如此類推，多項式$3x^3+2x^2+x-17$叫做四項式等等。多項式也有次數，多項式的次數，就是以各項中次數最高項的次數爲次數。

例如 $a^2+2ab+7$的第一、第二項都是二次，所以這個多項式叫二次多項式，或叫做二次三項式。

$3x^3+2x^2-x-17$叫做三次四項式。

但多項式含有兩個或兩個以上字母的時候，它的次數應該對指定的字母來講：

例如 $3x^3-2xy+y^2$。對x,y講是三次式，單對x講也是三次式，但單對y講是二次式。

倘使多項式的各項次數相同時，叫做齊次多項式。例如$a^2-2ab+b^2$與$a-b$，是a,b的齊次多項式，但第一式也可看做a（或b）字母的二次式，第二式也可看做a（或b）的一次式。

§18. **多項式的性質：** 所有多項式，根據有理數加減法相互轉化的法則，可以把它轉化爲所有各項的代數和。例如$3a^2-2ab+5b$可以轉化爲代數和的形式：$(+3a^2)+(-2ab)+(+5b)$。因此加法交換律，加法結合律以及減法運算性質，多項式都是具有的。換句話說，就是多項式的各項可以先後移動（注意必須連符號移動），而不改變多項式的值。例如$3x^2-2x+5$可以寫做$3x^2+5-2x$或$5+3x^2-2x$等等。其次是多項式內的任何幾項可以先結合，再與其他各項相加減，多項式的值也是不改變的。例如 $5+6ab-11a^2+3b^2$可以寫做$5+6ab+(-11a^2+3b^2)$，或$5+(6ab-11a^2+3b^2)$，也可以寫做$5+6ab-(11a^2-3b^2)$，或$5-(-6ab+11a^2-3b^2)$.

這些變換，只要根據運算定義和性質，把括弧去了以後，

所得的多項式是完全一樣的。爲了今後運算時的便利起見，從這裏可以總結出添括弧與去括弧的兩種方法。例如：

(1) 從 $5+(6ab-11a^2+3b^2)$ 換到 $5+6ab-11a^2+3b^2$ 是去括弧的過程。因爲括弧前是加號，所以括弧去掉後，括弧內各項的符號都沒有改變。

反過來，是添括弧的過程。倘若要把多項式中的某幾項放到括弧中去，而括弧前寫上加號，那末放進括弧去的各項都不必變號。

(2) 從 $5+6ab-(11a^2-3b^2)$ 變換到 $5+6ab-11a^2+3b^2$ 也是去括弧的過程。因爲括弧前是減號，所以括弧去掉後，括弧內各項的符號都要改變。例如 $11a^2$ 變做負 $11a^2$，$-3b^2$ 變做正 $3b^2$。

反過來，也是添括弧的過程。倘若要把多項式中的某幾項放到括弧中去，而括弧前寫成減號，那末放進括弧去的各項都必須改變符號。

從以上去括弧來看，容易推得：

$$+\left(2a^2-ab+\frac{1}{2}b^2-b^3\right)=2a^2-ab+\frac{1}{2}b^2-b^3.$$

$$-\left(2a^2-ab+\frac{1}{2}b^2-b^3\right)=-2a^2+ab-\frac{1}{2}b^2+b^3.$$

第一等式說明，多項式各項符號不變，整個多項式的符號也不變。第二等式說明，多項式各項的符號改變，那末整個多項式的符號也改變，卽多項式的數值變了符號。但多項式數值的絕對值是不變的。這是多項式的第三種性質。

例如　設 $a=5$，$b=-3$.

則 $a^2-2ab+b^2=5^2-2\times5\times(-3)+(-3)^2=64$

$$-a^2+2ab-b^2=-5^2+2\times5\times(-3)-(-3)^2=-64.$$

但 $|64|=|-64|$.

練　習　題

把下列各題中的括弧先去掉，再把同類項合併：

59. $(x-2y-3z)+(2y-5z-3x)-(3z+7x-4y)$.

60. $(2x^3-3x+2)+(5x^2+2x-7)-(8-2x+5x^2+2x^3)$

61. $(a^3-2a^2b-3ab^2+4b^3)+(-2a^3+5a^2b-ab^2-3b^3)$.

62. 把下列兩個多項式的後面三項放到括弧裏，把括弧前面的符號寫做正號又寫做負號：

(1) $3a^2-2ab+5a^2b^2-7\frac{1}{2}$

(2) $6x^3+5x^2-3x-\frac{5}{7}$

63. 設 $x=-\frac{1}{2}$，$y=3$. 代入多項式 $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ 與 $-x^3+3x^2y-3xy^2+y^3$ 中，計算它們的值。證明它們的絕對值相等而符號相反。

64. 設 $x=-\frac{1}{2}$，$y=3$，代入多項式$(x-y)^3$ 與 $(y-x)^3$中。用計算值的方法，證明它們的結果是兩個對立數。

§ 19. **多項式的加法與減法：** 多項式的加法與減法，與算術中整數的加法與減法有類似的地方。兩整數相加或相減時，主要是同位數的相加或相減。兩多項式相加或相減時，主要是同類項的相加或相減。因此，多項式的加減，可以歸結到同類單項式的加減。而同類單項式的加減，可以歸結到兩個係數的加減，也就是兩個有理數的加減問題，但各項的字母還是一樣的。

例 1　求 $7a^2-2ab+3b^2$ 與 $5a^2-3b^2+4ab$ 的和。

把第二個多項式的第二與第三項先調換，使它與第一式的

同類項排列順序相同。然後把第二式寫在第一式的下面，使同類項排在一直列上。

$$\begin{array}{r} 7a^2-2ab+3b^2 \\ +\quad 5a^2+4ab-3b^2 \\ \hline 12a^2+2ab \end{array}$$

也可以寫成橫式，如下：

$$\begin{aligned} & 7a^2-2ab+3b^2+(5a^2-3b^2+4ab) \\ =& 7a^2-2ab+3b^2+5a^2-3b^2+4ab \\ =& (7a^2+5a^2)+(-2ab+4ab)+(3b^2-3b^2) \\ =& 12a^2+2ab. \end{aligned}$$

例 2　求多項式 $3x^3+2x^2y-5xy^2$ 與 $3x^2y-2xy^2-y^3$ 的差。

$$\begin{array}{r} 3x^3+2x^2y-5xy^2\qquad \\ -\qquad 3x^2y-2xy^2-y^3 \\ \hline 3x^3-\ x^2y-3xy^2+y^3 \end{array}$$

注意：不是同類的項不要寫在同一行裏。也可以寫成橫式。

例 3

$$\begin{array}{r} 3x^3-2x^2+x-7 \\ -\quad 3x^3-2x^2+x+2 \\ \hline 0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x-9=-9. \end{array}$$

例 4

$$\begin{array}{r} -2x^2-3xy+5y^2 \\ +\quad 2x^2+3xy-5y^2 \\ \hline 0\cdot x^2+0\cdot xy+0\cdot y^2=0. \end{array}$$

由例 1 與例 2 來看，兩個多項式的和與差，仍舊是一個多項式。從例 3 來看，兩個多項式相加或相減的結果會變成一個有理數，這時候其它各項的係數都變成零。所以有理數也叫做零次多項式。從例 4 來看，兩多項式相加或相減的結果會變成

零，這時候多項式各項的係數都是零。我們叫它做零多項式。所以任何有理數與零，都包括在多項式之內，它們不過是多項式的一種特殊形式。

練　習　題

計算下列多項式的和或差：

65. $\frac{5}{6}a+\frac{3}{4}b+(-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b)$.

66. $(3x^4-4x^3y+7x^2y^2+xy^3)+(-2x^4-6xy^3+x^3y+y^4)+(3x^3y-6x^2y^2+5xy^3)$.

67. $(\frac{2}{3}a^2-\frac{5}{4}ab+\frac{5}{12}a^2)+(-\frac{3}{2}a^2-\frac{2}{5}ab+\frac{3}{4}b^2-\frac{2}{5}a^2b^2)$.

68. $0.8a^2-3.47ab-17.25ac+3.75bc-(-0.75a^2-0.47ab+12.625bc)$.

69. $8m-3n^2-(m+6n^2-5m^2)$.

70. $(x^2-2xy+y^2)-(x^2+2xy+y^2)$.

71. $(2a^3-ac+bc+3c^2)-(2ac-5bc-ab+3b^2)$.

72. $[3(a+b)^2-(a+b)+7c]-[(a+b)^3-2(a+b)^2+7c]$.

（注意把 $a+b$ 看做一個數來進行運算）

73. 把多項式 $a+b-\{a-b+[a-b-(a-b)]\}$ 去括弧化簡。

74. 把多項式 $3-ab-xy+ac-xz+ad$ 中含字母 a, b、c 的各項與含字母 x,y ,z 的各項都分別放在括弧裏，而括弧前先

寫正號再寫負號。

75. 已知兩多項式的和爲$\frac{3}{2}a^2-3ab+\frac{1}{3}b^2$，而差爲$a^2-\frac{1}{2}ab+3b^2$，把這兩個多項式求出來。

§20. **指數定律與單項式乘法：** 在講到多項式乘法以前，先提一下指數的幾個基本性質是必要的，因爲多項式乘法要用到它。

前面已經講過，同一數相連乘的時候，可以簡單地用乘方形式來表示。

例1 $5\times5=5^2$，$5\times5\times5=5^3$.

$$5^2\times5^3=(5\times5)\times(5\times5\times5)$$
$$=5\times5\times5\times5\times5 \quad (\text{乘法結合律})$$
$$=5^5=5^{2+3}.$$

例2 $(-2)^4=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$;

$$(-2)^3=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2).$$
$$\therefore (-2)^4\cdot(-2)^3$$
$$=[(-2)(-2)(-2)(-2)][(-2)(-2)(-2)]$$
$$=(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)$$
$$=(-2)^7=(-2)^{4+3}.$$

例3 $x^5=x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x$; $x^2=x\cdot x$.

$$\therefore x^5\cdot x^2=(x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x)\cdot(x\cdot x)$$
$$=x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x$$
$$=x^7=x^{5+2}.$$

以上幾個例說明，同底數的乘方相乘時，乘積也是同底數的乘方，但乘積的指數等于各乘數的指數的和。如設 a 代表任何有理數，m、n 代表正整數，以上性質可簡寫爲公式：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{I})$$

這公式可推廣到同底數的乘方在二個以上的時候。

根據除法是乘法的逆運算定義，從上面的例子容易引出：

$5^5 \div 5^3 = 5^2 = 5^{5-3}$。

$(-2)^7 \div (-2)^3 = (-2)^4 = (-2)^{7-3}$。

$x^7 \div x^2 = x^5 = x^{7-2}$。

一般的說，可得：

$$a^{m+n} \div a^n = a^m = a^{(m+n)-n},$$

如以 p 代 $m+n$，且設 $p>n$；得：

$$a^p \div a^n = a^{p-n}$$

或寫做 $\dfrac{a^p}{a^n} = a^{p-n}$（這裏 $p>n$）$\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{II})$

倘若 $p=n$，那末上式變做，$1=\dfrac{a^n}{a^n}=a^{n-n}$，

即 $1=a^0$，或 $a^0=1$。

任何數自乘零次毫無實際意義，為了使公式沒有例外地可以通用，我們約定，任何數的零次方等于 1 。

例 4 $5^3 = 5\times5\times5$

那末 $(5^3)^3 = (5^3)\cdot(5^3)\cdot(5^3)$.

$= (5\times5\times5)\cdot(5\times5\times5)\cdot(5\times5\times5)$

$= 5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5$

$= 5^9 = 5^{3\times3}$

例 5 $(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$

那末 $[(-2)^3]^2 = (-2)^3\cdot(-2)^3$

$= [(-2)(-2)(-2)][(-2)(-2)(-2)]$

$$=(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)$$
$$=(-2)^6=(-2)^{3\times 2}$$

例 6 $\quad x^2=x\cdot x$

$$(x^2)^4=(x^2)(x^2)(x^2)(x^2)$$
$$=(x\cdot x)(x\cdot x)(x\cdot x)(x\cdot x)$$
$$=x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x$$
$$=x^8=x^{2\times 4}.$$

以上的例說明，某數乘方的乘方等于某數的乘方，但最後乘方的指數等于已知乘方指數的積。設 a 代表任何有理數；m、n 代表正整數，上述性質可簡寫做公式：

$$\underline{(a^m)^n=a^{m\cdot n}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{Ⅲ})$$

例 7 $\quad (3\times2\times5)^2=(3\times2\times5)\times(3\times2\times5)$

$=(3\times3)\cdot(2\times2)\cdot(5\times5)$ （乘法的交換律與結合律）

$=3^3\times2^2\times5^2$

例 8 $\quad (5\times1\frac{1}{2})^3=(5\times1\frac{1}{2})(5\times1\frac{1}{2})(5\times1\frac{1}{2})$

$=(5\times5\times5)(1\frac{1}{2}\times1\frac{1}{2}\times1\frac{1}{2})$

$=5^3\times(1\frac{1}{2})^3.$

例 9 $\quad (x\cdot y\cdot z)^3=(x\cdot y\cdot z)(x\cdot y\cdot z)(x\cdot y\cdot z)$

$$=(x\cdot x\cdot x)(y\cdot y\cdot y)(z\cdot z\cdot z)$$
$$=x^3\cdot y^3\cdot z^3.$$

以上的例說明，若干數乘積的乘方等于每個乘數的乘方的乘積。換句話說，就是把乘方指數去乘每個乘數的指數（指數不寫的就是 1 ）。

設 a, b, c 代表任何有理數，n 代表正整數，上述性質可簡寫做公式：

$$\underline{(abc)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{IV})$$

上面公式，乘積的個數可推廣到三個以上的時候。下面我們先來研究兩單項式的乘法。

例 1　求單項式　$5a^2x^2$ 與 $-3abx^3$ 的積。

$$(5a^2x^2)(-3abx^3) = 5a^2x^2(-3)abx^3$$

$$= 5(-3)(a^2 \cdot a)bx^2x^3 \quad (\text{乘法交換律與結合律})$$

$$= -15 \cdot a^{2+1} \cdot bx^{2+3}$$

$$= -15 \cdot a^3 \cdot bx^5 \qquad (\text{指數定律 I})$$

例 2　求單項式　$-\frac{3}{2}ab^2x^3$ 的平方。

$$\left(-\frac{3}{2}ab^2x^3\right)^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \cdot (a)^2 \cdot (b^2)^2 \cdot (x^3)^2 \quad (\text{指數定律 IV})$$

$$= \frac{9}{4}a^2 \cdot b^{2\times 2} \cdot x^{3\times 2} \qquad (\text{指數定律 III})$$

$$= \frac{9}{4}a^2b^4x^6.$$

例 3　求單項式 $(-3a^2x^3y)$ 的立方。

$$(-3a^2x^3y)^3 = (-3)^3 \cdot (a^2)^3(x^3)^3(y)^3$$

$$= -72a^{2\times 3}x^{3\times 3}y^{1\times 3}$$

$$= -27a^6x^9y^3.$$

以上三例說明，單項式的平方與立方是單項式乘法的特例。那末單項式乘法，主要是在根據運算定律與指數定律把它化簡。但在化簡過程中應注意下列幾點：

(1) 乘積的正負號；

(2) 乘積的係數；

(3) 乘積中的字母；

(4) 乘積中各字母的指數。

這樣看起來，單項式乘法比有理數乘法又複雜了些。它除運算定律外，還要根據指數定律，而指數定律我們又是非常生疏的，爲了避免困難，應當多做練習。

練　習　題

求下列各題中的單項式的乘積：

76. $3abx$，$4bcy$；　　77. $-7a^2b^2y^2$，$\frac{4}{7}b^3c^3$；

78. $-\frac{1}{2}xy^2z$，$-1\frac{1}{2}x^2y^3z^3$；　79. $2.5a^2x^2$，$3.1a^3x^3$；

80. $14a^3b^2$，$-3ab$，$-2a^2b^3$；

81. $\frac{1}{2}ab^2c^3$，$-3.5a^3bc^2$，$\frac{5}{3}a^2b^3c$。

82. 求下列各單項式的平方與立方：

$11ax^2$；　$5a^2b^2x$；　$-0.1ab^2x^3y$。

83. (1) 求　$-\frac{1}{3}a^2bc^3$ 的平方。

(2) 求　$-\frac{1}{3}a^2bc^3$ 的立方。

(3) 把 (1) 與 (2) 的結果相乘。

(4) 求 $(-\frac{1}{3}a^2bc^3)^5$。

(5) 求 $(-\frac{1}{3}a^2bc^3)^6$。

把(3) 的答數同(4)、(5)的答數比較一下，有沒有相等的，再說明它的理由。

§21. **多項式乘法：** 現在進一步來研究單項式與多項式的乘法。例如求單項式 m 與多項式 $a+b-c$ 的乘積，這裏只要根

據乘法分配律。可得：

$$(a+b-c)m=am+bm-cm.$$

例如 $(7ax^3-21ab^4-3x^2)\cdot 2a^2b^3x^4$

$$=7ax^3\cdot(2a^2b^3x^4)-21ab^4\cdot(2a^2b^3x^4)-3x^2\cdot(2a^2b^3x^4)$$

$$=14a^3b^3x^7-42a^3b^7x^4-6a^2b^3x^6.$$

至于多項式乘多項式，無非乘法分配律多應用幾次。例如求多項式 $a-b+c$ 與多項式 $m+n$ 的乘積。

$$\underbrace{(a-b+c)}_{\text{三項}}\cdot\underbrace{(m+n)}_{\text{二項}}$$

$$=a(m+n)-b(m+n)+c(m+n)$$

$$=(am+an)-(bm+bn)+(cm+cn)$$

$$=am+an-bm-bn+cm+cn.$$

這例子說明，兩個多項式相乘的時候，應當把一個多項式的每一項與另一多項式的每一項相乘，不能遺漏一項，然後把所有乘積加起來。這裏也告訴我們兩多項式相乘的積應當有幾項的問題。上例中一個是三項，一個是二項，所以乘積應該有 $3\times2=6$ 項。但相乘的結果可能出現同類項，有的同類項合併了，有的同類項相消了，所以最後的項數，常常會低于已知多項式項數的乘積的。

例1 $(a^2-ab+b^2)(a+b)$

$$=a^2\cdot a-ab\cdot a+b^2\cdot a+a^2b-ab\cdot b+b^2\cdot b$$

$$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$$

$=a^3+b^3$. （中間的四項都消去了）

例2 $(3an+2n^2-4a^2)(n^2-5an)$

$$=3an^3+2n^4-4a^2n^2-15a^2n^2-10an^3+20a^3n$$

$=-7an^3+2n^4-19a^2n^2+20a^3n$.（第一項與第五項，第三項與第四項都合併了）

多項式進行運算時，爲了避免錯誤，把單項式與多項式適當的排列一下是必要的。在沒有運算前，單項式的係數總是寫在最前面，而字母可以按照字母本身的順序來寫。這樣都會給運算很大的便利。例如把單項式 $3x^2ayb^2$ 寫成 $3ab^2x^2y$ 的形式。

對多項式來講，除掉每一項按字母順序排列外，常常按某一指定字母的次數高低來排列。從高次到低次的排列叫降冪排列，這樣的多項式叫做某字母的降冪式。例如：$2x^3-2x^2+x-7$ 叫做 x 的降冪式。在降冪多項式中，第一項叫 x 的最高項，末了一項叫做 x 的最低項。反過來，從低次到高次的排列叫昇冪排列，這樣的多項式叫做某字母的昇冪式。例如 $3x-x^2+3x^3-x^4$，叫做 x 的昇冪式。這時候第一項是最低項，末了一項是最高項。倘使多項式中含有多于一個的字母時，那只能就一個字母的指數來排列，對另外的字母就可以不管它的順序了。究竟挑選那個字母作爲主要字母來排列，那要看具體情況來決定。倘使兩個多項式要進行運算時，那末每個多項式都應當按照同一主要字母來排列，而且要排成同一種形式。

例1 求多項式 x^2-2y^2+3xy 與 $2xy-2y^2$ 的乘積。

選擇 x 做主要字母，把第一式排成 x 的降冪式 $x^2+3xy-2y^2$，把第二式也排成 x 的降冪式 $2xy-2y^2$。這樣排成直式來演算，就比較便利。

$$
\begin{array}{rrrr}
 & x^2 & +3xy & -2y^2 \\
 & & 2xy & -2y^2 \\
\hline
2x^3y & +6x^2y^2 & -4xy^3 & \\
 & -2x^2y^2 & -6xy^3 & +4y^4 \\
\hline
2x^3y & +4x^2y^2 & -10xy^3 & +4y^4.
\end{array}
$$

注意：演算時應當把乘積的同類項寫在同一行裏，倘使有不同類的項就要留出空位。

例2. 求 a^2+b^2-2ab 與 $b^2+2ab+a^2$ 的乘積。

都排成 a 的降冪式，再用直式演算。

$$\begin{array}{rrrrr}
a^2 & -2ab & +b^2 & & \\
a^2 & +2ab & +b^2 & & \\
\hline
a^4 & -2a^3b & +a^2b^2 & & \\
 & +2a^3b & -4a^2b^2 & +2ab^3 & \\
 & & a^2b^2 & -2ab^3 & +b^4 \\
\hline
a^4 & & -2a^2b^2 & & +b^4
\end{array}$$

乘積 $=a^4-2a^2b^2+b^4$.

這裏應當注意，已知的多項式應當是化簡（就是把同類項合併）了的多項式。如果我們所說的多項式至少有二個不同類的項，那末兩個多項式相乘的乘積中，它的最高項與最低項都是唯一的，不可能和別的項相消。例如：

$(3x^2-5)(3x^2+5)=9x^4-25$. 因此，兩個多項式的乘積還是多項式，不會變成單項式。而且它的項數不能少于 2 。至于運算是否有錯誤，可把多項式中的字母用最小的自然數去代替，算出各多項式的值，看結果是否相等來驗算。例如例 1 中，命 $x=1$, $y=2$,

得：$x^2+3xy-2y^2=1+6-8=-1$

$2x^3-2y^2=4-8=-4$

$2x^3y+4x^2y^2-10xy^3+4y^4=4+16-80+64=4$

即 $(-1)(-4)=4$. 例 1 驗算結果沒有錯誤。

練　習　題

求下列各多項式的乘積，並用自然數代入驗算：

84. a^2-ab+b^2, $2a-4b$.

85. $2x-z+3y$, $z+2x-3y$.

86. $6x^2+2x+1$, $-x-1+x^2$.

87. $c^2+3cd+4d^2$, $c^2-3cd-4d^2$.

88. $a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$, $a^3-x^3-3a^2x+3ax^2$.

89. $x^4+x^2y^2+y^4$, x^2-y^2.

90. 化簡下式並加驗算：

$$2(x+1)(x-1)(x-2)-4x(1-x)(x+3)$$

91. 求下列各式的平方，乘積與立方：

$(a+b)^2$; $(a-b)^2$; $(a+b)(a-b)$;

$(a+b)^3$; $(a-b)^3$; $(x+5)(x+3)$.

§22. **乘法公式：** 上面習題 91 中的那些多項式，是以後常常要遇見的多項式。應該把這類多項式的乘積、平方或立方，作爲公式加以記憶。今後遇到這類多項式運算時，不必再照乘法手續重新運算，就可直接代入公式，把它的結果寫出來。這類公式還可以應用在其他方面，必須牢牢記住它。記憶的方法，必須是記住每一公式的意義，這樣才能靈活運用。

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

兩數和的平方，等于這兩數平方的和，再加兩數乘積的二倍。

(2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

兩數差的平方，等于這兩數平方的和，再減兩數乘積的二倍。

(3) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

兩數的和與這兩數的差的乘積，等于兩數平方的差。

(4) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

兩數和的立方，等于兩數立方的和，加三倍第一數平方與第二數的積，再加三倍第一數與第二數平方的積。

(5) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

兩數差的立方，等于兩數立方的差，減三倍第一數平方與第二數的積，再加三倍第一數與第二數平方的積。

(6) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$.

這裏的 a,b 把它看做已知數，而 x 看做未知數。這公式的意義是這樣：首項相同而第二項不同的兩個二項式的乘積等于首項的平方，加兩個第二項的和與首項的乘積，再加兩個第二項的積。

記住了以上乘法公式，並且懂得每一公式的意義之後，今後在多項式乘法運算時，就可適當地應用，使運算簡便。

例1 $(ax^2-4y)^2$.

把 ax^2 看做一個數，$4y$ 看做一個數，那末上式就是求兩數差的平方。根據公式(2)，就可把結果寫出來：

$$\begin{aligned}(ax^2-4y)^2&=(ax^2)^2-2(ax^2)(4y)+(4y)^2\\&=a^2x^4-8ax^2y+16y^2.\end{aligned}$$

例2 $(x^2-y^2-xy)(x^2-y^2+xy)$.

兩多項式中，第一、二項都是相同的，只有第三項的符號相反。把 x^2-y^2 看做一個數，xy 看做一個數，那末上式就是求兩數和與兩數差的積。根據公式(3)，得

$$(x^2-y^2-xy)(x^2-y^2+xy)=(x^2-y^2)^2-(xy)^2$$

第一部分又用兩數差的平方公式把它展開。

$$(x^2-y^2)^2-(xy)^2=(x^2)^2-2(x^2)y^2+(y^2)^2-(xy)^2$$

$$=x^4-2x^2y^2+y^4-x^2y^2$$

$$=x^4-3x^2y^2+y^4.\ \text{（合併同類項）}$$

例3 $\left(2a+\frac{1}{2}b^2c\right)^3$.

把 $2a$ 與 $\frac{1}{2}b^2c$ 分別看做一個數，那末上式就是求二數和

的立方。根據公式(4)得：

$$(2a+\frac{1}{2}b^2c)^3$$

$$=(2a)^3+3(2a)^2(\frac{1}{2}b^2c)+3(2a)(\frac{1}{2}b^2c)^2+(\frac{1}{2}b^2c)^3$$

$$=8a^3+6a^2b^2c+\frac{3}{2}ab^4c^2+\frac{1}{8}b^6c^3.$$

例4 $(2n-4)(2n+5)$

這式子不能應用公式(3)，因爲第二項不同。根據公式(6)，可得

$$(2n-4)(2n+5)$$

$$=(2n)^2+(-4+5)\cdot 2n+(-4)\cdot(+5)$$

$$=4n^2+2n-20。$$

例5 $(m+2)(m-2)(m-2)(m+2)$.

把前面二多項式與後面二多項式分別應用公式(3)，得：

$$(m^2-4)(m^2-4)=(m^2-4)^2$$

再應用公式(2)，得：m^4-8m^2+16.

但也可把上式應用乘法交換律看做：

$$(m+2)^2\cdot(m-2)^2=(m^2+4m+4)(m^2-4m+4)$$

再把 m^2+4 看做一個數，$4m$ 看做另一個數，根據公式(3)，得：

$$(m^2+4)^2-(4m)^2$$

再根據公式(1)展開第一部分，得：

$$m^4+8m^2+16-16m^2=m^4-8m^2+16.$$

所得結果是相同的，但第一法較爲簡單。究竟應用什麼公式較爲便利？這需要我們去觀察。而觀察力的提高是要依靠多做練習，多看不同類型的例題去培養的。

乘法公式還可應用到數的計算，使運算簡便。

例6 求 97×103 的積。

把 97 看做是100與 3 的差，而103恰好是100與 3 的和，因此根據公式(3)，得

$$97\times103=(100-3)(100+3)=100^2-3^2$$
$$=10000-9=9991.$$

注意這裏的運算只要應用心算。

例7 計算 98^3.

把98看做是100與 2 的差。

$$98^3=(100-2)^3=100^3-3\times100^2\times2+3\times100\times2^2-2^3$$
$$=1000000-60000+1200-8=941192.$$

練 習 題

利用乘法公式演算下列各題:

92. $(3x+2y)^2$.

93. $\left(0.3x^2+\frac{1}{3}ay\right)^2$.

94. $(2a^3y^2-3by)^2$.

95. $\left(\frac{2}{3}a^3b-\frac{1}{2}xy\right)^2$.

96. $\left(1\frac{1}{3}-5ax^2\right)\left(1\frac{1}{3}+5ax^2\right)$.

97. $\left(3a+1\frac{1}{2}bx^2\right)^3$.

98. $(x^2-y^2-xy)(x^2+y^2+xy)$.

99. $\left(\frac{2}{3}pn-\frac{3}{4}m^2\right)^3$.

100. $\left(5x^2-2y+\frac{1}{3}y^2\right)^2$.

101. $(2a+b-1)^3$.

102. $(x-2)(x-3)(x-6)(x+1)$.

103. 用公式計算下列各數:

995×1005; 45×55; 78^2; 998^2;

64×56；　102^3；　51^3；　601^3.

§23. **單項式與多項式的除法：** 前面已經研究過單項式，多項式的和、差、積還是多項式。這說明加法、減法與乘法運算，對多項式來講是完全可以的，而且我們已經掌握了這種運算方法。現在再來研究除法：除法是乘法的逆運算，也就是已知乘積與一個乘數，求另一個乘數的方法。但從乘法中容易看到，乘積中的字母總是比任何一個乘數的字母來得多，或至少相等。換句話說，就是乘數中的所有字母，一定包含在乘積之中，同時乘積中每個字母的指數，決不會小于任一乘數中同字母的指數。例如

$$(5a^2x^2)(-3abx^3)=-15a^3bx^5.$$

乘數中的不同字母 a,b,x 都包含在乘積 $-15a^3bx^5$ 之中，而且乘積中字母 a 的指數 3 比 2、1 都來得大，b 的指數相等，x 的指數 5 也大于 2 或 3。

在兩個多項式的乘積中也有同樣情況。即乘積（多項式）的次數，一定不小于任一乘數（多項式）的次數。

以上事實告訴我們，兩個單項式相除時，被除單項式中必須包含除式單項式中的所有字母，同時每一字母的指數，也不能小于除式中同字母的指數。

例如　$5abx^2\div cx$ 或 $5abx^2\div2a^2x$ 都是不能除的，也就是說，不可能找到一個單項式，使它與 cx 的乘積等于 $5abx^2$；同樣不可能找到一個單項式，使它與 $2a^2x$ 的乘積是 $5abx^2$。

例如　$(3x^2-2x+5)\div(x^3-1)$ 也是不可能除的，因為找不到一個多項式，使它與 x^3-1 的乘積等于 $3x^2-2x+5$。

這事實與算術中講整數的時候，兩個整數不一定能夠整除的道理是類似的。例如15除以12，它的商不是整數。所以除法必須要等到數概念發展到分數之後，才能一般地應用。

這裏也有同樣情況。單項式、多項式的除法，在目前是受到一定的限制，必須等到整式發展到分式以後，除法才能一般地應用。因此現在要計算單項式與多項式的除法，必須要考慮條件是否夠，即被除式是否包含除式的所有字母；被除式字母的指數是否不小于除式同字母的指數；被除式的次數是否不低于除式的次數。

例如 $-3ax^4y^5\div(-\frac{1}{2}ax^3y^3)$，條件是夠的；$0.8a^2x^n\div(-0.02ax)$，當 n 是自然數時條件也是夠的。得：

$$-3ax^4y^5\div(-\frac{1}{2}ax^3y^3)=6xy^2.$$

$$0.8a^2x^n\div(-0.02ax)=-40ax^{n-1}.$$

例如 $(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)\div(a+b)^2$ 條件是夠的。根據乘法公式，得：

$$(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)\div(a+b)^2=a+b.$$

除法對多項式來說，既然有一定的限制，這裏不作一般的研究，僅就下列兩種情況加以討論。

(1) 同字母的兩多項式相除：一般先把兩多項式排成同字母的降冪式，遇有缺項留出空位。茲舉例說明如下：

例如 $(3x^4+8+5x^3+12x^2)\div(2-x+3x^2)$.

先排成 x 的降冪式，再按下列直式進行運算。

$$\begin{array}{l|rrrrr|l}
 & 3x^4 & +5x^3 & +12x^2 & & +8 & 3x^2-x+2 \\
 & -3x^4 & +x^3 & -2x^2 & & & x^2+2x+4 \\
\hline
\text{第一餘式：} & & 6x^3 & +10x^2 & & +8 & \\
 & & -6x^3 & +2x^2 & -4x & & \\
\hline
\text{第二餘式：} & & & 12x^2 & -4x & +8 & \\
 & & & -12x^2 & +4x & -8 & \\
\hline
\text{第三餘式：} & & & & & 0 &
\end{array}$$

步驟是這樣：先以除式的首項 $3x^2$ 去除被除式的首項得商

x^2，以 x^2 乘除式各項，再變號與被除式相加即得第一餘式。以後就這樣繼續進行，倘最後餘式是零就算除盡。這時候被除式等于除式與商式的乘積。

上式中：$3x^4+5x^3+12x^2+8=(3x^2-x+2)(x^2+2x+4)$

即使被除式次數不低于除式次數，但還不能斷定一定除得盡，不過最後餘式的次數要低于除式的次數，不然的話還可繼續除下去。例如：

$$
\begin{array}{rrrr|l}
10x^3 & -3x^2 & -7x & +5 & \;2x-1 \\ \cline{5-5}
-10x^3 & +5x^2 & & & \;5x^2+x-3 \\ \cline{1-4}
 & 2x^2 & -7x & +5 & \\
 & -2x^2 & +x & & \\ \cline{2-4}
 & & -6x & +5 & \\
 & & +6x & -3 & \\ \cline{3-4}
 & & & 2 & \quad \text{最後餘式不是零}
\end{array}
$$

$\therefore 10x^3-3x^2-7x+5=(2x-1)(5x^2+x-3)+2.$

這與算術中帶餘數的除法相仿，即被除式等于除式與商式的積再加餘式。所以同字母的多項式總是可以應用帶餘式的除法。

(2) 同字母的兩個二項式相除：

例如求 $(a^5+b^5)\div(a+b)$ 的商，

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
a^5 & & & & & +b^5 & \;a+b \\ \cline{7-7}
-a^5 & -a^4b & & & & & \;a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4 \\ \cline{1-6}
 & -a^4b & & & & +b^5 & \\
 & +a^4b & +a^3b^2 & & & & \\ \cline{2-6}
 & & a^3b^2 & & & +b^5 & \\
 & & -a^3b^2 & -a^2b^3 & & & \\ \cline{3-6}
 & & & -a^2b^3 & & +b^5 & \\
 & & & +a^2b^3 & +ab^4 & & \\ \cline{4-6}
 & & & & ab^4 & +b^5 & \\
 & & & & -ab^4 & -b^5 & \\ \cline{5-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}
$$

同樣應用除法可以得出下列公式：

$$(a+b)\div(a+b)=1.$$

$$(a-b)\div(a-b)=1.$$

$$(a^2-b^2)\div(a+b)=a-b.$$

$$(a^2-b^2)\div(a-b)=a+b.$$

(1)：　$(a^6-b^3)\div(a-b)=a^2+ab+b^2.$

(2)：　$(a^3+b^3)\div(a+b)=a^2-ab+b^2.$

(3)：　$(a^4-b^4)\div(a-b)=a^3+a^2b+ab^2+b^3.$

(4)：　$(a^4-b^4)\div(a+b)=a^3-a^2b+ab^2-b^3.$

(5)：　$(a^5-b^5)\div(a-b)=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4.$

(6)：　$(a^5+b^5)\div(a+b)=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4.$

…………………………………………

從以上公式中，可以得出下列結論：

當 n 是奇數：a^n+b^n 能被 $a+b$ 除盡。

a^n-b^n 能被 $a-b$ 除盡。

當 n 是偶數：a^n+b^n 不能被 $a\pm b$ 除盡。

a^n-b^n 能被 $a\pm b$ 除盡。

記住這些公式，對以後遇到二項式除法時可以有很大便利。

例如 $\left(\frac{27}{8}n^6-\frac{1}{27}p^3\right)\div\left(\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{3}p\right).$

這裏的 $\frac{3}{2}n^2$ 與 a 相當，$\frac{1}{3}p$ 與 b 相當。根據公式(1)，得：

$$\left(\frac{27}{8}n^6-\frac{1}{27}p^3\right)\div\left(\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{3}p\right)$$

$$=\left(\frac{3}{2}n^2\right)^2+\left(\frac{3}{2}n^2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}p\right)+\left(\frac{1}{3}p\right)^2$$

$$=\frac{9}{4}n^4+\frac{1}{2}n^2p+\frac{1}{9}p^2.$$

因為除法是乘法的逆運算，所以上面六個公式，也可以寫成乘積的形式：

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$$

$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=a^4-b^4.$$

$$(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)=a^4-b^4.$$

$$(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)=a^5-b^5.$$

$$(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)=a^5+b^5.$$

……………………………………………

多項式乘法運算時，應用這些公式也能使運算便利。

練　習　題

104. $5a^4x^2y$ 除以 $-2a^2x$； $7^6ac^4xy^2\div(-7^4ac^4y)$.

105. $25ax^2y^3-10x^3y^4-5x^2y^3$ 除以 $5x^2y^3$.

106. $3.25a^7-5.2a^6+9.75a^3$ 除以 $0.25a^3$.

107. $(a-b)(c+d)+(a-b)(x+y)$ 除以 $a-b$.

求下列各題的商式及餘式：

108. $(5x^3-x+2x^2-1)\div(2x^2-1+x)$.

109. $(6x^4-7x^3+3x^2-x-12)\div(2x-3)$.

110. $(9x-6+4x^2+8x^5+4x^6-3x^4-16x^3)$除以 $(4x^3+2-3x)$.

利用除法公式，求下列各式的商：

111. $(32x^5+a^5)\div(2x+a)$.

112. $\left(\frac{1}{27}-a^3x^6\right)\div\left(\frac{1}{3}-ax^2\right)$.

113. $\left(\frac{8}{125}a^3x^3+\frac{1}{8}y^9\right)\div\left(\frac{2}{5}ax+\frac{1}{2}y^3\right)$

114. $[x^4-(a-y)^4]\div(x-a+y)$.

115. $(64x^6-1)\div(2x-1)$.

第五講　多項式的因式分解

§24. 引言：在算術裏已經講過，所有的整數（指自然數講，不包括零）可以分成三類：一類是1；一類是質數；一類是合數。也已經講過如何把一個合數分解成質因數連乘積。分解質因數的方法，並不像加法乘法一樣是有一定方法的，主要是用試除法，就是用質因數2,3,5,7,11,13,17,…… 由小到大逐個試除過去，除盡了就是所求的質因數。當然也可以根據倍數鑑定法去求。

例如合數 $420=2\times2\times3\times5\times7$.

也就是說420是二個2，一個3，一個5，一個7的連乘積。

算術裏學習分解質因數的主要目的，是爲學習簡約分數和分數運算做好準備。多項式的因式分解，主要目的也是爲以後學習分式運算與分式化簡時做好準備。而且有時解二次或二次以上的方程式也用得到因式分解。不學會因式分解，代數就很難學下去。所以學會因式分解，是學好代數的一個環節。

多項式的係數都是有理數，它的分母中不允許有任何字母存在，因此多項式的另一名稱叫做有理整式。多項式的因式分解，就是有理整式的因式分解，分解出來的因式，也要求是多項式（即有理整式），還要求分解出來的每個因式，不能再分解成另外的多項式。這與算術中的分解質因數有類似的意義。

例如　分解 x^4-a^4 爲因式 $(x^2+a^2)(x^2-a^2)$ 是不夠的，因爲因式 x^2-a^2 還可以分解成 $(x-a)(x+a)$。x^4-a^4 應當分

解成 $(x^2+a^2)(x-a)(x+a)$ 的連乘積。

倘使因爲 $(x^2+a^2)(x^2-a^2)=x^4-a^4$，得 $x^4-a^4=(x^2+a^2)(x^2-a^2)$，于是就把因式分解叫做乘法的逆運算，這是不妥當的。因爲逆運算是有唯一性的，例如減法是加法的逆運算，因爲差是唯一的；除法是乘法的逆運算，因爲商是唯一的。這在前面講多項式的四則運算時，已經可以看得很清楚。

有理整式 x^4-a^4 可以寫成下列四種乘積：

$$(x^3-ax^2+a^2x-a^3)(x+a);$$

$$(x^3+ax^2+a^2x+a^3)(x-a);$$

$$(x^2+a^2)(x^2-a^2);$$

$$(x^2+a^2)(x+a)(x-a).$$

這說明它們是沒有唯一性的。當然如果把乘式限制在不能再分解的範圍之內的話，即 $(x^2+a^2)(x-a)(x+a)=x^4-a^4$，則 $x^4-a^4=(x^2+a^2)(x-a)(x+a)$ 是唯一的。

因爲多項式的因式分解不是乘法的逆運算，所以它沒有一定的分解方法，這會給初學代數的人帶來困難。但初中代數中所遇到的多項式的類型是不多的，而且常遇到的某些典型多項式在乘法裏已經把它們寫成公式，倘使這些公式已經熟悉的話，那末學習多項式的因式分解，也就不會感到有多大的困難。下面我們由淺到深地逐步來學習，是可以保證學好的。

§25. **單項式的因式分解**：單項式是數與字母的乘積，因此單項式的因式分解，就是把係數（倘使是整數的話）分解成質因數，把字母乘方寫成同文字的連乘積。

例如　$12a^3bx^2=2\times2\times3aaabxx$，

這裏僅僅說明 a^3 還可分解，就是它包含三個 a 的連乘積。但 a 不能再分解，至于書寫的時候不需要把 a^3 寫做 aaa。

根據開方定義，$3=(\sqrt{3})^2$，$a=(\sqrt{a})^2$，那末要不要把

3分解成$\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$；a分解成$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$；或者把a分解成$a^2\cdot\frac{1}{a}$呢？我們說不應當。因爲$\sqrt{3}$不是有理數，$\sqrt{a}$不是有理式，$\frac{1}{a}$不是整式，這樣的分解都不符合定義與要求的。

倘若係數是分數，那就沒有什麼質因數，把分數看做單項式的數因子，照原來寫上就是。

例如 $\frac{1}{6}b^2xy^3=\frac{1}{6}\cdot bbxyyy.$

§26. **多項式的因式分解**：這裏分做四點來研究。

(1) 首先根據乘法分配律。

$$am+bm+cm=m(a+b+c).$$

觀察一下已知多項式的每一項是否有共同的因式，倘使有的話，就把這公因式全部提到括弧外面。共同的因式可能是單項式，如下例：

例1 $-4x^3y+6x^2y^2-8x^4y^3$中，每項都有公因式$-2x^2y$（這裏的2就是係數4,6,8的最大公約數）提出來。得

$$-4x^3y+6x^2y^2-8x^4y^3=-2x^2y(2x-3y+4x^2y^2).$$

已知多項式每項的共同因式可能是多項式。如下例：

例2 $3x(a-b+c)-6y(a-b+c)+9z(a-b+c)$ 這多項式中，每項都有公因式$3(a-b+c)$。提出後得

原式$=3(a-b+c)(x-2y+3z).$

已知多項式的公因式有時候符號相反，必須變號後，才能分解。如下例：

例3 $3x(p-a)-2y(a-p)$，先把第二項變號，得

$$3x(p-a)+2y(p-a)$$

再把公因式$(p-a)$提出來。得：

原式$=(p-a)(3x+2y)$。

例4 $p(x^2-y^2)+q(x^2-y^2)-(y^2-x^2)$

$=p(x^2-y^2)+q(x^2-y^2)+(x^2-y^2)$

$=(x^2-y^2)(p+q+1)$. （注意括弧中的1不要忘記）

這裏應當注意，所謂符號不同，是指整個多項式的符號不同。倘使有的項同號，有的項異號，那就不能分解，例3中若變做 $3x(p-a)-2y(p+a)$，因爲 p 同號而 a 異號，因此不能變號。倘使單獨地把第二項的 a 變號，得 $3x(p-a)+2y(p-a)$，因此分解成 $(p-a)(3x+2y)$。這結果是與已知多項式不相等的。可以用數代文字驗算一下。設 $a=1$，$p=2$，$x=3$，$y=2$，

原式 $=3\times3(2-1)-2\times2(2+1)=-3$，

但 $(p-a)(3x+2y)=(2-1)(3\times3+2\times2)=13$.

這說明沒有原則的去變號，就要犯錯誤。驗算分解因式是否錯誤，可把結果相乘看它是否與原式相同。

練　習　題

分解下列多項式的因式，並把118,122兩題用數代入驗算一下。

116. $20a+30b+40$　　　117. $-9a^4b+15a^3c+21a^3d^3$.

118. $2x^n+4x^{n-1}y-8x^{n-2}y_2$.

119. $(x-2)b-(x-2)a$.

120. $(c-d)b^4-(c-d)bc^2x$.

121. $3(2a+4b)+3(3a+6b)$.

122. $(a-b)^3+2a(a-b)^2$.

123. $2k(x-y)-(y-x)$.

124. $2a(x-y+z)-6b(y-x-z)+9c(x+z-y)$.

125. $3a(2x^2-x+1)+15b(1-x+2x^2)-21(x-1-2x^2)$

(2) 拿到一個多項式分解因式時，必須用第一種方法，先看

每項裏有沒有公因式，倘使有的話，一定要先提出。然後再繼續觀察在提出公因式以後的多項式裏能不能進行因式分解。因式分解的第二種方法，就是利用乘除法公式。分別說明如下：

〔一〕把乘法公式（見第22節）(1)與(2)兩式的等號左邊與右邊對調，並且合併起來寫。得

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2. \text{〔不必寫做 } (a\pm b)(a\pm b)\text{〕}$$

這公式叫做完全平方公式。它的特徵是：（甲）兩個平方的項必須都是正號。（乙）還有一項一定是兩數乘積的2倍。這就告訴我們，若已知多項式是兩數平方的和，再加（或減）該兩數乘積的兩倍，那末就可以斷定它的兩個因式都是該兩數的和（或差）。

例1 分解 $9a^4+12a^2y+4y^2$ 的因式。

這多項式一看就知道，第一項 $9a^4$ 是 $3a^2$ 的平方，第三項 $4y^2$ 是 $2y$ 的平方，第二項 $12a^2y$ 又是 $2\cdot(3a^2)(2y)$，而符號是正的。根據公式，就得

$$\begin{aligned}9a^4+12a^2y+4y^2 &= (3a^2)^2+2(3a^2)(2y)+(2y)^2\\ &= (3a^2+2y)^2.\end{aligned}$$

倘使已知多項式的第二項是減號，那末可得

$$9a^4-12a^2y+4y^2=(3a^2-2y)^2$$

倘使已知多項式是 $-9a^4+12a^2y-4a^2$，即平方的兩項都是負的，應當把負號先提出，再根據公式分解因式。得：

$$-9a^4+12a^2y-4a^2=-(9a^4-12a^2y+4y^2)=-(3a^2-2y)^2.$$

倘使已知多項式平方的兩項異號的話，例如 $9a^4+12a^2y-4y^2$，那就不能應用完全平方的公式來分解，應該用別的方法。倘使各項中有公因式，而這公因式又不是平方數，那末必須要按第一法先提出這公因式，再利用公式分解。

例如 $18a^4x-24a^2xy+8xy^2$

$=2x(9a^4-12a^2y+4y^2)=2x(3a^2-2y)^2$。

例2 分解 $1+9a^2(x-y)^2-6a(x-y)$ 的因式。

這多項式的各項中是沒有公因式的，第一項是 1 的平方，第二項是 $3a(x-y)$ 的平方，第三項是 $2\cdot1\cdot3a(x-y)$ 而且符號是負的。根據公式，卽得：

$$1+9a^2(x-y)^2-6a(x-y)$$
$$=1^2-2\times1\times3a(x-y)+[3a(x-y)]^2$$
$$=[1-3a(x-y)]^2$$

倘使需要的話，上面結果也可寫做： $(1-3ax+3ay)^2$。

例3 分解 $-1.2x+9x^2+0.04$ 的因式。

第二項是 $3x$ 的平方，第三項是 0.2 的平方，第一項又是 $2\times(3x)\times0.2$ 但符號是負的。根據公式，得：

原式 $=(3x-0.2)^2$； 或 $=(0.2-3x)^2$.

〔二〕把乘法公式（見第 22 節）(3)的等號左邊與右邊對調，寫做公式：

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

這公式的特徵是：兩項都是平方而且符號相反。所以倘若已知多項式是兩數平方的差的話，那末根據公式就知道它的因式一個是該兩數的和，另一個是該兩數的差。

例1 分解 $64a^4b^6-25c^2d^2$ 的因式。

容易看出公因式是沒有的。第一項是 $8a^2b^3$ 的平方，第二項是 $5cd$ 的平方，而且符號相反。根據公式，得：

$$64a^4b^6-25c^2d^2=(8a^2b^3)^2-(5cd)^2$$
$$=(8a^2b^3+5cd)(8a^2b^3-5cd).$$

例2 分解 $18(m+n)^2-2(m-n)^2$ 的因式。

兩項有公因數 2，先提出後，得：

$$9(m+n)^2-(m-n)^2,$$

看出第一项是 $3(m+n)$ 的平方，第二项是 $m-n$ 的平方而且符號相反，根據公式，得

$$18(m+n)^2-2(m-n)^2=2[9(m+n)^2-(m-n)^2]$$
$$=2[3(m+n)+(m-n)][3(m+n)-(m-n)]$$

這結果中還有同類項，應當合併化簡。得：

$$2(4m+2n)(2m+4n)$$

這結果中還有公因數，應當提出。得：

$$2\times2\times2(2m+n)(m+2n)=8(2m+n)(m+2n).$$

〔三〕把乘法公式（見第22節）(4)，(5)兩式的等號左邊與右邊對調並合併起來，寫做公式：

$$a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$$

這公式叫做完全立方公式。它的特徵是：有四項不同類的項，它是二數立方的和（或差），加上(或減去) 3 倍第一數平方與第二數的積，再加上 3 倍第一數乘第二數平方的積。倘使已知多項式具有以上特徵的話，那末根據公式，它有三個因式，而每個因式都是第一數與第二數的和（或差）。

例1 分解 $m^3+6m^2n+12mn^2+8n^3$ 的因式。

這多項式的第一項是 m 的立方，第四項是 $2n$ 的立方，第二項是$3\cdot m^2\cdot(2n)$，第三項是$3m\cdot(2n)^2$，而且符號都是正的。根據公式，得：

$$m^3+6m^2n+12mn^2+8n^3$$
$$=m^3+3\cdot m^2(2n)+3m(2n)^2+(2n)^3$$
$$=(m+2n)^3$$

例2 分解 $250m^3x^3-150m^2x^2+30mx-2$ 的因式。

容易看出，已知多項式的各項有公因數2。先提出後，得：

$$125m^3x^3-75m^2x^2+15mx-1$$

第一項是$5mx$的立方，第四項是 1 的立方，而符號是負的，

第二項是 $-3\cdot(5mx)^2\cdot 1$，第三項是 $3\cdot(5mx)\cdot 1^2$。根據公式，得：

$$\begin{aligned}原式&=2(125m^3x^3-75m^2x^2+15mx-1)\\&=2[(5mx)^3-3(5mx)^2\cdot 1+3\cdot(5mx)\cdot 1^2-1^3]\\&=2(5mx-1)^3.\end{aligned}$$

練　習　題

分解下列各多項式的因式：

126. $4x^2-4xy+y^2$.　　127. $25ab^2+16ax^2-40abx$.

128. $-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}xy-\frac{1}{9}y^2$.

129. $50x^{10}+20x^5+2$.　　130. $4a^2b^2-25a^2c^2$.

131. $3a(x+y)^2-3az^2$.　　132. $4(a-b)^2-9(2a+3b)^2$.

133. $(2x-7)^4-(3x-1)^2$

134. $8a^3x^6+12a^2x^4+6ax^2+1$

135. $27m^3-\frac{27}{2}m^2np+\frac{9}{4}mn^2p^2-\frac{1}{8}n^3p^3$.

〔四〕把乘法公式（見第22節）(6)的等號左邊與右邊對調，寫做公式：

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b).$$

這公式的特徵是：某字母的一個二次三項式，首項是某字母的平方，第二項是某字母的一次項，第三項是不含某字母的常數項，而且常數項能分解成二已知數的積，而這二已知數的和恰好是一次項的係數。凡遇二次三項式具有上述特徵時，根據公式便可分解成某字母的兩個一次二項式的乘積，這二項式的第二項就是二已知數。

例 1　分解 x^2+5x+6 的因式。

常數項 6 可分解爲 1×6，$(-1)\times(-6)$，$(-2)\times(-3)$，

2×3 等等，但其中 $2+3$ 恰好是 5，所以二已知數爲 2 與 3。故得：

$$x^2+5x+6=x^2+(3+2)x+3\times2$$
$$=(x+3)(x+2).$$

例 2　分解 x^2-5x+6 的因式。

這時候因爲一次項係數是負的，把常數項 6 分解爲 $(-2)\times(-3)$。故得：

$$x^2-5x+6=x^2+(-3-2)x+(-3)\times(-2)$$
$$=(x-3)(x-2).$$

例 3　分解 $x^2y^2+3xy-4$ 的因式。

這時候可看做 xy 的二次三項式，常數項是負的，分解出來的二個數一定是一正一負。-4 可分解成 $(+4)\times(-1)$，$(+2)(-2)$ 或 $(+1)(-4)$，再看那二個數的和是 $+3$，很顯然是第一組數，即 $+4+(-1)=+3$。故得：

$$x^2y^2+3xy-4=x^2y^2+(4-1)xy+(4)(-1)$$
$$=(xy+4)(xy-1).$$

例 4　分解 $3(a+b)^2-3(a+b)-36$ 的因式。

這裏各項有公因數 3，先提出後。得：

$$(a+b)^2-(a+b)-12.$$

這是 $a+b$ 的二次三項式，常數項是負的，把 -12 分解，可得 $(-12)\times(+1)$，$(12)\times(-1)$，$(6)\times(-2)$，$(-6)\times(2)$，$(+4)\times(-3)$，$(-4)\times(+3)$ 等等。能使它們的和等于 -1 的只有最後一組，即 $(-4)\times(+3)$.

$$\therefore \text{原式}=3[(a+b)^2-(a+b)-12]$$
$$=3[(a+b)^2+(3-4)(a+b)+(3)\times(-4)]$$
$$=3[(a+b)+3][(a+b)-4]$$
$$=3(a+b+3)(a+b-4).$$

〔五〕利用二項式的除法公式，凡二項式a^n+b^n或a^n-b^n，當n是奇數時，則a^n+b^n可分解出$a+b$的因式；a^n-b^n可分解出$a-b$的因式。但當n是偶數時，a^n+b^n不能分解，而a^n-b^n可分解出$a+b$與$a-b$這二個因式。

例1 $8a^3+x^6=(2a)^3+(x^2)^3$

$=(2a+x^2)[(2a)^2-2ax^2+(x^2)^2]$

$=(2a+x^2)(4a^2-2ax^2+x^4)$.

例2 $32x^5-1=(2x)^5-1^5$

$=(2x-1)[(2x)^4+(2x)^3\cdot1+(2x)^2\cdot1^2+2x\cdot1^3+1^4]$

$=(2x-1)(16x^4+8x^3+4x^2+2x+1)$.

例3 $m^4-n^4=(m^2+n^2)(m^2-n^2)$

$=(m^2+n^2)(m+n)(m-n)$.

練　習　題

分解下列各多項式的因式：

136．x^2+2x-8　　137．y^2-y-56

138．$3ax^2+45ax+168a$　　139．$p^2-14p+40$

140．$1-13y-68y^2$　　141．$(x+y)^2-5(x+y)-14$

142．$27-8a^3$　　143．$5m^3x+5n^3x$

144．$32x^5-y^5$　　145．$64a^6-1$

146．用因式分解計算下式的值：

(1) 78^2-52^2　　(2) 75^2-65^2

147．設n是整數，證明$(2n+1)^2-(2n-1)^2$能被8整除。

(3) 知道一多項式各項已經沒有公因式，又不能直接應

用乘法公式來分解時，可以用分組的方法來分解。方法有兩種：

〔一〕把已知多項式分成若干組（每組的項數要相同），用第一、二法把每組都分解爲因式，並要求各組經過因式分解以後，會出現共同的因式，然後把公因式提出。

例 1　分解 $a^2+ab-ac-bc$ 的因式。

這多項式是沒有公因式的，也不能直接應用乘法公式來分解。于是就採用分組法，先把它分成兩組，每組二項，分組要怎樣分法沒有一定，我們可以先試分幾次，看它哪一次出現共同的因式。倘使分成 $(a^2-bc)+(ab-ac)$，不能出現公因式，所以沒有用。倘使分成 $(a^2+ab)-(ac+bc)$，那末兩組中出現了公因式$(a+b)$。提出後得：

$$a(a+b)-c(a+b)$$

$$\therefore \text{原式}=(a+b)(a-c).$$

例 2　分解 $2ax+4x^3-ay-y^2$ 的因式。

倘使分成 $(2ax+4x^2)-(ay+y^2)=2x(a+2x)-y(a+y)$，沒有出現公因式。倘使分成 $(2ax-ay)+(4x^2-y^2)=a(2x-y)+(2x+y)(2x-y)$這就出現公因式$(2x-y)$.

$$\therefore \text{原式}=(2x-y)(a+2x+y).$$

〔二〕每組的項數不一定要求相同，只要分組之後，可以利用乘法公式來分解就好。這種分組法，是先把已知多項式中能夠組成完全平方的項結成一組，然後其餘各項再來分組（假使有組可分的話），試試看是否可以利用乘法公式來分解。

例 1　分解 $9a^4-4a^2+4ab-b^2$ 的因式。

這多項式用前面講的第一種辦法分組是分解不了的。第一項是$3a^2$的平方，第二項是 $2a$ 的平方，第四項是 b 的平方，第三項$=2\cdot(2a)\cdot b$，可見把後面三項結成一組，可以組成一個完

全平方。已經知道第一項也是平方，所以這樣分組以後，就可以利用二數平方差的公式來分解了。

$$\begin{aligned}9a^4-4a^2+4ab-b^2&=9a^4-(4a^2-4ab+b^2)\\&=(3a^2)^2-(2a-b)^2\\&=(3a^2+2a-b)(3a^2-2a+b).\end{aligned}$$

例2 分解 $x^2+2xy+y^2+3x+3y-10$ 的因式。

容易看出這多項式的前面三項是$x+y$的平方，而第四、第五項提出公因式3以後又得$x+y$，最後一項是常數，于是就把它分成這樣三組。這樣分組之後，才有可能利用公式來分解。試試看：

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(x^2+2xy+y^2)+(3x+3y)-10\\&=(x+y)^2+3(x+y)-10\end{aligned}$$

$\because 5\times(-2)=-10,\quad 5-2=3,$

$\therefore$ 原式 $=(x+y+5)(x+y-2).$

練　習　題

分解下列各式的因式：

148. $x^2-xy+7x-7y$.　　149. $x^3-5x^2-2x+10$.

150. $10a^2-10ax-14a+14x$.

151. $15ab+10bx+9a^2-4x^2$.

152. $m^4-7am^2-9n^2-21an$.

153. $3a^2-3a^2y^2+6a^2xy-3a^2x^2$.

154. $5axy-5bxy+2ax^2-2bx^2+10cxy+4cx^2$.

155. $-4x^2+4xy+p^2-2p-y^2+1$

156. $a^2+2ab+b^2-7a-7b-8$

157. $4x^2+9y^2-12xy+12a^2-24ay+16ax$

(4) 由于兩多項式相乘的時候，時常會碰到同類項合併或

相消的情况。因此，有的時候多項式分解因式就需要把已經合併的項拆開，已經相消的項添補上去。但合併的項怎樣拆開？相消的項究竟是怎樣的項？都是很難看出來的。例如第22節乘法公式(1),(2),(3),(4),(5),(6)都有合併的同類項。乘法公式(3)與二項式除法公式都有消去的項。因此凡是能用公式分解的必須利用公式去分解，不要用拆項或添項的方法。例如a^3-b^3，我們就可以直接用公式。倘使用添項法，就得寫做：

$$a^3-b^3=a^3-a^2\cdot b+a^2b-b^3=a^2(a-b)+b(a^2-b^2)$$
$$=(a-b)[a^2+b(a+b)]=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

這裏爲什麼要添上$-a^2b+a^2b$二項，是很難想出來的。所以第四種因式分解法，只有當前三種方法無法分解時才來採用。怎樣採用？我們舉例說明如下：

例1　分解$2x^3+3x^2+7x+3$的因式。

從多項式乘法中，我們知道這多項式的最高項$2x^3$，是它的因式的最高項乘積，最低項是因式最低項的乘積。因此經過合併的項只有中間的二項，所以要拆開的項也只限于中間的，最高項與最低項不動。（爲了方便起見，在分解前，我們應該把已知多項式排成某一字母的降冪式或昇冪式。）

$3x^2$拆成二項的代數和的方法是很多的。例如拆成$2x^2+x^2$，x^2+2x^2，$5x^2-2x^2$，$4x^2-x^2$，$-2x^2+5x^2$，……但這裏有個要求，要求它拆開以後能用分組法來分解因式。

例如把$3x^2$拆成$2x^2+x^2$的話，那末$7x$就有一定的拆法：

$$\text{原式}=\underbrace{2x^3+2x^2}_{2x^2(x+1)}+\underbrace{x^2+?x}_{x(x+1)}+\underbrace{+?x}_{7x}+3$$

這二因式要相同

所以$7x$只能拆成$x+6x$，

原式$=2x^3+2x^2+x^2+x+6x+3$。但這樣拆的結果，它

的最後一項$3(2x+1)$，不含公因式$x+1$，因此是此路不通，重新再來。把 $3x^2$拆成x^2+2x^2去試試看。得：

$$\text{原式}=\underbrace{2x^3+x^2}_{x^2(2x+1)}+\underbrace{2x^2+x}_{x(2x+1)}+\underbrace{6x+3}_{3(2x+1)}$$
$$=(2x+1)(x^2+x+3).$$

例2　分解a^3+a^2-2的因式。

這多項式是a的三次式，但缺少a的一次項，足見a的一次項是被消去了的，所以應當添補進去。再把第二項a^2拆開成$-a^2+2a^2$去試試看。得：

$$\text{原式}=\underbrace{a^3-a^2}_{a^2(a-1)}+\underbrace{2a^2-2a}_{2a(a-1)}+\underbrace{2a-2}_{2(a-1)}$$
$$=(a-1)(a^2+2a+2)$$

例3　分解$x^4+x^3+6x^2+5x+5$的因式。

這多項式前面二項的係數是1，後面二項的係數是5，而中間項的係數恰好是$1+5$。所以把中間項$6x^2$拆成x^2+5x^2去試試看。得：

$$\text{原式}=(x^4+x^3+x^2)+5x^2+5x+5$$
$$=x^2(x^2+x+1)+5(x^2+x+1)$$
$$=(x^2+x+1)(x^2+5).$$

例4　分解$a^4+4a^2b^2+16b^4$的因式。

這多項式的第一項是a^2的平方，第三項是$4b^2$的平方，第二項是$4a^2b^2=a^2\cdot 4b^2$，可是沒有2倍。倘使第二項再乘以2，那末這多項式就是一個完全平方式。因此我們就添上

$4a^2b^2-4a^2b^2$這二項去試試看。得：

$$\text{原式}=a^4+8a^2b^2+16b^4-4a^2b^2$$
$$=(a^2+4b^2)^2-(2ab)^2$$
$$=(a^2+4b^2+2ab)(a^2+4b^2-2ab).$$

這方法的主要關鍵是配成完全平方，還要看添上去的項（這裏是 $4a^2b^2$ ）是不是平方。倘使是平方，才能夠根據二數平方差的公式，繼續分解，否則是不可能的。

練 習 題

分解下列各式的因式：

158. $x^3+8x^2y+17xy^2+10y^3$.

159. x^3-3x+2.　　160. $3x^3+2x^2-2x-1$.

161. $2x^4+2x^3+5x^2+3x+3$.

162. $81x^4+9x^2+1$.　　163. x^3+4x^2+x-6.

164. $a^2b^2+4c^2d^2-a^2c^2-4b^2d^2+8abcd$.

§27. **最高公因式與最低公倍式**：在算術裏已經學過怎樣求兩個或兩個以上的整數的最大公約數與最小公倍數的方法。這方法主要是依靠分解整數爲質因數的連乘積。

例如　求 216,64 的最大公約數與最小公倍數。

$216=2\times2\times2\times3\times3\times3=2^3\times3^3$

$64=2\times2\times2\times2\times2\times2=2^6$

$\therefore$ 216,64 的最大公約數 $=2\times2\times2=2^3=8$.

216,64 最小公倍數 $=2^6\times3^3=1728$.

在算術裏還講過，若兩已知數是互質數，那末它們的最大公約數是 1；最小公倍數是這兩數的乘積。

例如　27與 8 的最大公約數 $=1$.

27與 8 的最小公倍數 $=27\times8=216$.

若兩已知數的大數是小數的倍數時，那末它們的最大公約數就是小數，而最小公倍數就是大數。

例如　56與 8 的最大公約數 $=8$.

56與 8 的最小公倍數 $=56$.

代數裏的最高公因式、最低公倍式與算術裏的最大公約數、最小公倍數，有類似的意義。它的求法也是依靠因式分解的。現在多項式的因式分解已經會了，那末求兩個多項式或兩個以上多項式的最高公因式與最低公倍式的問題就比較簡單。舉例說明如下：

例1　求單項式 $8ax^2y^2$ 與 $10bxy^3$ 的最高公因式與最低公倍式。

$\because 8ax^2y^2=2^3\cdot ax^2y^2$; $10bxy^3=2\times 5bxy^3$.

直接觀察，可得最高公因式 $=2xy^2$。就是把共同的因式都拿來，因式的乘方指數取它最小的。

最低公倍式 $=2^3\times 5abx^2y^3$。就是把不同的所有因式都拿來，每一因式的指數取它最大的。

例2　求 $2x^2-4xy+2y^2$, $6x^2-6y^2$, $12x-12y$ 的最高公因式與最低公倍式。

$\because 2x^2-4xy+2y^2=2(x-y)^2$;

$6x^2-6y^2=6(x-y)(x+y)$;

$12x-12y=12(x-y)$.

$\therefore$ 最高公因式 $=2(x-y)$.

最低公倍式 $=12(x-y)^2(x+y)$.

例3　求 x^2+y^2 與 x^2-y^2 的最高公因式與最低公倍式。

$\because x^2+y^2=x^2+y^2$;

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$.

$\therefore$ 最高公因式 $=1$.

最低公倍式 $=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$.

例4　求 $8x^3+y^3$ 與 $4x^2-2xy+y^2$ 的最高公因式與最低公倍式。

$\because 8x^3+y^3=(4x^2-2xy+y^2)(2x+y)$.

$\therefore$最高公因式$=4x^2-2xy+y^2$.

最低公倍式$=8x^3+y^3$.

練　習　題

求下列各式的最高公因式與最低公倍式：

165. $36x^3y^2z^4, 48x^2y^3z^5$.　166. $3a^2b, 6a(a+b)$.

167. $10m^2+20m+10$, $5m^2-5$.

168. $27x^3-y^3$, $18x^2-12xy+2y^2$, $18x^2-2y^2$.

169. x^2+x-2, x^2-x-6, x^2-4x+3.

170. x^4-1, x^3+x^2+x+1, x^3-x^2+x-1.

第六講　分式的四則運算

§28. **引言**：上面幾講我們已經把數概念擴充到有理數，這樣不僅能把實際存在的量的值表示出來，而且還能夠把量的對立關係表示出來。所以有理數的基本性質有二：(1)絕對值的大小；(2)符號的正負。同時我們還講了有理數的四則運算，使減法運算成爲一般的可能。此外我們還講了代數中的另一種對象即多項式。多項式與多項式可以相加、相減、相乘，所得的和、差、積都是多項式。但多項式除多項式不一定是多項式，只有除式是被除式的因式的特別情況時才得多項式。這裏存在着一個問題，多項式除不盡多項式時得出什麼呢？例如$\frac{a}{a-b}$，$\frac{a}{b}$，$\frac{x^2-x+1}{x+1}$等等都不是多項式。前面已經提到過這些代數式的名稱叫做分式。現在我們就來研究代數中的第二種對象——分式。

由于數概念已經擴大到有理數，而多項式又只是加、減、乘三種運算相結合而成的。所以，我們在研究多項式時，知道每個字母都可代表任何有理數。而且假定了字母所代表的數以後，就可以把多項式的值計算出來。

分式是用除法把兩個多項式結合而成的。我們知道除法是有限制的，它永遠不允許用零去當除數。這樣分式中字母所代表的數也就有了一定的限制。它不允許字母去代表那些凡是能使分母等于零的數。

例如分式$\frac{a}{a-b}$中，若$a=b=2$，$a=b=-3$，或$a=b=\frac{3}{2}$等

等都是不允許的。總的一句話，若 a, b 代表任何相等的數都是不允許的。分式 $\frac{a}{b}$ 中的 b 不允許代表零；分式 $\frac{x^2-x+1}{x+1}$ 中的 x 不允許代表 -1。

分式的這一性質是與多項式不同的。這在以後研究分式運算時，應特別注意。多項式(卽有理整式)的值是任何有理數，不一定是整數。分式的值也不一定是分數，可以是任何有理數。例如：

若 $a=0$，$b=3$，則 $\frac{a}{b}=\frac{0}{3}=0\div3=0$.

若 $a=12$，$b=-4$，則 $\frac{a}{b}=\frac{12}{-4}=12\div(-4)=-3$.

若 $a=3$，$b=\frac{9}{7}$，則 $\frac{a}{b}=\frac{3}{\frac{9}{7}}=3\div\frac{9}{7}=3\times\frac{7}{9}=\frac{7}{3}$.

§29. **分式的基本性質：** 在算術裏講過分數的基本性質是："分子分母同以不等于零的數相乘或相除，分數的值不變"。前面又講過，有理數除法的性質是："被除數與除數同以不等于零的數相乘或相除，商的值不變"。而分數就是分子除以分母。這說明分數的基本性質已經推廣到有理數來了。

現在代數中的分式就是兩個代數式相除的商式。而代數式是代表任何有理數的，因此根據有理數除法的性質，容易推知分式也具有這個性質。

分式的分子、分母同以不等于零的多項式（包括有理數）相乘或相除，分式的值不變。

例如分式 $\frac{a}{a-b}$ 的分子、分母，同乘以 $a+b$（這裏的 a, b 不允許代表兩個對立數），得分式 $\frac{a(a+b)}{a^2-b^2}$，那末

$$\frac{a}{a-b}=\frac{a(a+b)}{a^2-b^2}$$

設 $a=-\frac{1}{2}$，$b=3$.計算

$$\frac{a}{a-b}=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}-3}=-\frac{1}{2}\div\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{1}{7}.$$

$$\frac{a(a+b)}{a^2-b^2}=\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+3\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-3^2}=\frac{-\frac{1}{2}\left(+\frac{5}{2}\right)}{\frac{1}{4}-9}$$

$$=-\frac{5}{4}\div\left(-\frac{35}{4}\right)=\frac{1}{7}.$$

根據分式的性質可以推出下列五點：

(1) 把分式的分子、分母，化爲整係數的多項式。

例 1 $\frac{3a-\frac{7}{3}}{1-\frac{1}{6}a}$；用 6 乘分子、分母，得 $\frac{18a-14}{6-a}$.

例 2 $\frac{ax+b+\frac{c}{x}}{ax+\frac{1}{2}}$；用$2x$乘分子、分母，

得：$\frac{2ax^2+2bx+2c}{2ax^2+x}$.

例 3 $\frac{1+\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$；用$x^2$乘分子、分母，

得：$\frac{x^2+ax-b}{x^2-x}$.

(2) 改變分式的分子，分母的符號。

分子、分母同用 -1 去乘，分式的符號是不變的。

例如 $\frac{a}{b}=\frac{-a}{-b}$， $-\frac{a}{b}=-\frac{-a}{-b}$.

若只把分式的分子(或分母)變號，同時把分式本身也變號，所得分式的符號也不變。(根據除法的符號法則)

例如 $\frac{a}{b}=-\frac{-a}{b}=-\frac{a}{-b}$，或 $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$.

例如 $\frac{1-a}{1-b}=-\frac{a-1}{1-b}=-\frac{1-a}{b-1}=\frac{a-1}{b-1}$.

(3) 把已知多項式轉化爲以任何多項式爲分母的分式。

例如 $3x^2-2=\frac{3x^2-2}{1}=\frac{(3x^2-2)(ax+b)}{ax+b}$

$$=\frac{(3x^2-2)(c+d)}{c+d}.$$

(4) 把已知分式化到最簡。根據(1)，首先把分式的分子、分母化爲整係數的多項式。倘使分子、分母沒有公因式，那末這個分式就是最簡分式。倘使分子、分母有公因式，就以分子、分母的最高公因式去除分子與分母，使分式化爲最簡分式。這樣的手續與算術一樣，叫做約分。

例 1　化簡分式 $\frac{6x^2y^3}{15x^4y^4}$.

分子、分母的最高公因式是 $3x^2y^3$。以這去除分子分母，得：

$$\frac{6x^2y^3}{15x^4y^4}=\frac{6x^2y^3\div 3x^2y^3}{15x^4y^4\div 3x^2y^3}=\frac{2}{5x^2y}.$$

例 2　化簡分式 $\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}$.

首先把分子、分母分解因式，再約分，得：

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}=\frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)^2}=\frac{x-y}{x+y}.$$

(5) 把不同分母的分式，化成同分母的分式。這種手續與算術一樣，叫做通分。通分後的分母，叫做最小公分母。

例 1　把三個分式 $\frac{3}{4ab^3}$，$\frac{4}{6a^2b^2}$，$\frac{5}{12a^3b}$ 通分。

分母的最小公倍式 $=12a^3b^3$，這就是最小公分母。然後以各分母來除最小公分母，得

$$12a^3b^3\div 4ab^3=3a^2;$$

$$12a^3b^3\div 6a^2b^2=2ab;$$

$$12a^3b^3\div 12a^3b=b^2.$$

除得的商叫做輔助因式。把除得的商順次分別乘已知分式的分子、分母。即得：

$$\frac{3}{4ab^3}=\frac{3\times 3a^2}{4ab^3\times 3a^2}=\frac{9a^2}{12a^3b^3};$$

$$\frac{4}{6a^2b^2}=\frac{4\times 2ab}{6a^2b^2\times 2ab}=\frac{8ab}{12a^3b^3};$$

$$\frac{5}{12a^3b}=\frac{5\times b^2}{12a^3b\times b^2}=\frac{5b^2}{12a^3b^3}.$$

分母是多項式時，通分手續還是同例 1 一樣。

例 2　把分式 $\frac{x}{y-2}$，$\frac{z}{y^2+4y-12}$，$\frac{a}{y^2+6y}$ 通分。

最小公分母 $=y(y-2)(y+6)$。所以

$$\frac{x}{y-2}=\frac{x\cdot y(y+6)}{(y-2)\cdot y(y+6)}=\frac{xy^2+6xy}{y^3+4y^2-12y};$$

$$\frac{z}{y^2+4y-12}=\frac{z\cdot y}{(y^2+4y-12)\cdot y}=\frac{yz}{y^3+4y^2-12y};$$

$$\frac{a}{y^2+6y}=\frac{a(y-2)}{(y^2+6y)(y-2)}=\frac{ay-2a}{y^3+4y^2-12y}.$$

練　習　題

171．化下列分式的分子、分母爲整係數的多項式：

$$\frac{1\frac{5}{7}x}{3y};\quad \frac{4\frac{1}{4}}{3\frac{1}{4}(a+b)};\quad \frac{\frac{2}{3}-2\frac{1}{3}a}{\frac{5}{6}a-1};\quad \frac{ax-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}.$$

172．把下列分式的分母與分式本身都變號，再以數代入字母核驗其值是否不變：

$$\frac{2+a}{3-b};\quad \frac{4x^2-y^2}{y-2x};\quad \frac{3a+5b}{b-a}。$$

173．把下列多項式化爲以 $ax+b$ 做分母的分式：

$ax-b;\ a^2x^2-abx+b^2;\ cx+d.$

174．化簡下列分式：

$$\frac{216x^2y^2z^3}{1296xy^6z^3};\quad \frac{a^2-5a+6}{a^2-7a+10};\quad \frac{x^2-xy+y^2}{(x-y)(x^3+y^3)};$$

$$\frac{25-a^2}{a^2-11a+30};\quad \frac{9x^2-49y^2}{28xy^2-12x^2y};\quad \frac{ax^2-2ax-8a}{ax^2-ax-6a}.$$

175．把下列分式通分：

(1) $\frac{1}{3ax},\ \frac{1}{4bx^2},\ \frac{1}{5cx^3}.$

(2) $\frac{a}{x-a},\ \frac{x}{a-x},\ \frac{a^2}{x^2-a^2}.$

(3) $\frac{3}{a^2+3a+2},\ \frac{5}{a^2-2a-3}.$

(4) $a-x,\ a+x,\ \frac{a^2+x^2}{a+x}.$

(5) $\frac{2x}{b-x},\ \frac{b}{2b-2x},\ \frac{3x^2}{4(x^2-b^2)},\ \frac{5b^2}{6(b^2-x^2)}.$

§30. **分式的加法與減法：** 把數的運算性質（見第3節）(8) 與 (9) 等號的左邊和右邊調換位置，寫成下列形式：

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}=\frac{a+b+c}{m},$$

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m},$$

這就是分數加減法的定義。在算術裏，字母 a,b,c,m 只能代表正整數，可是在代數裏，字母可以代表任何有理數，那末當 a,b,c,m 代表有理數時，上面公式是不是仍舊正確呢？我們來驗證一下：

設 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{2}{3}$，$c=-\frac{1}{5}$，$m=-\frac{1}{4}$。

$$\text{第一式的左邊}=\frac{1}{2}\div\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{2}{3}\div\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{5}\right)\div\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$=-2-\frac{8}{3}+\frac{4}{5}=-\frac{58}{15}=-3\frac{13}{15};$$

$$\text{第一式的右邊}=\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)\div\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{29}{30}\div\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{58}{15}=-3\frac{13}{15}。$$

$$\text{第二式的左邊}=\left(\frac{1}{2}\right)\div\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{2}{3}\div\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$=-2-\left(-\frac{8}{3}\right)=-2+\frac{8}{3}=\frac{2}{3};$$

$$\text{第二式的右邊}=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)\div\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$=-\frac{1}{6}\div\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}。$$

這樣看來，倘若這些字母用別的有理數代入，等式兩邊的值也同樣是相等的。這就說明：上面的公式當字母代表任何有理數時（m 不能代表零），也都是正確的。所以上面的公式也適用于分式的加法與減法。用文字定義如下：

(1) 同分母的各分式相加或相減，它的和或差也是一個分式，這分式以原分母做分母，原分子的和或差做分子。

(2) 異分母的各分式相加或相減時，首先把已知分式通分成爲同分母的分式，然後照上法相加或相減。

例 1　求$\frac{a}{a+x}+\frac{x}{a-x}+\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$的和。

$$原式=\frac{a^2-ax}{a^2-x^2}+\frac{ax+x^2}{a^2-x^2}+\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$$

$$=\frac{a^2-ax+ax+x^2+a^2+x^2}{a^2-x^2}=\frac{2a^2+2x^2}{a^2-x^2}.$$

例 2　求$\frac{a+x}{a^2-ax}-\frac{a+2x}{a^2-x^2}$的差。

$$原式=\frac{a+x}{a(a-x)}-\frac{a+2x}{(a+x)(a-x)}$$

$$=\frac{(a+x)^2}{a(a-x)(a+x)}-\frac{a(a+2x)}{a(a+x)(a-x)}$$

$$=\frac{a^2+2ax+x^2-a^2-2ax}{a(a-x)(a+x)}$$

$$=\frac{x^2}{a^3-ax^2}.$$

§31. **分式的乘法**：算術中分數的乘法，是用下面的公式來下定義的。即

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

不過這裏的字母在代表正整數時（b,d 不能代表零），上

式是正確的。倘使 a,b,c,d 代表任何有理數時，上式是不是仍舊正確呢？我們來驗證一下：

$$設\ a=-\frac{2}{3},\ b=-\frac{7}{2},\ c=-\frac{1}{5},d=\frac{1}{2}.$$

$$則上式左邊=(-\frac{2}{3})\div(-\frac{7}{2})\times\left[(-\frac{1}{5})\div\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{4}{21}\times(-\frac{2}{5})=-\frac{8}{105}.$$

$$上式右邊=\left[(-\frac{2}{3})\times(-\frac{1}{5})\right]\div\left[(-\frac{7}{2})\times\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{2}{15}\div(-\frac{7}{4})=-\frac{8}{105}.$$

這樣看來，倘使用別的有理數去代入，等式兩邊的值還是相等的。這說明上面的公式當字母代表任何有理數時（b，d 不能代表零），也都是正確的。所以上面公式也適用于分式的乘法。用文字定義如下：

兩分式相乘的積也是一個分式，這分式的分子是原分式的分子的乘積，這分式的分母是原分式的分母的乘積。

例如　求 $\frac{x-y}{x^2+2xy+y^2}\cdot\frac{x+y}{x^2-2xy+y^2}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2}$ 的乘積。

$$原式=\frac{(x-y)(x+y)(x^2-y^2)}{(x^2+2xy+y^2)(x^2-2xy+y^2)x^2}$$

$$=\frac{(x-y)^2\cdot(x+y)^2}{(x+y)^2\cdot(x-y)^2\cdot x^2}=\frac{1}{x^2}.$$

由分式的乘法定義，可推得分式的平方與立方。

$$(\frac{a}{b})^2=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{aa}{bb}=\frac{a^2}{b^2}.$$

$$(\frac{a}{b})^3=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{aaa}{bbb}=\frac{a^3}{b^3}.$$

所以分式的平方，就是分子的平方做分子，分母的平方做分母。分式的立方，就是分子的立方做分子，分母的立方做分母。

§32. **分式的除法：** 除法是乘法的逆運算。

$$\because \frac{ad}{bc}\times\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b},$$

$$\therefore \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

卽分式除以分式，所得的商是個分式，是以被除式的分子乘除式的分母的乘積爲分子；以被除式的分母乘除式的分子的乘積爲分母。

和算術一樣，我們可以引進倒數這一概念，卽兩數的乘積等于1，則兩數互爲倒數。分式的除法，可以簡單的說是，分式除以分式等于被除式乘除式的倒數。

$$\because \frac{c}{d}\text{的倒數是}\frac{d}{c},$$

$$\therefore \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

若把多項式看做是以1爲分母的分式，那末所有多項式與多項式的運算法則，以及多項式與分式的運算法則，都可以包括在分式的運算法則之中。

例1 分式 $\dfrac{x^2-11x-26}{x^2-3x-18}$ 除以分式 $\dfrac{x^2-18x+65}{x^2-9x+18}$.

$$\frac{x^2-11x-26}{x^2-3x-18}\div\frac{x^2-18x+65}{x^2-9x+18}$$

$$=\frac{x^2-11x-26}{x^2-3x-18}\cdot\frac{x^2-9x+18}{x^2-18x+65}$$

$$=\frac{(x^2-11x-26)\cdot(x^2-9x+18)}{(x^2-3x-18)\cdot(x^2-18x+65)}$$

$$=\frac{(x-13)(x+2)(x-3)(x-6)}{(x-6)(x+3)(x-13)(x-5)}$$

$$=\frac{(x+2)(x-3)}{(x+3)(x-5)}=\frac{x^2-x-6}{x^2-2x-15}.$$

例 2　$3x^2y\div5xy=\frac{3x^2y}{1}\div\frac{5xy}{1}=\frac{3x^2y}{1}\cdot\frac{1}{5xy}$

$$=\frac{3x^2y}{5xy}=\frac{3x}{5}=\frac{3}{5}x.$$

例 3　$\frac{3m^2x}{4a^2b}\div3x=\frac{3m^2x}{4a^2b}\div\frac{3x}{1}$

$$=\frac{3m^2x}{4a^2b}\cdot\frac{1}{3x}$$

$$=\frac{3m^2x}{12a^2bx}=\frac{m^2}{4a^2b}.$$

例 4　求 $a^2+4ab+4b^2$ 乘以 $\frac{a}{a^2-4b^2}$ 的積.

$$(a^2+4ab+4b^2)\cdot\frac{a}{a^2-4b^2}$$

$$=\frac{a^2+4ab+4b^2}{1}\cdot\frac{a}{a^2-4b^2}$$

$$=\frac{(a+2b)^2\cdot a}{(a+2b)(a-2b)}=\frac{a^2+2ab}{a-2b}.$$

把多項式與分式合起來，可叫做有理式。對有理式來講，加法、減法、乘法、除法都是可以使用的。所以多項式發展到有理式以後，除法的限制就沒有了。下面我們舉例說明有理式的四則混合運算。在四則混合運算中，主要是注意運算順序，至于加、減、乘、除的法則是完全一樣的，不過運算過程比較繁些，但它很可以培養我們的熟練技巧。

例 1　運算 $\frac{(b+c)^2+2(b^2-c^2)+(b-c)^2}{(b^4-2b^2c^2+c^4)\left(\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{2}{b^2-c^2}+\frac{1}{(b+c)^2}\right)}$.

這式子中的小括弧不是指示運算先後的，而是指括弧中代表一個數。運算順序應當是：(1) 方括弧內相加；(2) 每個多項式分解因式；(3) 把除法轉化爲乘法；(4) 約去公因式。爲了簡便，有的步驟可以同時進行，有的步驟有時還可以省略。

$$原式=\frac{(b+c)^2+2(b^2-c^2)+(b-c)^2}{(b^4-2b^2c^2+c^4)\cdot\dfrac{(b+c)^2+2(b^2-c^2)+(b-c)^2}{(b-c)^2\cdot(b+c)^2}}$$

$$=\frac{[(b+c)+(b-c)]^2}{(b^2-c^2)^2\cdot\dfrac{[(b+c)+(b-c)]^2}{(b-c)^2(b+c)^2}}$$

$$=\frac{[(b+c)+(b-c)]^2\cdot(b-c)^2\cdot(b+c)^2}{(b-c)^2\cdot(b+c)^2[(b+c)+(b-c)]^2}=1.$$

例2 $\dfrac{a^2-1}{n^2+n}\cdot\left(1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{n}}\right)\cdot\dfrac{1+n-n^3-n^4}{1-a^2}$

$$=\frac{a^2-1}{n^2+n}\cdot\left(1-\frac{n}{n-1}\right)\cdot\frac{(1+n)-n^3(1+n)}{1-a^2}$$

$$=\frac{a^2-1}{n^2+n}\cdot\frac{-1}{n-1}\cdot\frac{(1+n)(1-n^3)}{1-a^2}$$

$$=\frac{-(1-a^2)\cdot(1+n)(1-n)(1+n+n^2)}{n(n+1)(1-n)(1-a^2)}$$

$$=\frac{-(1+n+n^2)}{n}=-\frac{1+n+n^2}{n}.$$

練習題

176. $\dfrac{2x+5y}{x^2-y^2}+\dfrac{5x-2x}{x^2-y^2}+\dfrac{4x}{y^2-x^2}$.

177. $\dfrac{1}{x^2-7x+12}-\dfrac{2}{x^2-6x+8}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}$

178. $\dfrac{x^2+2x}{x^2-9}\times\dfrac{x^2-3x}{x^2-4}\div\dfrac{x^2}{x-2}$.

179. $\dfrac{x^2-(y+z)^2}{x^2+y^2}\div(x-y-z)$.

180. $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-5x+4}\times\dfrac{x^2-9x+20}{x^2-10x+21}\div\dfrac{x^2-5x}{x^2-7x}$.

181. $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\right)\div\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-2\right)$.

182. $\left(1+\dfrac{x+2}{x^2-x-2}\right)\div\dfrac{x}{x-2}$.

183. $\left[\dfrac{a-b}{ab}\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\right]\div\left[\dfrac{a^2+b^2}{ab}\cdot\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\right]$.

184. $\dfrac{2x^2(x+y)}{x^2+y^2}\times\dfrac{x^2-y^2}{3xy}\div\left(1+\dfrac{3xy}{x^2-xy+y^2}\right)$.

185. $\left(m-\dfrac{m\cdot n-n^2}{m+n}\right)\cdot\left(m-\dfrac{mn^2-n^3}{m^2-n^2}\right)$

$\div\left(1-\dfrac{mn-n^2}{m^2}\right)$.

186. $\dfrac{x}{x-\dfrac{x+2}{x+2-\dfrac{x+1}{x}}}$.

187. $\dfrac{9x^2-64}{x-1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{4+x}}}$.

第七講　比例與比例關係的量

§33. **成比例關係的量：** 爲了便于弄明白比例關係這個概念，我們舉一個例子來說明一下。

張蘇英家裏參加了農業生產合作社以後收入大大增加。他們决定今年全家八人除母親外每人做一套新衣服，請裁縫估計了尺寸，又到供銷合作社去問明了每尺布的價錢是6角；張蘇英就把每個人所需的布的尺寸和錢數列成下面一張表：

	母親	小妹妹	小弟弟	大弟弟	張蘇英	姐姐	哥哥	父親
布的尺數	0	3 尺	4 尺	8 尺	9 尺	11尺	15尺	17尺
人民幣（以元爲單位）	0	1.8	2.4	4.8	5.4	6.6	9.0	10.2

張蘇英看了上面這張表，她有兩種感想：(1) 布的尺數越多，錢數也越多。(2) 布的價錢總是尺數的0.6倍。例如 $1.8=3\times0.6$，$2.4=4\times0.6$，……。于是她想，倘使以x代表一套衣服所需的布的尺數，y代表一套衣服的布價，這樣就得出一個計算價錢的公式：

$$y=0.6x.$$

張蘇英又依照算術裏學過的方法，根據上面的表繪了一張統計圖。（見圖13）。這張圖裏，她是以2毫米代表1尺，5毫米代表1元的。她從這張圖裏看出，表示所有各對對應數(0,0)(3,1.8)(4,2.4)………的一些點，都在一條直綫上。

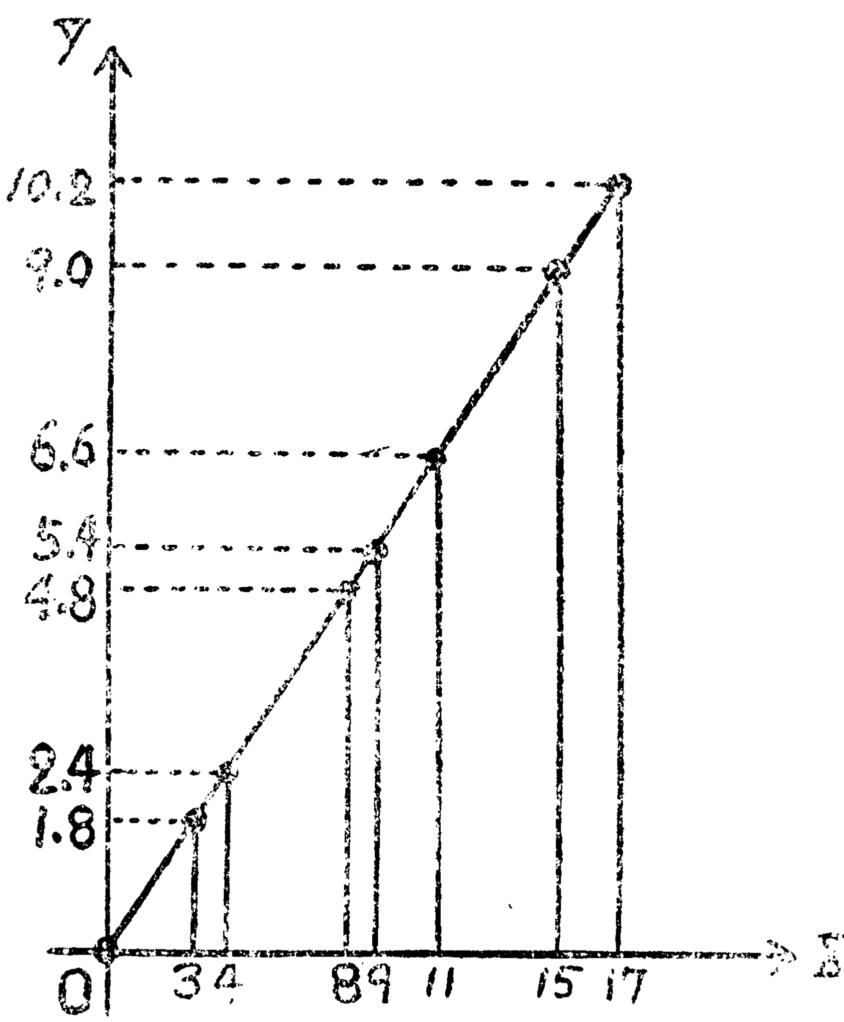

圖 13.

張蘇英還把她家裏從解放以來每年收入的稻穀數紀錄起來，並且還假定解放第一年的收入數爲 100，算出每年收入數的百分率，列成一張表：

解放後年份	第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年	第 6 年	第 7 年
收入稻穀數（單位是斤）	2800	3200	3360	3600	4400	4960	6000
百分率	100	114.3	120.0	128.6	157.1	177.1	214.3

張蘇英看了這張表也有兩種感想：(1) 稻穀收入數是逐年增加了。(2) 她不能像上面那張表一樣，從年數中算出稻穀的收入數來。倘使年數是 x，稻穀收入數是 y，那末她還是找不出一個公式，表示 y 與 x 間的關係。

張蘇英還根據算出來的百分率繪了一張統計圖（見圖14）。她在這張圖裏用 1 厘米代表 1 年，用 3 厘米代表 100。她看出這張圖裏，把各點連接起來不會成直綫。

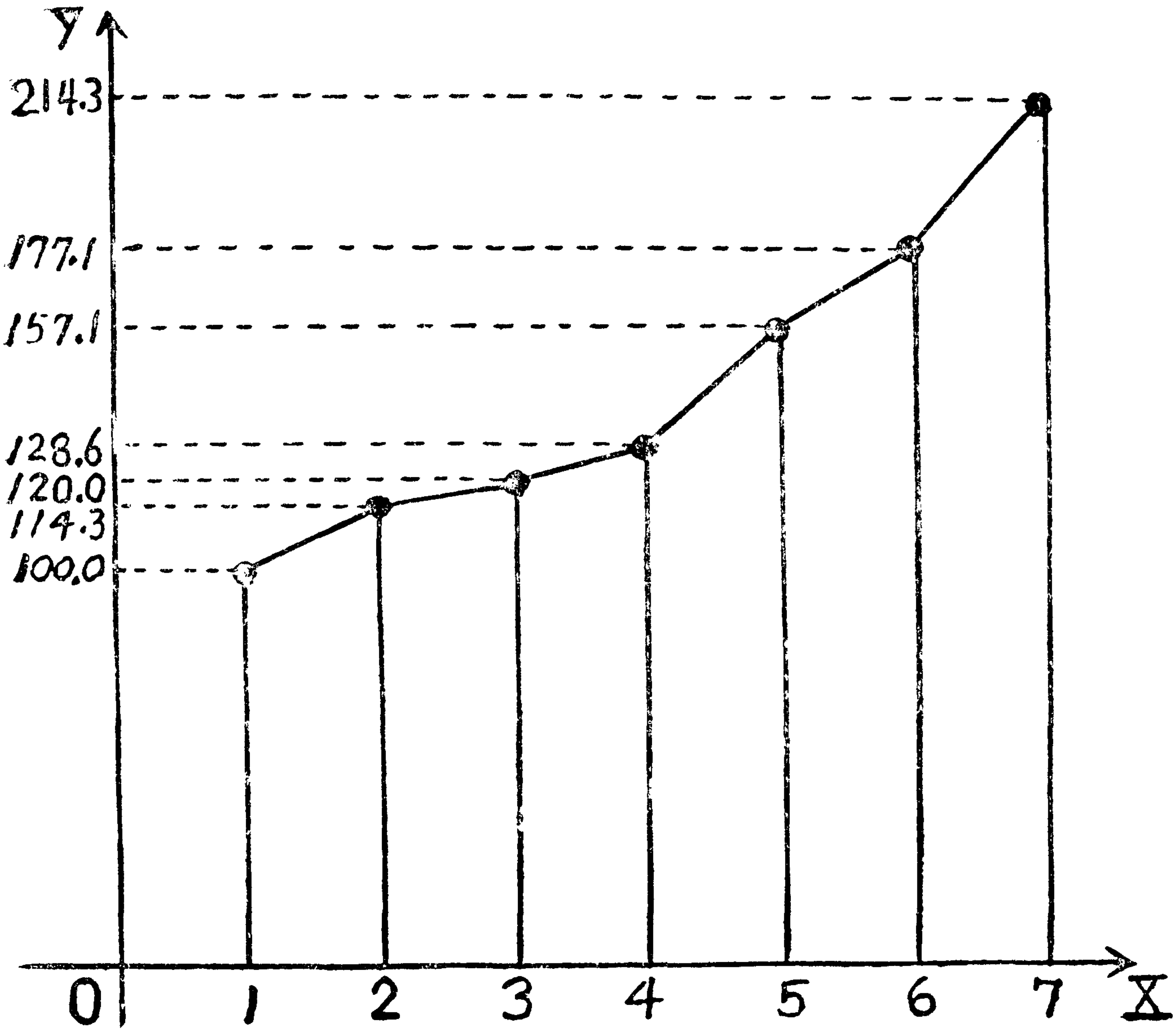

圖 14.

我們把張蘇英所紀錄的兩種表再研究一下。爲什麼張蘇英會看出"布的尺數越多，錢數也越多""稻穀收入數是逐年增加"呢？因爲她已經把家裏每個人做新衣服所需布的尺數比較了一下，把每套衣服的價錢比較了一下，把每年稻穀的收入數比較了一下，比較之後，她才有這樣的看法。什麼叫比較呢？我們曉得，普通的所謂比較有以下兩種情況：

(1) 哥哥所需布的尺數，比（應該說'較'更妥當）妹妹所需布的尺數多12尺（卽15尺－3 尺），這是從相減的方法得出來的。

(2) 哥哥所需布的尺數，比妹妹所需布的尺數是增大 5 倍（卽15尺÷3尺＝5），這是用相除的方法得出來的。

現在我們只硏究第二種比較法，來確定一下比的概念。兩

個數相除就叫做兩個數的比。例如 15÷3 就叫做是15與3的比，它用15:3來表示，讀做15比3。有時也寫做和分數一樣的形式，即 $\frac{15}{3}$ ，也要讀做15比3。除出來的商，叫做比值。例如15：3 的比值是5。常常有這樣的情況：兩個比是不同的，可是兩個比的比值是相同的。上表中哥哥衣服的布價與妹妹衣服的布價的比是 9.0:1.8，它的比值也是5。這時候我們可以把比值相同的兩個比用等號連起來，寫做：

15:3＝9.0:1.8. 這式子就叫做比例。

在第一張表裏，任何兩個人的布的尺數與錢數都可寫成比例：

9:4＝ 5.4:2.4

17:8＝10.2:4.8

…………………

所以在第一張表裏，可以看出，布的尺數增大幾倍，那末布的價錢也增大同樣倍。

例如父親所需的布的尺數（17尺），比妹妹所需的布的尺數（3尺）增大 $5\frac{2}{3}$ 倍。那末父親所需的布的價錢(10.2元)，比妹妹所需的布的價錢(1.8)也增大 $5\frac{2}{3}$ 倍。從第一張表裏，得出結論：倘使布每尺價是6角，那末布的尺數增大任何倍，布的價錢也增大同樣倍。這樣說法比張蘇英“布的尺數越多，錢數也越多”的說法要精密得多。因此我們也可以這樣說，當布每尺價一定時，布的尺數與布的價錢間的關係叫做正比例關係。倘若設 x 代表布的尺數，y 代表布的價錢，那末這種正比例關係，也可用公式 $y=0.6x$ 來表示。

但布每尺價不一定是6角，也可能不是布而是綢，是毛織品，只要它的單價（假設爲 k ）一定，那末它的總價（假設爲

y ）也一定與物品的單位數（假設為 x ）成正比例關係。可以用下面的公式來表示：

$y=kx$ （這裏的 k 叫做比例常數）

成正比例關係的還可以是其他的數量。例如速度（假設為 v ）一定，距離（假設為 s ）與時間（假設為 t ）的關係是正比例關係。

$s=vt$ （這裏 v 與 k 相當，s 與 y 相當，t 與 x 相當）

凡是成正比例關係的數量，它的圖象的確是一條通過 0 點的直綫。

至于第二張表裏，稻穀收入數的比並不等于年數的比。例如 $3200:2800 \neq 2:1$，等等。所以我們說稻穀收入數與年數沒有正比例關係。因此它的圖象也不可能是通過 0 點的一條直綫。而且根據事實來說，顯然稻穀收入數增大，的確與年數沒有直接的關係。至于第二張統計圖，只是表現了張蘇英家裏解放以後稻穀收入數逐年增大的情況，並沒有表示稻穀收入數與年數間的相依關係。

客觀物質世界中所存在的數與數間的關係是非常複雜的。正比例關係不過是兩數間相依關係的最簡單的一種，下面我們再來研究第二種。

西興到曹娥兩地相距 120 里，火車，汽車，輪船都通，現在把各種交通工具的速度與所需時間列表如下：

交通工具種類	步行	航船	烏篷船	汽輪	自行車	汽車	火車
速度(里／小時)	10	15	20	30	40	60	80
時間（以小時為單位）	12	8	6	4	3	2	$1\frac{1}{2}$

從這張表裏，我們看到速度愈快所需時間愈少。例如汽輪速度比步行速度增大 3 倍，（$30:10=3$）；那末汽輪所需時間

比步行所需時間反而縮小3倍（$4:12=\frac{1}{3}$），也可以說增大$\frac{1}{3}$倍。這時候速度的比是時間倒數的比。

即 $30:10=\frac{1}{4}:\frac{1}{12}$（比值都是3）。

在算術裏$\frac{1}{4}:\frac{1}{12}$（即12:4）叫做 4:12 的反比。

這樣的關係，任何兩種交通工具的速度與時間中間都是存在的。例如 $80:15=\frac{1}{1\frac{1}{2}}:\frac{1}{8}$；$60:20=\frac{1}{2}:\frac{1}{6}$，等等。

所以距離一定，速度增大幾倍，那末所需時間反而縮小同樣倍。這時候我們說，距離一定，速度和時間成反比例關係。假設 x 代表時間，y 代表速度，那末反比例關係就可用公式 $xy=120$ 表示，而且也可以繪成圖象（見圖 15）來表示。在這圖象裏以5毫米代表1小時，以5毫米代表每小時 10 里的速度。這個圖象與正比例關係的圖象完全兩樣，它既不是直綫又不通過0點。

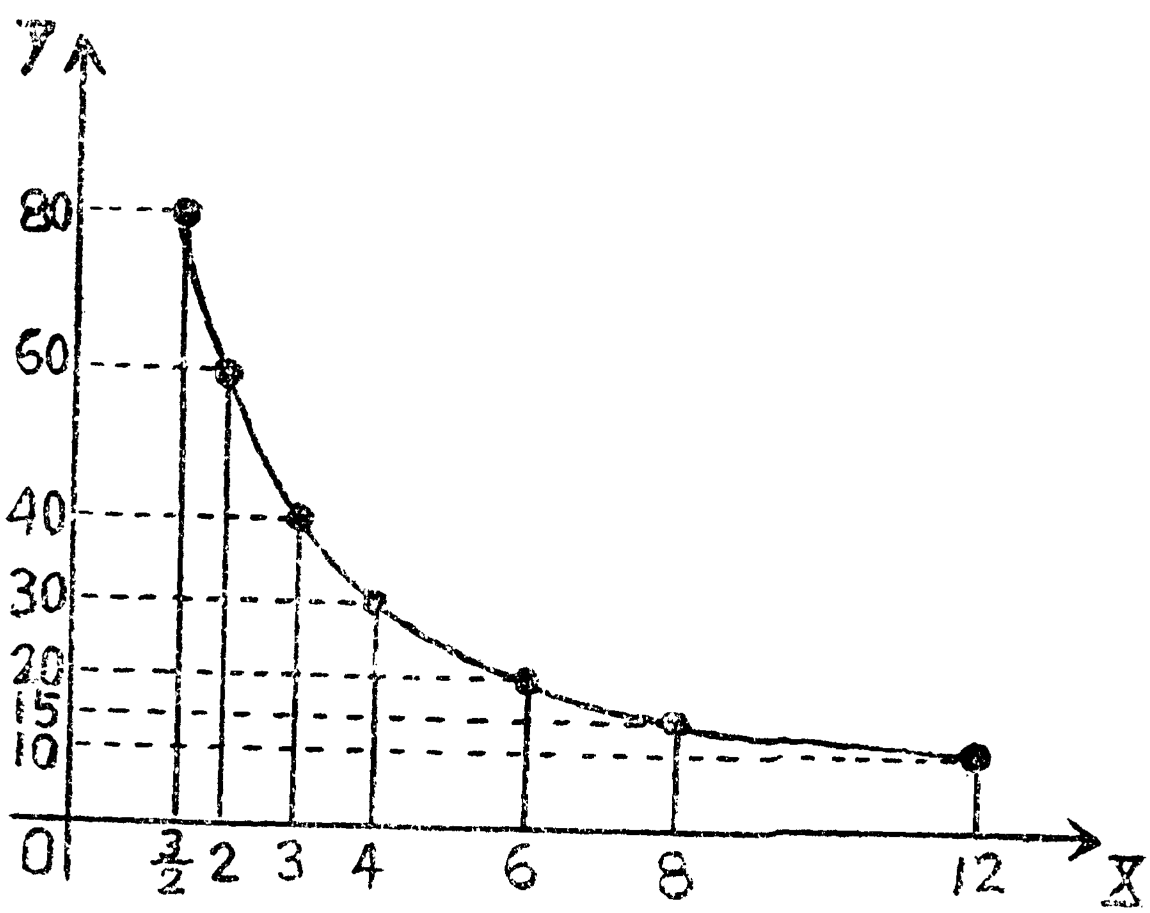

圖 15.

兩地中間還可以有另外的距離。假設距離是任何常數 k，那末速度和時間的反比例關係還可以用更一般的公式 $xy=k$ 來表示。

成反比例關係的實際事例還有很多。假如面積一定，矩形的長與寬也是反比例關係。拿一定的錢去購買貨物，那末貨物的單價與貨物數量間的關係也是反比例關係。所以任何反比例關係都可用公式　$xy=k$ 來表示。

客觀物質世界所存在的數與數間的表現關係是多方面的，以後還要繼續研究。研究數與數間的關係是數學中最主要的一個問題。要研究這類問題，學會列出紀錄表，繪好統計圖，都是很必要的。下面先談談正式繪圖象的方法。

§34. **圖象的作法**：在算術中由于數概念還沒有推廣到有理數，所以那時候所繪出的圖象也只限于正數的一部分。前面已經講過，直綫 XX' 上原點右側的點代表正數，左側的點代表負數。我們經過原點，再繪一條和直綫 XX' 垂直的直綫 YY'。如圖16，在 YY' 上側的點表示正數，下側的點表示負數。XX' 叫橫軸，YY' 叫縱軸，合起來叫坐標軸。點距縱軸的距離叫橫坐標，距橫軸的距離叫縱坐標。坐標軸把平面劃分做四個部分。右上角的一塊叫第一象限，左上角的一塊叫第二象限，左下角的一塊叫第三象限，右下角的一塊叫第四象限。例如在第一象限內，P 點的橫坐標是2，縱坐標是3，而 P 點的坐標記作 (2,3)。同樣在第二象限

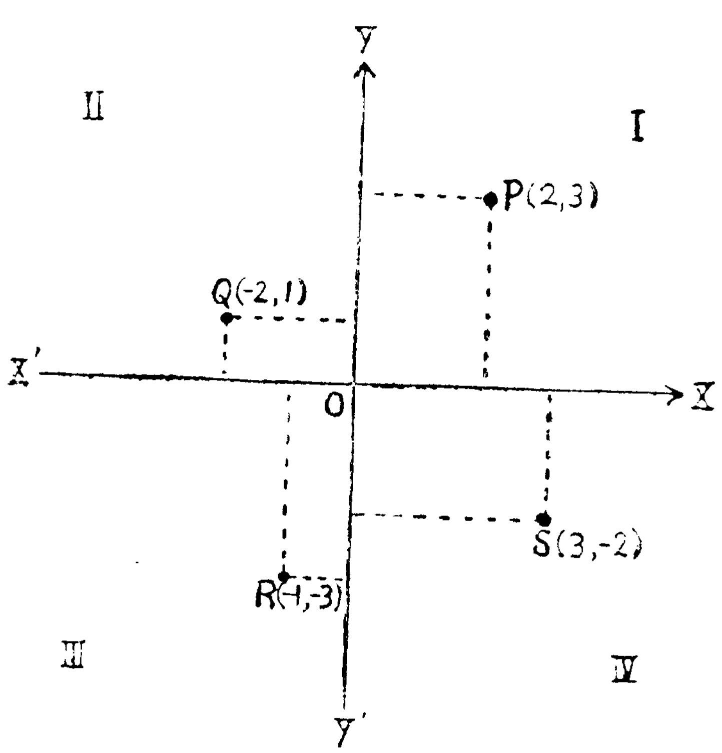

圖 16.

內 Q 點的坐標是 $(-2,1)$。第三象限內，R 點的坐標是 $(-1,-3)$。第四象限內，S 點的坐標是 $(3,-2)$。每一點的坐標是一對有理數 (x,y) 所組成的。習慣上，寫在前面的數 x 是代表橫坐標，後面的數 y 是代表縱坐標。這樣一來平面上的任何點，經過度量，總可以用一對數 (x,y) 去表示這點所在的位置。反過來，若有一對已知數(a,b)，在平面上總可以找到一點來表示這對數，只要取這點的橫坐標 $=a$，縱坐標 $=b$，就可以了。而且不同的點有不同的坐標，不同的一對數表示不同的點。要繪圖象，必須首先確立一副坐標軸。確立坐標軸含有三點意義：(1)作相互垂直的兩條直綫，並取交點爲原點。(2) 取水平的直綫爲橫軸，規定向右爲正，向左爲負；取另一直綫爲縱軸，規定向上爲正，向下爲負。(3)取二綫段分別作爲橫軸與縱軸上度量的單位綫段，這二個單位綫段可以相等也可以不相等。實際繪製圖象時可以購買小方格紙來繪，比較方便。現在舉例說明繪製過程如下：

例 1　火車自金華向北（正向）開行，半夜經過杭州站，速度每小時40公里（這時速度是 $+40$），半夜前時間爲負，半夜後時間爲正，火車在杭州南面時距離爲負，在杭州北面時距離爲正。把這火車在半夜前後的 6 小時內，每小時火車與杭州的距離紀錄如下表：

時間(以1小時爲單位)	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
距離(以1公里爲單位)	-240	-200	-160	-120	-80	-40	0	40	80	120	160	200	240

首先確定坐標軸如圖 17。取一小格作爲橫軸上的單位綫段，取一小格作爲縱軸上的 20 個單位綫段。

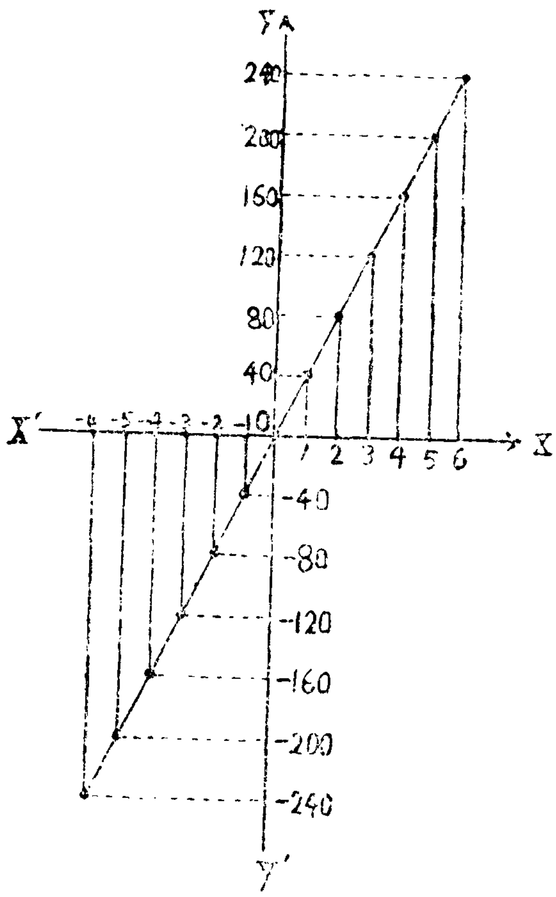

圖 17.

其次是決定表示各對數 $(-6,-240)$，$(-5,-200)$，……$(1,40)$，……的點的位置。最後把這些點連成細匀的直綫，圖象就算繪成。

例2　繪製方程式

(1) $y=\frac{1}{2}x$，(2) $y=3x$，(3) $y=-5x$ 的圖象。

先繪方程式(1)的圖象，給 x 以適當的值，算出 y 的對應值，列成下表：

x	……	-6	-4	-2	0	2	4	……
y	……	-3	-2	-1	0	1	2	……

把代表各對數的點繪下來，得直綫(1)。

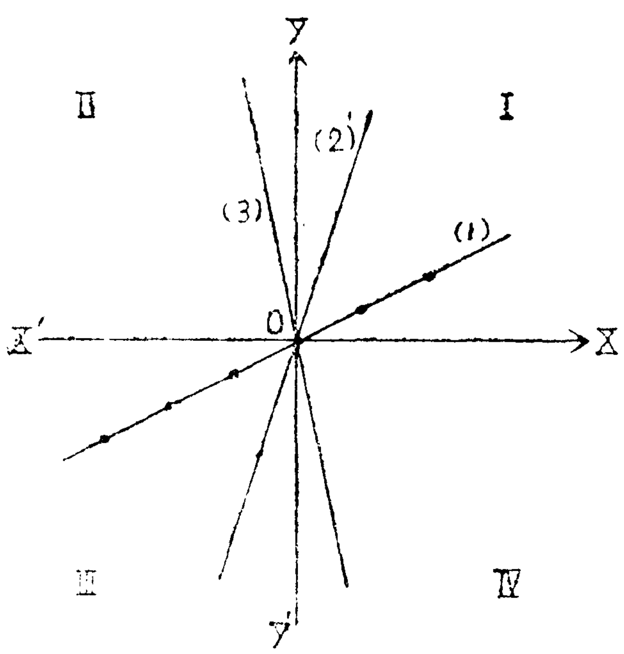

圖 18.

同樣繪出方程式 (2)的圖象是直綫 (2)。繪出方程式 (3)的圖象是直綫 (3)。从這些圖象中可以看出：

(1) 所有圖象都是經過原點的直綫。

(2) 它的係數是正數，圖象在第一及第三象限。若是負數，則圖象在第二及第四象限。

(3) x的係數的絕對值越小，直綫越平，即越與橫軸靠攏。 x 的係數的絕對值越大，直綫越

陡，即越與縱軸靠攏。

練　習　題

188. 在方格紙上確定一副坐標軸，把下列各點的位置定下來：

$$(3,1\frac{1}{2});\ (-\frac{1}{2},3);\ (-7.2,-2\frac{1}{3});(5,-2.5).$$

189. 在坐標平面上的各象限內任意各取一點，用公尺去量出它們的坐標，誤差小于1毫米。

190. 把你所在地的某個月每天的平均溫度紀錄下來，並繪成統計圖。

191. 直接度量在你周圍所看見的大小不等的圓形東西的直徑與周界（至少六七種），把它列成紀錄表，研究直徑與周界間有什麼關係，並繪出圖象。

192. 作方程式 $y=x$，$y=-x$ 的圖象，並觀察它具有什麼幾何性質？

193. 繪製 $y=3x+5$，$y=3x-5$ 的圖象，並與 $y=3x$ 的圖象作一比較研究。

194. 繪製 $y=-2x+3$ 的圖象，並與 $y=-2x$ 的圖象作一比較研究。

§35. **比例式的性質：** 由于實際中存在着成比例關係的量，當一個量取值 a 時，另一個量就取對應值 b；當一個量取值 c 時，另一個量取對應值 d；而且 $a:b$ 的比值等于 $c:d$ 的比值。于是我們得到一個比例式：

$$a:b=c:d,$$

現在專就這一個比例式來研究一下。首先根據比的定義，所謂 $a:b$，意思就是 a 除以 b。前項 a 和被除數相當，也和分

數的分子相當；後項 b 和除數相當，也和分數的分母相當。因此分數的基本性質對于比來講應當是適用的。即"用不等于零的一個數乘或除比的前後項，這個比的比值不變"。以式表示如下：

$$a:b=ma:mb=\frac{a}{m}:\frac{b}{m}\quad(\text{這裏 } m\neq 0)$$

為了便利研究比例式，上面比例式中的四個數或式的名稱作統一的規定：

a 叫比例第一項，b 叫第二項，c 叫第三項，d 叫第四項；a 和 d 叫比例外項；b 和 c 叫比例內項。倘若兩內項相同時，例如 $a:b=b:c$，相同的內項 b 就叫兩外項 a,c 的比例中項；而 c 叫做 a,b 的比例第三項。為簡便起見，比例式常寫做分數形式：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。這時候各數的名稱還是一樣。

〔性質一〕 比例式中，兩外項的積等于兩內項的積。

在 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 中，b, d 都不允許是零，所以兩邊以 bd 乘之，即得 $ad=bc$.

從比例式的這一性質，若四數中已知三數，就可決定第四數。例如已知

$$b=3,\ c=5,\ d=21$$

則 $\frac{a}{3}=\frac{5}{21}$，根據性質得 $21a=15$，$\therefore a=\frac{15}{21}=\frac{5}{7}$.

〔性質二〕 若二數 a,d 的積等于另兩數 b,c 的積，那末這四個數可成比例，以二數做外項（或內項），另二數做內項（或外項）。

因 $ad=bc$，兩邊除以 bd 即得 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.（a, d 是外項，b,c

是內項）。

因 $bc=ad$，若兩邊除以 ca，卽得 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$.（b、c 是外項，a、d 是內項）。

〔性質三〕 比例式中，若兩內項互換，或兩外項互換，或兩內項與兩外項互換，或兩種、三種同時換，結果還是成比例。

$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,(1)；$ad=bc$，卽 $ad=cb$，$\therefore \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$(2)

（兩內項互換）；

$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，$ad=bc$，卽 $da=bc$，$\therefore \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$(3)

（兩外項互換）；

$\because$ 連續互換兩次，可得 $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$(4)

（內項互換外項也互換）；

$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，$ad=bc$，$bc=ad$，$\therefore \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$(5)

（或 $\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$ (6) 或 $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$ (7) 或 $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ (8) ）

（兩外項與兩內項互換）。

若四個數或式成比例，那末它們可有以上八種形式。除此以外的形式就不成立。例如 $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ 但 $\frac{5}{3}\neq\frac{6}{10}$，卽 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 但 $\frac{b}{a}\neq\frac{c}{d}$.

任何比例式除了具有以上三種性質外，還可誘導出另外四個數的比例式：

(1) 比例式中，第一項與第二項的和比第二項(或第一項)，

等于第三項與第四項的和比第四項（或第三項）。

$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，兩邊加 1，通分得 $\frac{a+b}{b}=\frac{a+d}{d}$.

同理可得 $$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}.$$

(2) 比例式中，第一項與第二項的差比第二項（或第一項），等于第三項與第四項的差比第四項（或第三項）。

$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，兩邊減 1，通分得 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

同理可得 $$\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}.$$

(3) 比例式中，第一、二兩項的和比第一、二兩項的差，等於第三、四兩項的和比第三、四兩項的差。

$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，由 (1) 得 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$，

由 (2) 得 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

上面兩等式邊與邊相除化簡，得 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

§36. **比例的應用：** 在實際問題中，倘使知道量與量間的比例關係，而且有三個數是已知的，那末就可以應用比例性質，把未知的量算出來。有時也可利用比例性質和誘導比例去證明另外較複雜的比例式。

例 1 重 41.4 克的冰，體積是 46 立方糎，求重 18.9 克的冰的體積。

首先我們知道冰的體積與冰的重量是成正比例的。設重 18.9克的冰的體積爲 x，可得比例式：

$$41.4:18.9=46:x$$

$$41.4x=18.9\times 46,\ \therefore x=21.$$

答： 18.9克的冰的體積是21立方糎。

例2　第一年稻穀產量爲 2800 斤，第二年稻穀產量爲 3200 斤，求第二年產量對第一年產量的百分率。

百分率也是從比例式計算出來的。這裏就是假設第一年產量爲 100，那末第二年產量應當是100的幾倍。設第二年的百分率爲x，則得比例式：

$$2800:3200=100:x, \quad \therefore x=114.3$$

（第二位小數四捨五入）。

例3　已知$a:b=c:d$，證明$\frac{a^2-c^2}{ab-cd}=\frac{ab+cd}{b^2+d^2}$，這只要證明後面比例式中，等號兩邊的比值相等就好。

設$a:b=c:d=k$，則$a=bk$，$c=dk$，

$$則\frac{a^2-c^2}{ab-cd}=\frac{(bk)^2-(dk)^2}{b^2k-d^2k}=\frac{(b^2-d^2)k^2}{(b^2-d^2)k}=k,$$

$$\frac{ab+cd}{b^2+d^2}=\frac{b^2k+d^2k}{b^2+d^2}=\frac{(b^2+d^2)k}{b^2+d^2}=k,$$

$$\therefore \frac{a^2-c^3}{ab-cd}=\frac{ab+cd}{b^2+d^2}.$$

練　習　題

195. 某水管$2\frac{1}{4}$小時流出水38.4立方尺，倘用這個水管注水到容量是12.8立方尺的水槽裏，要多少時間可注滿？

196. 用長63厘米，寬40厘米的矩形木塊鋪地板，要460塊；若改用面積是0.01平方米的小木塊，需要多少？

197. 飛機用每小時540公里的速度，經3小時由甲地飛到乙地，回來時因氣候不好，每小時只能飛480公里，問要幾小時才飛回原地？

198．我國第一個五年計劃實現以後，主要工業品產量的增長如下表：

種類	鋼	發電量	原煤	發電機	電動機
1952年	135 萬噸	72億6千萬度	6,352.8 萬噸	746 台 (2.87萬瓩)	91,147台 (63.9萬瓩)
1957年	412 萬噸	159 億度	11,298.5萬噸	2,938 台 (22.7萬瓩)	135,515 台 (104.8 萬瓩)

種類	載重汽車	水泥	機製紙	棉布	糖
1952年	0	286 萬噸	37.2萬噸	11,163.4萬疋	24.9萬噸
1957年	4,000 輛	600 萬噸	65.5萬噸	16,372.1萬疋	68.6萬噸

假定 1952 年的產量爲 100，算出 1957 年每項產品增長的百分率。

199．已知$a:b=c:d$，證明下列各比例式：

(1) $2a+3b:2c+3d=3a-4b:3c-4d$;

(2) $a^2-b^2:c^2-d^2=b^2:d^2$.

200．已知$a:b=b:c$，證明

$$a^2+b^2:(a+c)b=(a+c)b:b^2+c^2.$$

§37．**複比例與連比例**：前面已經講過，兩個量y,x間成正比例，這關係可以用公式$y=kx$表示（k是常數）。兩個量y,z間成反比例的關係，可以用公式$y=\frac{k}{z}$表示。但是實際存在的量常常不止兩個，例如有三個量y,x,z，若y與x成正比例，y與z成反比例，那末同樣可以用公式

$y=k\cdot\frac{x}{z}$來表示（k還是比例常數）。

三個以上的量也可以同樣類推。現在拿算術中已經講過的問題來研究一下：

有5個同樣的煤汽爐，每天燒6小時，24天一共消耗120

升煤油；同樣的9個煤汽爐，每天燒8小時，216升煤油可以燒幾天？

這題中一共有四個量，設y代表天數，u代表每天燒的時間，v代表煤汽爐的個數，x代表煤油升數。

很顯然，倘使其他條件一樣，那末天數和時間成反比例；天數和煤汽爐個數也成反比例；天數和煤油升數成正比例。因此可得公式：

$$y=k\cdot\frac{x}{u\cdot v}.$$

以題中前部分的數代入，即$y=24$天，$x=120$升，$u=6$小時，$v=5$個煤汽爐，得：

$$24=k\cdot\frac{120}{6\times5}，得k=6.$$

再以題中後部分的數代入，得：

$$y=6\cdot\frac{216}{8\times9}=18.$$

答：9個煤汽爐，每天燒8小時，216升煤油可燒18天。

事實上常常會碰到兩個以上的比相等的情況，例如

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{I})$$

由(I)的前兩比，$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$，$\therefore a_1:a_2=b_1:b_2$，

由(I)的後兩比，$\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$，$\therefore a_2:a_3=b_2:b_3$.

這第一比例式的第二、第四項與第二比例式的第一、第三項完全相同。因此這兩比例式可以寫成一個：

$$a_1:a_2:a_3=b_1:b_2:b_3\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{II})$$

比例式(I)和(II)的意義完全相同。再推廣一下：

比例式(III)：$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_4}{b_4}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}$

（n 是自然數）

比例式(Ⅳ)：$a_1:a_2:a_3:a_4:\cdots\cdots a_n=b_1:b_1:b_3:b_4:\cdots\cdots:b_n$

比例式Ⅲ與比例式Ⅳ有相同意義。

設 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}=k,$

則 $a_1=b_1k,\ a_2=b_2k,\ a_3=b_3k,\cdots\cdots,a_n=b_n k$。

把這 n 個等式的兩邊相加，得

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n=(b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n)k,$$

則 $\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+a_n}=k=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$

這就是說：已知幾個比相等，那末所有前項的和與所有後項的和的比，也和原比相等。倘使用第二種形式來寫：

$$a_1:a_2:a_3:\cdots\cdots:a_n:(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n)$$
$$=b_1:b_2:b_3:\cdots\cdots b_n:(b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n).$$

若 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 代表幾個不等于零的數，用同樣方法可以證明：

$$\frac{m_1a_1+m_2a_2+m_3a_3+\cdots\cdots m_n a_n}{m_1b_1+m_2b_2+m_3b_3+\cdots\cdots m_n b_n}$$

$$=\frac{m_1a_1}{m_1b_1}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n},$$

以上的性質，在分配比例問題上有很大用處。

例1　設 $x:y=5:4,y:z=6:7$，求 $x:y:z$。

第一式中 y 的對應值是4，第二式中 y 的對應值是6。首先求4與6的最小公倍數爲12，然後變換上式。得

$x:y=5:4=15:12,$

$x:y=6:7=12:14,$

$\therefore x:y:z=15:12:14$。

例2　設 $x:y:z=a:b:c$，證明

$$\frac{(x+y+z)^2}{(a+b+c)^2}=\frac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca},$$

把已知比例式寫做下列形式，並命比值爲 k。

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k,$$

則　$x=ak$，$y=bk$，$z=ck$，

$$\therefore \frac{(x+y+z)^2}{(a+b+c)^2}=\frac{(ak+bk+ck)^2}{(a+b+c)^2}=k^2,$$

$$\frac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}=\frac{abk^2+bck^2+cak^2}{ab+bc+ca}=k^2,$$

$$\therefore \frac{(x+y+z)^2}{(a+b+c)^2}=\frac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}.$$

例3　將長 12.4 尺的繩截成三段，第一、二段長度的比是 3:5，第二、三段長度的比是 2:3；求各段繩的長。

設第一段爲 x_1，第二段爲 x_2，第三段爲 x_3，

則 $x_1:x_2=3:5$，　$x_2:x_3=2:3$

$\therefore\ x_1:x_2:x_3=6:10:15$，

即 $$\frac{x_1}{6}=\frac{x_2}{10}=\frac{x_3}{15}=\frac{x_1+x_2+x_3}{6+10+15}=\frac{12.4}{31},$$

$\therefore\ x_1=6\times\dfrac{12.4}{31}=2.4$；答：第一段繩長2.4尺。

$x_2=10\times\dfrac{12.4}{31}=4$；答：第二段繩長 4 尺。

$x_3=15\times\dfrac{12.4}{31}=6$；答：第三段繩長 6 尺。

例4　將 1510 分成三份，使它們的比與 $\frac{2}{3}$，0.7，$1\frac{1}{2}$ 成反比。

解：與 $\frac{2}{3}$，0.7，$1\frac{1}{2}$ 成反比，意卽與 $\frac{2}{3}$，0.7，$1\frac{1}{2}$ 的倒數成正比。

設三份爲 x_1, x_2, x_3，

則 $\dfrac{x_1}{\frac{3}{2}}=\dfrac{x_2}{\frac{10}{7}}=\dfrac{x_3}{\frac{2}{3}}$，各項乘以 42 ，得：

$$\frac{x_1}{63}=\frac{x_2}{60}=\frac{x_3}{28},$$

$$\therefore \frac{x_1}{63}=\frac{x_2}{60}=\frac{x_3}{28}=\frac{x_1+x_2+x_3}{63+60+28}=\frac{1510}{151}=10.$$

$\therefore x_1=630,\ x_2=600,\ x_3=280.$

練　習　題

201. 已知 $x-2y:2y+3z:2x-3z=1:5:3$，

求 $x:y:z$。

202. 已知 $y:z=2b:3c$; $x:z=3a:4c$，

求 $x:y:z$。

203. 已知 $x_1:x_2=2:3$; $x_2:x_3=4:5$;

$x_3:x_4=6:11$，求 $x_1:x_2:x_3:x_4$。

204. 設 $x:y:z=a:b:c$，

證明 $\dfrac{x^3}{a^2}+\dfrac{y^3}{b^2}+\dfrac{z^3}{c^2}=\dfrac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$。

205. 設 $a:b=b:c$，證明 $a:c=a^2:b^2$。

206. 有銅、錫、銻的合金，三種成分的比是 $\frac{1}{2}:1:1\frac{1}{2}$，要製這種合金 429 公斤，三種金屬各用多少?

207. 水中氫和氧重量的比爲 1:8; 312.4 公斤水含有氫氧各若干市斤。

208. 用二萬五千分之一的比例尺所繪的地圖，重新用一萬分之一的比例尺繪出；原地圖上長 12.5 厘米的鉄路在新圖上長多少?

209. 一本書共有 210 頁，每頁排 20 行，每行排 30 字；現在改成每頁多排 4 行，每行多排 5 字可減少多少頁？

210. 16張青銅板，每張尺寸爲 1500 毫米 × 600 毫米 × 2.5 毫米，每張的重是 0.306 噸；200 厘米 × 100 厘米 × 0.15 厘米的青銅板 5 張，共重多少？

第八講　一次方程式與一次聯立方程式

§38. **等式同它的性質**：等式我們已經講了很多。例如：

在算術裏：　$3\times(5-2)=9$；$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\times\frac{6}{2}=1\frac{4}{15}$；…

在有理數裏：$-(-3)=3$；$-3\frac{5}{7}+\left(-5\frac{1}{3}\right)=-9\frac{1}{21}$；…

在多項式裏：$3a+\frac{1}{2}a=3\frac{1}{2}a$；$a^3\cdot a^2=a^5$；

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；$(a^3+b^3)\div(a+b)=a^2-ab+b^2$；…

在因式分解裏：$(x^2-a^2)=(x+a)(x-a)$；

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$；

$m^4-n^4=(m^2+n^2)(m+n)(m-n)$；…

在分式裏：$\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$；

$-\frac{a}{b}=+\frac{-a}{b}$；$\frac{x^2-9}{x-3}=x+3$；…

在比例裏：$30:10=\frac{1}{4}:\frac{1}{12}$；$\frac{20}{28}=\frac{5}{7}$；…

凡兩個代數式（包括數、0、字母、單項式、分式、比等等）用一個等號連接起來，表示這兩代數式的值相等的一種形式，都叫做等式。等號的左面叫左邊，右面叫右邊。這裏必須引起注意，沒有等號的不是等式。例如 $3x-5$ 不是等式，只能叫代數式或二項式。等號有兩個以上的，不能看做一個等式，例如連比：$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$，這是兩個等式的合寫。明明知道兩邊的值不相等的，也不是等式。例如：$3\times(5-2)=13$ 這

不是等式，這是錯誤。應當用不等式 $3\times(5-2)<13$，或 $3\times(5-2)\neq13$，來表示。

凡正確的運算過程或代數式的變換過程的每一步驟，都是一個等式。所以運算過程，事實上是許多等式連續書寫的形式，每一步驟，必須考慮值是否相等，而相等不相等就看有沒有根據定律、定義、法則來進行運算，因此，這個等號(=)就不好隨便寫。

例如計算：3乘以5，再減去7，再把差除以4，把商和101相加，結果多少？

$$3\times5=15-7=8\div4=2+101=103.$$

這結果是不錯的。但除 $2+101=103$ 這個等式外，其餘的等式 $3\times5=15-7$；$15-7=8\div4$；$8\div4=2+101$；都是錯誤的。

正確的運算過程，應該先把題目中運算過程都寫成算式，然後根據定律進行運算。

$$
\begin{aligned}
&(1)\ (2)\ (3)\ (4) &&(3\times5-7)\div4+101 \\
&&&=(15-7)\div4+101 &&(\text{根據整數乘法}) \\
&&&=\ 8\div4+101 &&(\text{根據整數減法}) \\
&&&=\ 2+101 &&(\text{根據整數除法}) \\
&&&=\ 103. &&(\text{根據整數加法})
\end{aligned}
$$

這運算過程是四個等式連續組成的。

等式的兩邊倘若是代數式，而代數式的字母是代表任何有理數的，我們既然已經知道有理數經過加、減、乘（包括乘方）、除（包括比）以後還是有理數，所以代數式基本上是代表一個有理數。所謂等式，不過是表示兩個數相等的一種形式。這裏講的兩個數相等，並不是 $5=5$ 這樣簡單，它是集中反映出各種相等量的事實。例如(1)我的弟弟五歲，他的弟弟也是五歲；(2)我今天吃五碗飯，昨天也吃五碗飯；(3)左手有五個手指，右手也有五個手指；等等，這樣的事實是不勝枚舉的。

由于客觀事物中存在着兩個量相等的種種事實，所以代數裏才產生“等式”這一概念。現在再進一步從實際事例中來理解等式的性質。

倘使我和他的身體一樣高，那末他和我的身體也一樣高。

設我的身體是 a 尺高，他的身體是 b 尺高，上面這句話用式表示如下：

若 $\underline{a=b}$，那末 $\underline{b=a}$……（等式性質Ⅰ）

這式子說明兩個等數具有反逆性。

某男孩和桌子一樣高，桌子又和某女孩一樣高，那末某男孩與某女孩也一定一樣高。

設男孩高 a 尺，桌子高 b 尺，女孩高 c 尺，以式表示：

若 $\underline{a=b}$、$\underline{b=c}$，那末 $\underline{a=c}$……（等式性質Ⅱ）

這式子說明等數的傳遞性。這種性質看看很簡單，可是很多地方都在那裏應用它。例如：稱體重時，我是 112 磅，她也是 112 磅，于是說我的體重和她的一樣，這是要根據傳遞性才能說明的。

有甲乙兩穀倉，第一次放進去的穀數量是一樣的；第二次放進去的穀數量也是一樣的；那末這兩倉所藏穀的總數也應該是一樣的。而且兩次放進稻穀數量的差也是一樣的。

設第一次甲倉放進穀 a 斤，乙倉放進穀 b 斤；第二次甲倉放進穀 m 斤，乙倉放進穀 n 斤；上述語言以式表之如下：

若 $\underline{a=b}$、$\underline{m=n}$；那末

$\underline{a+m=b+n}$，

$\underline{a-m=b-n}$……（等式性質Ⅲ）

這式子說明等數與等數的和或差都是相等的。

有大小相等的地圖甲乙兩張，若都放大（或縮小）同樣倍，那末它們的大小還是相等的。

設甲圖原來大 a 平方尺，乙圖原來大 b 平方尺，甲圖放大（或縮小）m 倍，乙圖放大（或縮小）n 倍（這裏的 m,n 等于零是無意義的），上面的語言以式表示如下：

若$\underline{a=b}$，$\underline{m=n}$，那末

$\underline{am=bn}$，

$\underline{\dfrac{a}{m}=\dfrac{b}{n}}$．………（等式性質Ⅳ）

這式子說明，等數乘以或除以等數，其積或商還是相等。

這性質在 $m=n=-1$ 時，就得到等式的變號法則：

若$\underline{a=b}$，那末$\underline{-a=-b}$。

這法則也是容易理解的。兩個有理數相等的意義，是指它們的絕對值相等而符號相同。即 a 與 b 的符號必須要相同，否則不能相等。那末等式兩邊同時變號後，符號還是相同的，即 $-a$ 與 $-b$ 的符號也要相同，不過與原有的符號是相反了。

前面所列舉的等式，若是由數字組成的，那就表示它們的結果永遠相等。若是由數字與字母組成的，那末這些字母如以任何許可的數代入的話，等式兩邊的數值永遠是相等的。

例如 $\dfrac{x^2-9}{x-3}=x+3$ 這個等式中的 x 除去 3 以外（因爲 $x=3$，左邊無意義），以任何數代入，兩邊的數值是永遠相等的。

若$x=0$，則$\dfrac{-9}{-3}=3$；若 $x=5$，則$\dfrac{16}{2}=8$；

若$x=1$，則$\dfrac{-8}{-2}=4$；若 $x=-4$，則$\dfrac{7}{-7}=-1$；

………………………………

所有乘法、除法公式都屬于這類等式。我們把這類等式叫做$\underline{\text{恆等式}}$。現在再來研究第二類等式。

§39. **方程式**：在算術裏做過這樣的習題。

(1) 在靜水中，每小時甲船行 25 里，乙船行 20 里，甲船由下流上行，同時乙船由上流相距 450 里的地方下行；兩船相遇後 20 小時甲船到達乙船出發的地方，求水流的速度。

這樣的問題，用算術方法來解是比較困難的。現在我們用代數方法來解，就是設 x 去代表水流的速度，然後把題中另外的未知數用代數式表示出來。每小時甲船上行速度應該是 $(25-x)$ 里，乙船下行速度應該是 $(20+x)$ 里，因爲甲乙兩船同時出發相向而行。所以出發後到相遇的時間應該是

$$\frac{450}{(25-x)+(20+x)}=10\text{小時。}$$

乙船 10 小時下行路程 $=10(20+x)$ 里，

甲船 20 小時上行的路程 $=20(25-x)$ 里。但題目告訴我們，乙船下行的路程，甲船 20 小時就可到達。所以得等式：

$$10(20+x)=20(25-x)\cdots\cdots(\text{I})$$

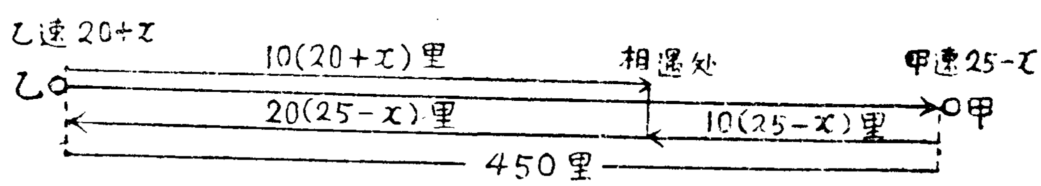

圖 19.

(2) 兩連續整數平方的差是 15，求這兩數。

設一數爲 x，則另一數爲 $x+1$。按題意得：

$$(x+1)^2-x^2=15.$$

左邊是兩多項式的差，把它化簡得等式：

$$2x+1=15.\cdots\cdots(\text{II})$$

(3) 三個連續整數平方的和是 194，求這三數。

設一數爲 x，則另二數爲 $x+1$ 與 $x+2$。按題意得：

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=194.$$

左邊是三個多項式的平方和，乘方後合併同類項，得等式：

$3x^2+6x+5=194$。……（Ⅲ）

以上三個例題，說明用代數方法解應用問題是比較簡便的，但這裏還存在兩個問題，首先要給它解決，不然的話，應用問題還是沒有得出結果。

〔一〕等式（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ）與前面講過的恆等式有什麼區別？這類等式叫什麼？它有什麼性質？

〔二〕這類等式中的未知數，怎樣把它求出來？

先來研究第一個問題，用許可值 $x=2$ 代入以上三個等式：

代入等式（Ⅰ），$10(20+2)\neq 20(25-2)$ 兩邊不等。

代入等式（Ⅱ），$2\times 2+1\neq 15$； 兩邊不等。

代入等式（Ⅲ），$3\times 2^2+6\times 2+5\neq 194$ 兩邊不等。

這裏可以作出結論，這類等式不是恆等式。現在用運算還原的方法，把等式（Ⅰ）和（Ⅱ）解出來：

(1) $10(20+x)=20(25-x)$，

把左右兩邊乘積都縮小 10 倍，得：

$20-x=2(25-x)$，

右邊根據運算性質，得：

$$\underbrace{20+x}_{\text{差}}=\underbrace{50}_{\text{被減數}}-\underbrace{2x}_{\text{減數}},$$

減法還原，得：$20+x+2x=50$，

即 $$\underbrace{20}_{\text{加數}}+\underbrace{3x}_{\text{加數}}=\underbrace{50}_{\text{和}}.$$

加法還原，得：$3x=50-20$，即 $3x=30$。

乘法還原，得：$x=30\div 3$，$\therefore x=10$。

把這個 10 代到等式（Ⅰ）試試看：

$10(20+10)=20(25-10)$

卽 $300=300$。所以 10 是滿足等式(Ⅰ)的。卽水流速度每小時 10 里。

(2) $2x+1=15$.

加法還原，得：$2x=15-1$, $2x=14$.

乘法還原，得：$x=14\div 2$, $\therefore x=7$.

把這個 7 代入等式

$2\times 7+1=15$, 卽 $15=15$. $\therefore 7$ 也是滿足等式(Ⅱ)的。卽所求的二個連續整數是 7 和 8 。

至于等式(Ⅲ)，用算術運算還原方法是解不出來的，用什麽方法解，到講第二個問題的時候再說。但這個等式倘以 $x=7$，或 $x=-9$ 代入，兩邊的數值也是相等的。

$x=7$, $3\times 7^2+6\times 7+5=194$, 卽 $194=194$.

$x=-9$, $3\times(-9)^2+6\times(-9)+5=194$, 卽 $194=194$.

這樣看起來，等式(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ)不是恆等式；這類等式只能以某幾個特定的數代入，才能使等式兩邊的值相等。這就是它和恆等式的區別所在。這類等式我們叫它做方程式。方程式中只含一個未知數的，叫一元方程式。等式(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ),都是一元方程式。含二個未知數的叫二元方程式。例如 $3x-2y+7=0$ 叫二元方程式。未知數的乘方指數最高是一次的，叫一次方程式。例如等式(Ⅰ),(Ⅱ)是一次方程式。等式(Ⅲ)是二次方程式。例如 $3x^3+2x=5$ 叫做三次方程式。也可合叫一元三次方程式。代替方程式中的未知數的那幾個特定的數值，叫做方程式的根。例如 $x=7$，這個 7 是方程式 $2x+1=15$ 的根。例如 $x=10$，這個 10 是方程式 $10(20+x)=20(25-x)$ 的根。例如 $x=7$ 或 -9，這二個數值 7 與 -9 是方程式 $3x^2+6x+5=194$ 的根。

§40. **方程式的性質：** 方程式是一種等式，因此等式的四

種性質，對方程式來講都是適用的。但方程式又和恆等式有所不同，就是說方程式只有某幾個特定的數做它的根。這幾個特定的數不能調換別的數，同時有幾個就是幾個，不能增加也不能減少。但解方程式時，總是把方程式從一種形式變換到另一種形式。例如解方程式時，把方程式：

$$10(20+x)=20(25-x) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

變到方程式：$20+x=2(25-x) \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

一直變到最簡方程式：$x=10 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

到了最簡方程式(3)，很容易知道，這個數 10 是方程式 (3)的根，因爲 $10=10$。另外也不會有其他的根。

倘使方程式(1)或方程式(2)也只有10這個根，沒有別的根的話，那末我們把方程式(1)和(3)或(2)和(3)或(1)和(2)都叫做同值方程式。

例如方程式(a)：$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=194$

與方程式(b)：　$3x^2+6x+5=194$

也是同值方程式。因爲方程式(a)只有 7 和 -9 兩個根，而方程式(b)也只有 7 和 -9 兩個根。

總括的說：兩個方程式的根相同而根的個數也相同，這樣兩個方程式，叫做同值方程式。

方程式變形過程中會不會破壞同值性呢？我們舉例說明它是會的。

例如方程式　$x-2=3$，這方程式顯而易見只有一個根5。

倘使兩邊乘以 $x+2$，得：

$$(x-2)(x+2)=3(x+2)$$

即 $x^2-4=3x+6$。

這方程式以 $x=5$ 代入，得：

$$25-4=3\times5+6，即\ 21=21.$$

又以 $x=-2$ 代入，得：

$$(-2)^2-4=3(-2)+6,\ \text{即}\ 0=0.$$

可見這方程式有二個根 5 和 -2。它就和原方程式不是同值方程式。也就是說，原方程式的同值性經過變換被破壞了。

但解方程式的目的，是在求出原方程式的根，不是求變形後的方程式的根。所以爲了達到這個目的，就必須研究方程式的同值性如何保持的問題。下面兩種方程式的性質是非常重要的。

方程式的性質一：方程式的兩邊，若以同數(或式)相加或相減，所得的新方程式與原方程式同值。

取上例的方程式

$$x^2-4=3x+6\cdots\cdots\cdots(1)$$

設 m 是代表正數、負數或零的數或式。新方程式爲：

$$x^2-4+m=3x+6+m\cdots(2)$$

設 5 爲方程式(1)的任何一個根，那末

$$5^2-4=3\times5+6.$$

再以 5 這個根代入方程式(2)，得：

$$\underbrace{5^2-4}_{\text{等數}}+m=\underbrace{3\times5+6}_{\text{等數}}+m$$

根據等數加等數和相等的性質，知道上面等式也是相等的。這說明凡滿足方程式(1)的根，一定也滿足新方程式(2)。

又設 -2 爲方程式(2)的任何一根，

則 $$\overbrace{\overbrace{(-2)^2-4+m}=\overbrace{3(-2)+6+m}}^{\text{等數}}\ \text{，其中}\ \underbrace{m}_{}=\underbrace{m}_{}$$

根據等數減等數差相等的性質，可以得到

$(-2)^2-4=3(-2)+6$。這等式說明 -2 也是方程式(1)的根。所以反過來，凡滿足方程式(2)的根，一定也滿足方程

式(1)。

由此可以斷定方程式(1)與(2)同値。

根據這一性質去變形的話，就不會破壞方程的同値性。

例如　$x^2-4=3x+6$………(1)

兩邊各減 $3x$，得新方程式

$$x^2-4-3x=3x+6-3x$$

右邊合併同類項，$x^2-4-3x=6$.

兩邊各加 4，得新方程式：

$$x^2-4-3x+4=6+4$$

左邊合併同類項　$x^2-3x=6+4$……(2)

方程式(1)與(2)是同値方程式。把這兩方程式比較一下。卽方程式(1)右邊的項 $3x$，在方程式(2)裏，是移到左邊去了，同時符號也有了改變。(1)式左邊的 -4，移到(2)式的右邊去了，符號也經過改變。從此作出結論：

1.方程式的任何一項，可以變號後從一邊移到另一邊，而方程式還是同値。

倘使方程式的兩邊有相同的項，例如方程式

$5x^2+2x-3=2x+5$……(1)

兩邊減去 $2x$，得：

$$5x^2+2x-3-2x=2x+5-2x$$

左右兩邊分別合併同類項，得：

$5x^2-3=5$………(2)

(2)與(1)同値，但(1)中兩邊的相同項 $2x$ 到了(2)就消去了。從此作出結論：

2.方程式兩邊的相同項可以消去，而方程式還是同値。

方程式的性質二：方程式的兩邊同以不等于零的數(或式)相乘或相除，所得的新方程式與原方程式同値。

仍取上例的方程式

$$x^2-4=3x+6\cdots\cdots\cdots(1)$$

設m代表任何數(或式)，但 $m\neq0$，這一點要特別注意，倘使m代表式，例如$m=x-5$，若 $x=5$ 時，$m=0$，那末就不允許用m去乘或除。倘使用m去乘或除的話，那末新方程式是否與原方程式同值，就無法保證。例如上面所舉的$x-2=3$這個例子中，倘使兩邊乘以$x+2$，當$x=-2$時，$x+2=0$，這就是說方程式變形時已經用零乘了兩邊，所以原方程式的同值性被破壞了。

方程式(1)的兩邊乘以m，新方程式為：

$$(x^2-4)\cdot m=(3x+6)\cdot m\cdots\cdots(2)$$

設5為(1)的任何一根，那末$5^2-4=3\times5+6$，因$m\neq0$，所以m乘這方程式的兩邊，根據等數乘等數它們的積相等，得：

$$(5^2-4)\cdot m=(3\times5+6)\cdot m$$

這等式說明，5也是新方程式(2)的根。所以凡滿足方程式(1)的根，也滿足方程式(2)。反過來，設-2是方程式(2)的任何一根，則：

$$[(-2)^2-4]m=[3(-2)+6]m.$$

但因$m\neq0$，可以用數m除這等式的兩邊，它們的商相等，得：

$$(-2)^2-4=3(-2)+6.$$

這等式說明-2也是方程式(1)的根。所以凡滿足方程式(2)的根，也滿足方程式(1)。

由此可以斷定方程式(1)與(2)同值。

例1　方程式 $90x^2+45x=675x$

各項除以公因數45，得較簡方程式：

$$2x^2+x=15x$$

這兩個方程式根據性質二是同值的，注意公因數x沒有去除，

由此得出結論：

1. 若方程式的各項含有公因數時，而這公因數既不等于零又不含未知數，那末可以用這公因數遍除各項，方程式還是同值。

例 2 方程式 $\frac{x}{3}+\frac{1}{15}=\frac{x}{5}+1$.

這方程式中的最小公分母是 15，它不等于零又不含未知數，以15乘各項，得較簡方程式： $5x+1=3x+15$.

根據性質 2，這兩方程式是同值的，由此得出結論：

2. 若方程式的各項中含有分數值，而其分母不含未知數，那末可以用最小公分母遍乘各項，去掉分母，方程式還是同值。

例 3 如以 -1 乘方程式 $3x^2-2x=5x+2$，得新方程式 $-3x^2+2x=-5x-2$，與原方程式同值。由此得出結論：

3. 方程式的各項都變號，方程式的同值性不變。

§41. **增根與失根**：根據上節所講的方程式的二種性質和它的推論，方程式變形時，只要按照五種方法：(1)變號移項；(2)兩邊消去相同項；(3)約去不含未知數的的公因數；(4)去掉不含未知數的分母；(5)各項都變號；那末方程式就會保持同值。倘使不按照這五種方法去變形，就不能保持同值。

例 1 方程式 $2x^2+x=15x$ 容易知道它有一個根 0，因爲 $0+0=0$。倘使以含有未知數的公因數 x 來遍除各項，得新方程式 $2x+1=15$，很顯然 $0+1\neq15$，所以 0 不是這新方程式的根。那末這樣變形後，方程式就少了一個根 0。這種少去的根叫做失根。這樣就破壞了方程式的同值性。所以方程式兩邊約去含有未知數的公因式這樣的變形是不許可的。

例 2 方程式 $\frac{2x^2}{x^2-4}+\frac{x}{x-2}=\frac{x}{x+2}+1$.

各項通分，得：　　$\frac{2x^2}{x^2-4}+\frac{x(x+2)}{x^2-4}=\frac{x(x-2)}{x^2-4}+\frac{x^2-4}{x^2-4}$.

去掉含有未知數的公分母 x^2-4，得：

$$2x^2+x(x+2)=x(x-2)+x^2-4,$$

$$2x^2+x^2+2x=x^2-2x+x^2-4.$$

兩邊消去相同項，再移項，併項，得：

$$x^2+4x+4=0$$

即 $(x+2)^2=0$.

這方程容易看出，只有 -2 是它的一個根。再以 -2 代入原方程式，得：

$$\frac{8}{0}+\frac{-2}{-4}=\frac{-2}{0}+1.$$

這等式是無意義的，所以 -2 不是原方程式的根。這種方程式經變形後，多出來的根叫做增根。發生增根的原因，就是我們把方程式的兩邊用含有未知數的代數式 x^2-4 去乘了一下的緣故。

但並不是說，用含有未知數的代數式相乘的結果，一定發生增根，也可以不發生增根。

例 3 方程式 $\frac{5}{x+5}+\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x+5}+\frac{3}{x-3}$.

如以最小公分母 $(x+5)(x-3)$（這是含有未知數的代數式）去乘，得：

$$5(x-3)+(x+5)=(x-3)+3(x+5);$$

即 $6x-10=4x+12$;

$$2x=22;\quad \therefore x=11.$$

代入原方程式，得：

$$\frac{5}{16}+\frac{1}{8}=\frac{1}{16}+\frac{3}{8}，即\ \frac{7}{16}=\frac{7}{16}.$$

所以11是原方程式的根。這次變形就沒有發生增根。

在解分式方程式時，用含有未知數的公分母去乘是必要的手續。那末究竟怎樣來判定是增根或者不是增根呢？一般是把求得的根代入原方程式加以驗算，也可以把求得的根代入最小公分母去，看它的值等不等于零，倘若等于零那就是增根，倘若不等于零，就不是增根。

例2的根 -2，能使 $x^2-4=(-2)^2-4=0$，

$\therefore\ -2$ 是增根。

例3的根11不會使 $(x+5)(x-3)$ 等于0，

$\therefore\ 11$ 不是增根。

這理由根據方程式的性質二可以說明。

§42. **一元一次方程式**：我們已經研究了方程式的性質，根據性質推得五種方法，可以把方程式變形而不破壞它的同値性。同時知道不能用含未知數的代數式來除，免得失去根。倘若曾經用含未知數的代數式相乘過的，那末最後應辨別它是不是增根，而把增根去掉。

現在開始研究第二個問題，就是方程式中的未知數怎樣把它求出來？首先我們從最簡單的一元一次方程式講起。任何一元一次方程式，經化簡後，都可寫成 $ax=b$ 的形式。這叫做一元一次方程式的標準式，x 代表未知數，而 a，b 代表已知數，$a\neq 0$。

例1　解方程式 $\dfrac{2-x}{2}-\dfrac{5x+21}{5}=x+3$.

第一步去分母，以最小公分母 10 去乘各項，得：

$5(2-x)-2(5x+21)=10(x+3)$.

第二步去括號，得：

$10-5x-10x-42=10x+30$

第三步移項，把未知數的項移到左邊，已知數項移到右邊，得：

$$-5x-10x-10x=30-10+42,$$

第四步合併同類項，得：

$$-25x=62$$

第五步用未知數的係數 -25 去除兩邊，

$$\therefore\ x=-2\frac{12}{25}$$

這五個步驟是解方程式的一般步驟。事實上仍須看方程式的實際情況，需要減少就減少，需要合併就合併，而且也不必像上例那樣詳細寫出來。最後還應當把答數代入原方程式驗算，看它有沒有錯，這裏略去不寫。

例 2　解方程式 $\dfrac{7}{x^2-1}+\dfrac{8}{x^2-2x+1}=\dfrac{37-9x}{x^3-x^2-x+1}$.

以最小公分母 $(x-1)^2(x+1)$ 遍乘各項，得：

$$7(x-1)+8(x+1)=37-9x,$$

去括號，$7x-7+8x+8=37-9x$,

即 $24x=36$,　$\therefore x=\dfrac{3}{2}$.

因公分母含有未知數，這時所得答數可能是增根，因此代入驗算：

左邊 $=37\dfrac{3}{5}$，　右邊 $=37\dfrac{3}{5}$.

$\therefore\ x=\dfrac{3}{2}$ 是原方程式的根。

方程式的係數，也有含代表已知數的字母的，這樣的方程式叫做文字方程式，其解法完全和上面一樣。

例 3　解方程式

$$\frac{1}{2}(a+x)+\frac{1}{3}(2a+x)+\frac{1}{4}(3a+x)=3a.$$

去分母，$6(a+x)+4(2a+x)+3(3a+x)=36a,$

去括號，$6a+6x+8a+4x+9a+3x=36a,$

移項，$6x+4x+3x=36a-6a-8a-9a,$

併項，$13x=13a,$

除以13，$\therefore x=a.$

例 4 已知方程式 $4abc-5bc+16=3bc,$

(1) 解出b；(2) 解出a。

這意思就是：(1)把方程式中的b看作未知數，而把其餘的字母看做已知數去解。(2)把 a 看做未知數，把b,c看做已知數去解。

(1) 移項，含有 b 的項移到左邊，其餘項移到右邊。

$4abc-5bc-3bc=-16,$

併項，$4abc-8bc=-16,$

合併 b 項，$(4ac-8c)b=-16,$

兩邊約去4，$(ac-2c)\cdot b=-4,$

除以 $ac-2c$，$b=\dfrac{-4}{ac-2c}.$ (這里 $ac-2c\neq 0$)

(2) 移項，把不含 a 的項移到右邊，

$4abc=3bc+5bc-16,$

併項，$4abc=8bc-16,$

約去 4，$abc=2bc-4,$

除以 bc，$a=\dfrac{2bc-4}{bc}.$ (這里 $bc\neq 0$

練 習 題

解下列方程式，並加驗算：

211. $\frac{3x}{4}-\frac{7x}{12}=\frac{11x}{36}-\frac{8x}{9}+\frac{3}{2}$.

212. $\frac{x+1}{2}+\frac{x+3}{4}=2$.

213. $\frac{2(x+1)}{3}-\frac{3(x+2)}{4}=\frac{x+1}{6}$.

214. $(x+1)^2+2(x+3)^2=3x(x+2)+35$.

215. $\frac{3x+5}{8}-\frac{21+x}{2}=5x-15$.

216. $x-(3x-\frac{2x-5}{10})=\frac{1}{6}(2x-57)-\frac{5}{3}$.

217. $\frac{5}{6}x+0.25x-\frac{1}{3}x=x-3$。

218. $1.5=\frac{0.36}{0.2}-\frac{0.09x-0.18}{0.9}$。

219. $\frac{2x-1}{4x+2}=\frac{9}{22}+\frac{4x-2}{2x+1}$.

220. $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x-3}=0$.

221. $(a+b)x+(a-b)x=a^2$.

222. 已知 $3ac-5c=17$，解出 c.

223. 已知 $\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$.

(1)解出f；(2)解出p；(3)解出q.

224. 已知 $A=\frac{1}{2}(B+b)\cdot h$，解出 b。

§43. **二元一次聯立方程式**：在實際問題中，有時會碰到兩個未知數，我們爲了要求這兩個未知數，立出來的方程式就含有兩個未知數。例如 $3x-2y=7$ 。這時候可以解出 y，

$y=\frac{3x-7}{2}$。如果給定x以任何許可值，y可以得到一個對應值。

例如 $x=0$, $y=-\frac{7}{2}$; $x=1, y=-2$; $x=2$, $y=-\frac{1}{2}$; $x=3$, $y=1$; ……這樣的一對對的值可以有無限的多。所以二元一次方程式的值具有不定性。這些對應值倘使在坐標軸裏，用點來表示每一對值，那末連接這些點所得的圖象就是二元一次方程式的圖象。一般這種圖象總是一條直綫。二元一次方程式的值雖無一定，但這兩個未知數間的關係是確定了的，如果$x=1$時，y的對應值只能是-2，不能是別的。從圖象裏看起來，代表任何一對對應值的點必須在一條定直綫上，不許可在定直綫外。事實上它們的關係可以看得出來：因 $y=\frac{3}{2}\left(x-\frac{7}{3}\right)$，就是$x$與$\frac{7}{3}$的差總是和$y$成正比例。這和恆等式完全不一樣，恆等式中任一字母可以給它任何值，字母與字母之間沒有什麼關係。例如恆等式$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$中，a固然可以給它任何值，b也可給它任何值，a與b之間沒有什麼關係。二元一次方程式經過變化之後，可以寫成標準式：

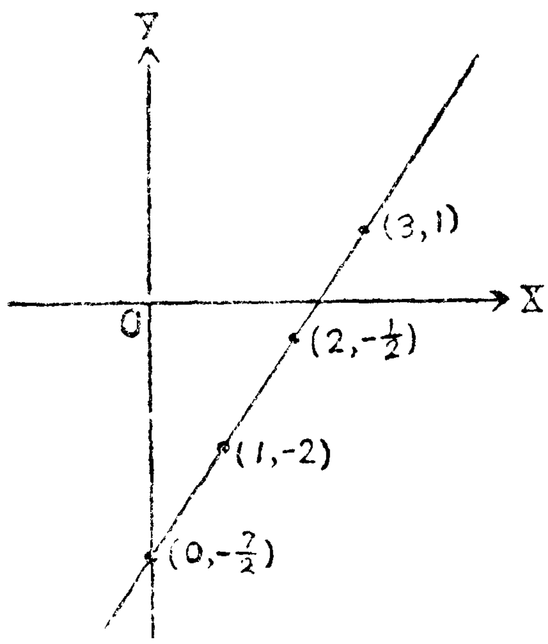

圖 20.

$ax+by=c$，這裏的a,b,c是已知常數，但a,b不能都等于零。倘使這樣的方程式有兩個，例如

$$\left.\begin{array}{l}a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2\end{array}\right\}$$

這叫做二元一次聯立方程式的標準式。兩個方程式中的x，如果代表同一未知數，y也代表同一未知數，那末這組方程式叫做二元一次聯立方程式。解聯立方程式的意思就是要找一對

值，這對值既是第一方程式的對應值，也是第二方程式的對應值。這種找共同對應值的方法有兩種，就是代入法與消去法。現在舉例說明如下：

例1 解 $\begin{cases}4x-3y=8\cdots\cdots(1)\\2x+y=14\cdots\cdots(2)\end{cases}$

（代入法） 由方程式(2)解出y，得：

$y=14-2x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

代入方程式(1)中的y，得：

$4x-3(14-2x)=8$。

以後就照解一元一次方程式的方法，得 $x=5$。

代入(3)，得：$y=4$。

答：$\begin{cases}x=5,\\y=4.\end{cases}$

（消去法） 以3遍乘方程式(2)的兩邊，目的在使兩方程式中一個未知數的係數的絕對值相同。得：

$6x+3y=42\cdots\cdots\cdots(3)$

(1)與(3)兩邊分別相加，就消去一個未知數y，得：

$10x=50,\qquad \therefore x=5.$

同樣以2乘(2)的兩邊，得：

$4x+2y=28\cdots\cdots\cdots(4)$

(4)與(1)式的兩邊分別相減，得：

$5y=20,\qquad \therefore y=4.$

答：$\begin{cases}x=5,\\y=4.\end{cases}$

求y時，也可把x的值代入(1)或(2)去解出來。

二元一次聯立方程式，也可以用圖象說明解答的意義。因爲每個方程式的圖象都是一條直綫，一對對應值是直綫上的一

點，表示公共對應值的點就要同時在二條直綫上，那就是兩條直綫交點的坐標。如圖交點 p 的坐標 $(5,4)$ 就是聯立方程式的解答。

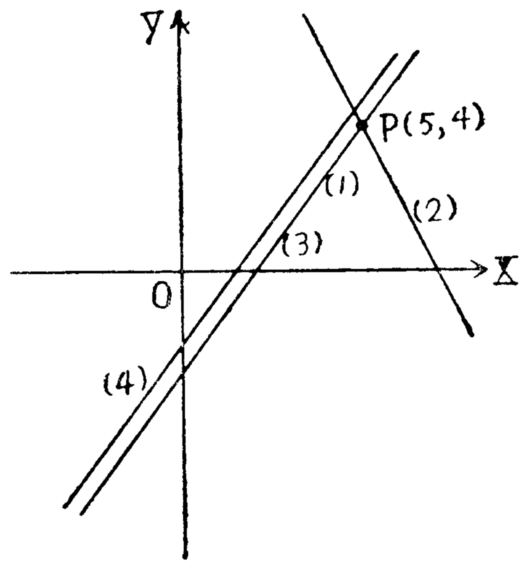

圖 21.

也有這樣的聯立方程式：

$4x-3y=8\cdots\cdots(1)$

$8x-6y=16\cdots\cdots(3)$，當(3)式兩邊約去 2 以後，就得(1)。這時候表面上有兩個方程式，可是實際上只有一個，因此它的解答可以有無限多。它的圖象是一條重合的直綫。如圖直綫(1)與(3)是重合的。

也會碰到這樣的聯立方程式：

$$4x-3y=8\cdots\cdots(1),\quad 12x-9y=18\cdots\cdots(4)$$

當 (1) 式兩邊乘以 3，得 $12x-9y=24$，但與 (4) 式矛盾，$\because 18\neq 24$，這時候就沒有解答。它的圖象是兩條平行的直綫(1)和(4)。

字母係數的聯立方程式，也可用同樣解法去解，不過所得的一對解答是含字母的代數式。因此就不好繪出它的圖象。

例如 解 $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{ab}\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{x}{c}-\dfrac{y}{d}=\dfrac{1}{cd}\cdots\cdots(2) \end{cases}$

(1) 的兩邊乘以 $\dfrac{1}{d}$，得：$\dfrac{x}{ad}+\dfrac{y}{bd}=\dfrac{1}{abd}\cdots\cdots(3)$

(2) 的兩邊乘以 $\dfrac{1}{b}$，得：$\dfrac{x}{bc}-\dfrac{y}{bd}=\dfrac{1}{bcd}\cdots\cdots(4)$

(3)＋(4)，得：$\dfrac{x}{ad}+\dfrac{x}{bc}=\dfrac{1}{abd}+\dfrac{1}{bcd}$，

$$x\cdot\frac{bc+ad}{abcd}=\frac{c+a}{abcd}$$

$$\therefore\ x=\frac{a+c}{bc+ad}.$$

$$(1)\ \times\frac{1}{c},\ 得：\ \frac{x}{ac}+\frac{y}{bc}=\frac{1}{abc}\cdots\cdots(5)$$

$$(2)\ \times\frac{1}{a},\ 得：\ \frac{x}{ac}-\frac{y}{ad}=\frac{1}{acd}\cdots\cdots(6)$$

$$(5)-(6),\ 得：\ \frac{y}{bc}+\frac{y}{ad}=\frac{1}{abc}-\frac{1}{acd},$$

$$y\cdot\frac{ad+bc}{abcd}=\frac{d-b}{abcd},$$

$$\therefore\ y\frac{d-b}{ad+bc}.\qquad 答：\begin{cases}x=\dfrac{a+c}{ad+bc},\\ y=\dfrac{d-b}{ad+bc}.\end{cases}$$

練　習　題

解下列聯立方程式（如遇未化簡者，要先化成標準式再解），並把前兩題繪出圖象。

225. $\begin{cases}3x+4y=24,\\ 5x-6y=2,\end{cases}$

226. $\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{3},\\ \dfrac{x+y}{4}=\dfrac{y+2}{3}.\end{cases}$

227. $\begin{cases}(y+1)(x+5)=(y+5)(x+1),\\ xy+x+y=(y+2)(x+2).\end{cases}$

228. $\begin{cases}\dfrac{a}{5}+\dfrac{b}{2}=5,\\ a-b=4.\end{cases}$

229. $\begin{cases}\dfrac{n+1}{10}=\dfrac{3m-5}{2}\\ \dfrac{n+1}{10}=\dfrac{n-m}{8}\end{cases}$

230. $\begin{cases}\dfrac{x-2}{3}-\dfrac{y+2}{4}=0,\\ \dfrac{2x-5}{5}-\dfrac{11-2y}{7}=0.\end{cases}$

231. $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$　　232. $\begin{cases} ax-b=my, \\ y=nx-b. \end{cases}$

233. $\begin{cases} \dfrac{5}{x+4}=\dfrac{2}{y-1}, \\ \dfrac{3}{x+2}=\dfrac{4}{y+1}. \end{cases}$　　234. $\begin{cases} x=2+\dfrac{xy+13}{y+6}, \\ y=2+\dfrac{xy-13}{x+4}. \end{cases}$

§44. 三元一次聯立方程式：含三個未知數的一次方程式，叫做三元一次方程式。例如 $3x-2y+z=5$。兩個未知數的值可以隨便給定，只有第三個未知數的對應值，要從方程式算出來。所以三元一次方程式的值具有不定性。三元一次方程式經過化簡後，可寫成標準式：

$ax+by+cz=d$.（a,b,c,d 都代表已知數 a,b,c 不能全等于0.）

倘使有兩個三元一次方程式聯立起來的話，例如

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases}$$

倘使把一個未知數 z 看做已知數，把 x,y 解出來，那末可得：

$$\begin{cases} x=\dfrac{(c_1z-d_1)b_2-(c_2z-d_2)b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \\ y=\dfrac{(c_2z-d_2)a_1-(c_1z-d_1)a_2}{a_1b_2-a_2b_1} \end{cases}$$

若給 z 以任何一個值；x,y 可以得一對對應值。但 z 可給定的值是無限多的，所以 x,y 的對應值也是無限多的。這說明兩個三元一次聯立方程式的值，還是具有不定性的。現在我們舉例說明三個三元一次方程式相聯立的情況：

例1　解 $\begin{cases} x+2y+z=12\cdots\cdots\cdots(1) \\ 4x+3y-2z=27\cdots\cdots(2) \\ 2x-4y+3z=1\cdots\cdots(3) \end{cases}$

先從(1)與(2)及(1)與(3)各消去 z，

$$
\begin{aligned}
&(1)\times 2+(2)，得 \\
&(1)\times 3-(3)，得
\end{aligned}
\left\{
\begin{aligned}
6x+7y&=51\cdots\cdots(4)\\
x+10y&=35\cdots\cdots(5)
\end{aligned}
\right.
$$

$(5)\times 6-(4)$，得：　$53y=159$，　$\therefore y=3$，

代入(5)，得：　$x+30=35$，　$\therefore x=5$，

代入(1)，得：　$5+6+z=12$，　$\therefore z=1$，

$$
答：\left\{
\begin{aligned}
x&=5,\\
y&=3,\\
z&=1.
\end{aligned}
\right.
$$

所以，三元一次方程式必須有三個方程式聯立起來，一般能夠確定一組解答。以後可以類推。總括說：方程式的個數要與未知數的個數相等，它的值才能確定。至于解法，和二元一次方程式是一樣的，也可以有代入法與消去法兩種，應用消去法比較簡便。但未知數個數越多，逐步消去未知數的步驟也越多，所以要盡量利用口算，才能把手續簡化。上例的形式是比較簡單的形式。倘遇到聯立方程式中的特殊情況，還可用特殊解法去解，更爲便利。茲舉例說明：

$$
2\quad 解\left\{
\begin{aligned}
x+y+z&=6\cdots\cdots\cdots(1)\\
x+y+u&=7\cdots\cdots\cdots(2)\\
x+z+u&=8\cdots\cdots\cdots(3)\\
y+z+u&=9\cdots\cdots\cdots(4)
\end{aligned}
\right.
$$

這是四元一次聯立方程式，逐步消去未知數當然也可解出來，但手續比較繁。這四個方程式左邊相加，各項的係數是相同的，這就是它的特點。因此就利用這特點，把四個方程式的兩邊相加，再以3除，得：

$$x+y+z+u=10\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$(5)-(1)$，得：$u=4$，
$(5)-(2)$，得：$z=3$，
$(5)-(3)$，得：$y=2$，
$(5)-(4)$，得：$x=1$。

答：$\begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=3, \\ u=4. \end{cases}$

例3　解 $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{3}{z}=11 \cdots\cdots (1) \\ \dfrac{2}{y}-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{z}=-5 \cdots\cdots (2) \\ \dfrac{5}{z}+\dfrac{3}{y}+\dfrac{2}{x}=17 \cdots\cdots (3) \end{cases}$

這聯立方程式的特點，就是所有未知數都在分母裏，而且形式是相同的。倘使把每個方程式去分母加以整理的話，那就不是一次方程式，越出了目前能解的範圍。現在就利用它的特點，把它看做是三個未知數 $\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$ 和 $\frac{1}{z}$ 的聯立方程式。先解出 $\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，$\frac{1}{z}$ 的值，那末它們的倒數就是所要求的 x,y 和 z 的值。

$(1)-(2)\times 3$，　得：$\dfrac{14}{x}-\dfrac{5}{y}=26 \cdots\cdots (4)$

$(3)-(2)\times 5$，　得：$\dfrac{22}{x}-\dfrac{7}{y}=42 \cdots\cdots (5)$

$(5)\times 5-(4)\times 7$，得：$\dfrac{12}{x}=28$，　$\therefore \dfrac{1}{x}=\dfrac{7}{3}$.

代入 (4)，　得：$14\times\dfrac{7}{3}-\dfrac{5}{y}=26$，　$\therefore \dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{3}$.

以此二值代入(2)，得：

$$2\times\frac{4}{3}-4\times\frac{7}{3}+\frac{1}{z}=-5,\quad \therefore \frac{1}{z}=\frac{5}{3}.$$

答：$\begin{cases} x=\dfrac{3}{7}, \\ y=\dfrac{3}{4}, \\ z=\dfrac{3}{5}。\end{cases}$

練　習　題

解下列聯立方程式：

235. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}-z=6, \\ \dfrac{3x}{4}-\dfrac{y}{2}+z=-4. \end{cases}$

236. $\begin{cases} x+y-z=17, \\ y+z-x=7, \\ z+x-y=13. \end{cases}$

237. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=6, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{u}=9, \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{x}=8, \\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=7. \end{cases}$

238. $\begin{cases} x+2y=5, \\ y+2z=8, \\ z+2u=11, \\ u+2x=6. \end{cases}$

239. $\begin{cases} 2x+\dfrac{3}{y}-\dfrac{4}{z}=4, \\ \dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{17}{12}, \\ x+\dfrac{4}{y}=\dfrac{10}{3}. \end{cases}$

240. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{y}+\dfrac{3}{z}=-3.5, \\ \dfrac{x+y}{xy}=2, \\ 0.2z-0.9y=yz. \end{cases}$

§45. **佈列方程式：** 上面我們已經研究了一元一次方程式與多元一次聯立方程式的解法。這些知識當我們應用到實際中去的時候，還存在一個問題，就是怎樣根據實際問題中存在的

數量關係佈列方程式？倘使方程式佈列不出或佈列錯了，那末即使我們會解方程式也是無用的。所以佈列方程式是數學知識中的一個重要環節。過去把佈列方程式看做一個嚴重問題，是由于理論脫離實際的學習方法所造成的。倘使我們已經改變了學習方法，能面向實際領會數學知識，同時也經常地關心祖國的建設，留意工農業生產的發展情況，而自己又能隨時參加到勞動中去，那末佈列方程式不過是應用數學知識時的一個必要過程，根本是不成問題的。佈列方程式需要兩方面的知識，一方面是數學知識，另一方面是實際生產鬥爭知識和其他的科學知識。倘使問題是屬于農業方面的，那末農業上的基本知識是應該知道的。倘使問題是屬於工業方面的，那末工業上的基本常識也是應該明白的。當我們參加到光榮的勞動隊伍中去的時候，實際生產鬥爭的知識也會逐步掌握起來的，但不要把數學知識忘掉，不要把學習的知識和勞動實踐分離開來。要曉得任何勞動生產都是在那裏不斷改變不斷發展着，都包含着各色各樣的數量關係，供給我們研究的材料是非常豐富的，數學知識不會感到沒有用，只會感到不夠用，而想學習更多的數學知識。我們學習數學知識的眞正目的就是應用到勞動生產中去。這裏從實際中找一二個問題，告訴大家怎樣應用已經學過的數學知識（目前講就是解一元一次方程式的知識）去解問題。當然，這樣的幾個例題只是舉例罷了，大家在各自的工作崗位上，必然會碰到更多的問題，這就要各人自己開動腦筋，靈活運用學得的知識，去解決問題。

例1　某農業生產合作社在春耕時原來計劃每天耕地 25 公頃，因爲使用了新式農具，每天能耕地 30 公頃，提前 3 天完成耕地計劃，問這農業生產合作社共耕地多少？

首先分析一下，這問題中包含哪幾個量？很顯然包括三個

量：(1)每日耕地公頃數；(2)耕地日數；(3)耕地總數。而這三個量間的關係綜合如下：

(每天耕地公頃數)×(耕地日數)＝耕地總數。

也可這樣寫： $耕地日數=\dfrac{耕地總數}{每日耕地公頃數}$。

另外還要注意：由于使用了新式農具，每天耕地公頃數由 25 公頃增加到 30 公頃，倘使耕地總數不變，那末耕地日數就可減少 3 天。

這問題中，原計劃的耕地日數與耕地總數都是不知道的，只知道每日耕地 25 公頃，但既知這三個數量間的關係，事實上只要曉得其中的一個，就可推算另一個。

設共耕地爲 x 公頃，那末原計劃耕地日數就是 $\frac{x}{25}$ 日，用新式農具所需日數爲 $\frac{x}{30}$ 日。但知 $\frac{x}{30}$ 比 $\frac{x}{25}$ 少 3 日。這裏就得出一個相等關係，用式表示便列出方程式：$\frac{x}{25}-\frac{x}{30}=3$，解方程式，得 $x=450$ 公頃。

也可假設原計劃耕地爲 y 日，那末耕地總數爲 $25y$ 公頃，使用新式農具後耕地日數爲 $y-3$ 日，而耕地爲 $30(y-3)$ 公頃。但耕地總數不變，所以列出方程式：

$25y=30(y-3)$，解之得 $y=18$ 日。

答：耕地總數爲 $25\times18=450$ 公頃。

從上面例題中可以看出：列方程式的主要環節是在把問題加以分析綜合，找出問題中存在的數量關係。好像上題中

(每天耕地公頃數)×(耕地日數)＝耕地總數。

這關係是根據實際知識得出來的。得出這關係之後，我們知道這關係在數學裏叫做“乘數×乘數＝乘積”的關係，而且也知道這關係的另外的表達形式。當問題中提出每天耕地數增

加、日數減少、耕地總數不變這一事實的時候，我們應當和算術裏乘法變化的知識聯系起來。就是說乘積不變，一個乘數增大時，另一乘數一定縮小。這也就是前一章所講的成反比例關係。這個問題中的具體表現是這樣：

$25\times18=450$。

$30\times15=450$，即 $25:30=\frac{1}{18}:\frac{1}{15}$.

解應用問題是應該像上面所說那樣，把數學的理論知識與實際問題聯系起來，加以全面的考慮。這樣才會逐步做到融會貫通，靈活運用，當問題形式變動的時候，也可給它解決。我們堅决反對那種“依樣畫葫蘆”的辦法，就是按照例題格式，硬套到問題上去的辦法去解應用問題。下面舉例因限於篇幅不再詳細說明了。

例2 某農具廠在一定日期內必須生產一定數量的犁，如果每天生產 240 張，到期比規定數量少生產 400 張；如果每天生產 280 張，到期能超額完成 200 張；問這個廠規定要生產多少張犁？規定日期是幾天？

這問題中的規定生產犁的總數（生產定額）是每天出犁數與規定天數的乘積。倘使總規定天數不變，那末每天出犁數減少，總犁數也減少。每天出犁數增多，總犁數也增多。

設規定生產犁的總數爲 x 張，並規定 y 天完成，由問題的第一部分可列出方程式：

$x-240y=400\cdots\cdots\cdots(1)$

由問題的第二部分可列出方程式：

$280y-x=200\cdots\cdots\cdots(2)$

解此聯立方程式，得 $x=4000$，$y=15$.

答：原規定 15 天生產犁 4000 張。

例3 汽船在 13 小時內，順水走 140 公里後，逆水又走 24

公里；另一汽船順水走 120 公里，逆水走 20 公里，共走 11 小時；求水流速度和靜水中汽船的速度。

這類問題中的主要量是距離、速度、時間；而且距離等于速度與時間的乘積，這個關係是大家所熟悉的。有的實際問題還要注意方向，在流水問題中，還有順流速度等于靜水中速度加水流速度；逆流速度等于靜水中速度減去水流速度；這關係是根據實際經驗得出來的。

設在靜水中汽船每小時速度爲 x 公里，水流的速度每小時爲 y 公里，那末第一隻汽船順水走 140 公里的時間爲 $\frac{140}{x+y}$，逆水走24公里的時間爲 $\frac{24}{x-y}$，兩共時間爲13小時，得方程式：

$$\frac{140}{x+y}+\frac{24}{x-y}=13 \cdots\cdots\cdots(1)$$

第二隻汽船順水走 120 公里的時間爲 $\frac{120}{x+y}$，逆水走20公里的時間爲 $\frac{20}{x-y}$，兩共時間爲11小時，得方程式：

$$\frac{120}{x+y}+\frac{20}{x-y}=11 \cdots\cdots\cdots(2)$$

解此聯立方程式，首先得 $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{20};\\ \dfrac{1}{x-y}=\dfrac{1}{4};\end{cases}$

于是得 $\begin{cases}x+y=20,\\ x-y=\ \ 4;\end{cases}$ 最後得 $\begin{cases}x=12,\\ y=\ \ 8.\end{cases}$

答：靜水中汽船每小時走 12 公里；水流速度是每小時 8 公里。

在代數教本上所舉的應用題中，有的是需要應用物理知識

的，下面舉例說明。另外也有需要應用化學知識，幾何知識，算術知識等，這裏限于篇幅，不再詳細列舉。

例 4　一槓桿長 42 厘米，如一端用 6 公斤的力，另一端掛 15公斤的物體，則此槓桿平衡，求兩端各距支點多遠?

這問題主要是懂得槓桿的的道理，如圖 22，A 是支點，兩

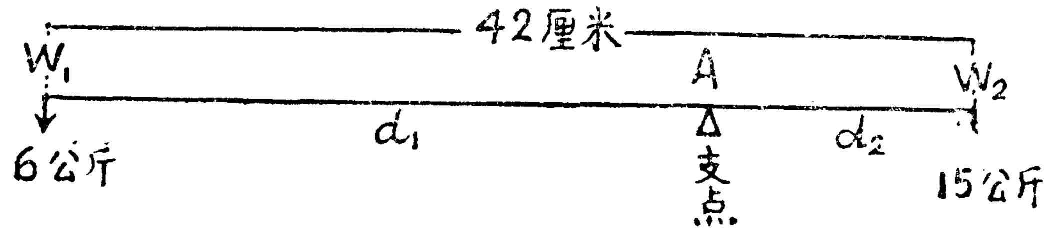

圖 22.

端重量爲 w_1，w_2；距離爲 d_1，d_2，那末這四個數間存在着這樣的關係：

$w_1 \cdot d_1 = w_2 \cdot d_2$，這關係是從實驗得來的。在這一問題中只要把適當的數代入，即得聯立方程式：

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = 42 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 6 \cdot d_1 = 15 d_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

解之，得 $d_2 = 12$，$d_1 = 30$.

答：用力處離支點 30 厘米，掛物處離支點 12 厘米。

這問題也可用一元一次方程式來解。即設用力處離支點爲 x 厘米，那末掛物處離支點應爲 $42 - x$ 厘米，列方程式：

$15 \cdot (42 - x) = 6x$，答數是一樣的。

練　習　題

241.　在某農村中乾草原比水草原多 40 公頃，一公頃水草原平均收穫草 $2\frac{1}{2}$ 噸，乾草原一公頃平均收穫 $1\frac{1}{5}$ 噸；但知乾草原所收穫的草較水草原所收穫的草少 30 噸，問此農村中兩種草原各有多少公頃?

242. 農民 9 日收穫大豆和高粱共 172 堆；若只收大豆，一天能收 18 堆；只收高粱，一天能收 20 堆。問收穫大豆、高粱各需幾天？

243. 8 個農民和 3 架收割機每天共收割 14.5 頃；6 個農民和 4 架收割機每天共收割 17 頃；問一個農民和一架收割機每日各收割多少頃？

244. 試驗農場裏在未經改良的土地上，原來可以收穫大豆和高粱 1472 公斤；同一土地經過改良以後，大豆與高粱的收穫量各增加了 80% 與 24%，共收穫 2058 公斤。問在改良後的土地上，大豆與高粱的收穫量各多少（近似值）？

245. 1949 年某國營工廠，有熟練工人和半熟練工人共 50 人；到 1950 年全廠共有工人 130 人，其中熟練工人的數目是 1949 年的 2 倍，半熟練工人是 1949 年的 3 倍。問 1950 年熟練工人與半熟練工人各有多少？

246. 修堤工程全部竣工原需時 6 個月；後來採用新工作方法工作，提前一個月完成。試求採用新工作方法後，工人的勞動生產率提高了百分之幾？

247. 甲乙兩列火車相距 650 公里，同時相向出發，10 小時後相遇；如果乙車比甲車早出發 4 小時 20 分，則在甲車出發後 8 小時相遇。問每列火車每小時速度是多少？

248. 從相距 n 公里的 A，B 兩地，有甲乙兩人划船相對行駛，他們的划速是相等的；甲順流而下從 A 地到 B 地需 t 小時，乙逆流而上從 B 地到 A 地所需時間要比甲從 A 地到 B 地多 n 小時。求水流的速度。

249. 在槓桿支點的一邊掛兩個物體，甲物重 70 公分，乙物重 40 公分，知甲物的重點比乙物的重點距支點遠 3 公厘；若于槓桿的另一邊距支點 10 公厘處，掛一重為 120 公分的物體

時，則此槓桿平衡。試求甲乙兩重點各距支點多遠?

250. 一分數，如分子分母各加上3則等于$\frac{1}{2}$；如從分母中減去1則等于$\frac{1}{3}$。求此分數。

251. 用鋅、銅、鎳三種元素構成三種不同的合金，它們中間的比各爲 2:3:1；2:4:3；1:2:1。今用此三種合金構成新的合金，其中鋅佔10公分，銅佔 18 公分，鎳佔10公分。求三種合金各用多少?

252. 有甲、乙兩種茶，每斤價格爲a元與b元，現在把甲、乙兩種茶加工成甲乙混合茶d公斤，如每公斤按m元出售，可獲得利潤s元。問d公斤甲乙混合茶各需甲茶與乙茶多少公斤?

253. 車的前後輪周長之比是$1:a$，此車走m公尺時，其前輪比後輪多轉k次。求各輪的周長及各轉多少次?

254. 買甲種布2公尺和乙種布5公尺共需8.4元；如果甲乙兩種布的價格各降低12.5%和15%，再買時只需7.3元。問每種布每公尺各值多少?

255. 某農村修築一塊矩形的地面，其周長是5.4公里；如該地面的長增加原長的$\frac{1}{10}$，而寬增加原寬的$\frac{1}{40}$，則所得新地面的周長是5.76公里。求此新地面的長和寬(近似值)。

第九講　數的開平方

§46. <u>引言</u>：前面我們研究了“有理數”與“有理式”的四則運算；研究了乘方運算；講過關于乘方運算的四種指數定律(1)$a^{m}\ a\cdot{}^{n}=a^{m+m}$，(2)$a^{p}\div a^{n}=a^{p-n}$，(3)$(a^{m})^{n}=a^{m\cdot n}$，(4)$(abc)^{n}=a^{n}\cdot b^{n}\cdot c^{n}$。在第二講裏還提到過第六種運算就是開方，知道開方是乘方的逆運算，當 a 的 n 次乘方等于 b 時，我們說 b 的 n 次方根等于 a，卽當$a^{n}=b$，那末

$b=\sqrt[n]{a}$。這一講裏我們要來硏究一下開方的性質和開方的一個特殊運算，卽數的開平方。

§47. <u>算術根與代數根</u>：　根據開方的定義，在正數的範圍內，容易推得：

$$\because (+2)^{2}=4;\qquad \therefore \sqrt{4}=+2$$

但是有理數的範圍內，-2的平方也是 4，$(-2)^{2}=4$，因而 4 的另一個平方根是$-\sqrt{4}=-2$.

一般的講，正數的開平方可以得出兩個數，符號相反而絕對值相同。

$$又\because (+2)^{3}=8;\qquad \therefore \sqrt[3]{8}=+2.$$

$$\because (-2)^{3}=-8;\qquad \therefore \sqrt[3]{-8}=-2.$$

所以不論正數或負數開奇數次方，都有一個有理數的根。

但任何正負數的偶數次乘方總是正數。因此在有理數的範圍裏，負數就無法開偶數次方。例如在有理數裏找不出一個等于 -4 的平方根。這種負數的平方根，只有等待數概念再擴大以後來研究。倘使把被開方數限制在正數範圍內，那末它所開

的方根數也總是正數，所以正數開方的結果得唯一的正數。這個唯一的正數叫它做算術根。算術根具有下列兩種性質：

(1) 按根指數把已知正數開方，所得的算術根只有一個。

$\because x<7$，$\therefore x^2<49$；$x=7$，$x^2=49$；$x>7$，$x^2>49$；所以 $\sqrt{49}$ 只能等于 7，不能是大于或小于 7 的另一數。不然的話，它的平方就要大于或小于 49。

(2) 被開方數的值大，它的算術根的值也大；被開方數的值小，它的算術根的值也小。

$\because 36<49$，$\therefore \sqrt{36}<\sqrt{49}$；$8<27$，$\sqrt[3]{8}<\sqrt[3]{27}$；

$64>49$，$\sqrt{64}>\sqrt{49}$；$64>27$，$\sqrt[3]{64}>\sqrt[3]{27}$。

倘使被開方數不加限制，可以是任何有理數的話，那末它所開得的方根數可以是正數也可以是負數。這樣的方根數叫做代數根。例如

$$\sqrt[n]{a}=\begin{cases}\text{正數（當 } a \text{ 是正數，} n \text{ 是奇數）；}\\ \text{負數（當 } a \text{ 是負數，} n \text{ 是奇數）；}\\ \text{正數和負數（當 } a \text{ 是正數，} n \text{ 是偶數）；}\\ \text{不知道（當 } a \text{ 是負數，} n \text{ 是偶數）。}\end{cases}$$

由此得知代數根具有下列性質：

(1) 正數的奇數次根是正數；(2) 負數的奇數次根是負數；(3) 正數的偶次根是一對對立數；(4) 負數的偶次根不屬于有理數。

§48. **正數開方的運算性質：** 正數開方所得的算術根是唯一的，但有理數開方所得的代數根不一定是唯一的，而且有時還不可能。因此這裏只研究正數開方的運算性質，這些性質對代數根來講是不適用的，這點應該特別注意。

(1) 連乘積的算術根等于每個乘數的算術根的連乘積。

即 $\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}$.

根據方根的定義：$(\sqrt[n]{abc})^n=abc$，$(\sqrt[n]{a})^n=a$，$(\sqrt[n]{b})^n=b$，$(\sqrt[n]{c})^n=c$。

根據指數定律：$(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n\cdot(\sqrt[n]{c})^n=a\cdot b\cdot c$。

即 $(\sqrt[n]{abc})^n=(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c})^n$，

$\therefore\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}$. ……………(I)

例如 $\sqrt{9a^2b^2}=\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^2}=3ab$.

$\sqrt[3]{64a^3x^3}=\sqrt[3]{4^3}\cdot\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{x^3}=4ax$.

(2) 乘方的開方可以用根指數除乘方指數。

$\because(a^3)^2=a^6$，　$\therefore\sqrt{a^6}=a^3=a^{6\div2}$；

$\because(3x^4)^3=3^3x^{12}$，　$\therefore\sqrt[3]{3^3x^{12}}=3x^4=3^{3\div3}x^{12\div3}$；

$\because(a^m)^n=a^{n\cdot m}$，　$\therefore\sqrt[n]{a^{n\cdot m}}=a^m=a^{nm\div n}$ ……(II)

(3) 分數的開方可以把分子分母分別開方。

即 $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\because\left(\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}\right)^n=\dfrac{a}{b}$；　又 $\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\dfrac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\dfrac{a}{b}$；

即 $\left(\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}\right)^n=\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n$，$\therefore\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ …(III)

例如 $\sqrt[3]{\dfrac{27}{8a^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8a^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{2^3a^3}}=\dfrac{3}{2a}$.

練　習　題

256. 求下列各數的代數根：

$\pm\sqrt{0.01}$；$\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$；$\pm\sqrt{\frac{9}{16}}$；$\pm\sqrt{25a^2}$；

$\sqrt[3]{8}$；$\sqrt[3]{-27}$；$\sqrt[3]{-0.001}$

257. 求下列各數的算術根：

$\sqrt{0.0001}$；$\sqrt{\frac{9}{16}}$；$\sqrt{a^4}$；$\sqrt[4]{81}$.

258. 化簡下列各式：

$\sqrt{\frac{1}{9}\times 0.01a^2x^2}$；$\sqrt[3]{\frac{1}{8}a^6x^{12}}$；$\sqrt{\frac{1}{16}(b+c)^2y^2}$.

259. 指出下列等式的錯誤：

$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=\sqrt{(-2)\cdot(-2)}=\sqrt{4}=2.$

§49. 數的開平方： 現在首先研究正整數開平方的問題。由于開平方是二乘方的逆運算，所以把整數順次平方，列成下列一張平方表。

0^2	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	…	99^2	100^2	…	999^2	1000^2
0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	…	9801	10000	…	998001	1000000

從這張表裏可以看出：

(1) 在 100 以內的整數，開方後仍得整數做平方根的只有 0,1,4,9,……64,81，等十個數。在 100 以上的整數也有同樣情況。絕大多數的整數開平方後，它的平方根不是整數。

(2) 一位數的平方是兩位數或一位數；兩位數的平方是四位數或三位數；三位數的平方是六位數或五位數；如此類推。所以反過來，兩位數或一位數的平方根是一位數；三位數或四位數的平方根是二位數；五位數或六位數的平方根是三位數；如此類推。

(3) 100 以內的整數要開方求它的整數平方根，只要從平

方表一查就可找出來。

現在研究一下 100 以上的整數，它的平方根怎樣求法。

例 1　求 7225 的平方根。

首先知道這是四位整數，因此它的整數平方根一定是一個二位數，就是十位數字和個位數字所組成的數。設十位數字爲 a，個位數字爲 b，則此平方根數可以二項式 $10a+b$ 表示。

$$(10a+b)^2=7225,$$

即 $100a^2+20ab+b^2=7225$,

把 7225 也加以變形，得：

$$\begin{aligned}7225&=100\times72+25 \qquad (\text{小于 } 72 \text{ 的平方數是 } 64)\\&=100\times64+100\times8+25\\&=100\times8^2+20\times8\times5+5^2\\&=80^2+2\times80\times5+5^2。\end{aligned}$$

與上式比較，容易看出十位數字 a 就是 8，個位數字 b 就是 5 。這樣可得開方的步驟如下：

(1) 把已知數從個位起向左分節，每節二位，最後的也可以是一位。

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{\sqrt{72'25}=85}\\
 & 64\\
\hline
165 & 8\ 25\\
5 & 8\ 25\\
\cline{2-2}
 & \quad\ 0
\end{array}$$

(2) 把最後一節數(72)開方，找出小于它而又最接近它的平方數(64)。這數的平方根 8 就是所求平方根的十位數字，寫在等號右邊。

(3) 從 72 減去 64 得差8，再把下一節數 25 寫在 8 的後面。

(4) 餘數 825 就是$(2\times80\times5+5^2)$，要求 5，只要用十位數

字 8 的 20 倍去除餘數卽得。因此在 825 的左側劃一直綫段，以十位數字的 20 倍 160 寫在直綫段左側，但把個位 0 只留空位不必寫上 0 。

(5) 以 16 除 82 得商 5 ，這 5 就是平方根的個位數字。把這 5 塡在空位上；又在它下面再寫一個 5 ；同時把這 5 寫在十位數字 8 的後面；再以 5 乘 165 的乘積 825 從餘數減去。如無餘數就得到 7225 的平方根爲 85。倘有餘數的話，那末 85 只是平方根數的整數部分。

倘使平方根數是二位以上的數，也可以仿上述步驟先確定最高位數字，逐步求出低位數字。

例 2　求 54779 的平方根。

$$\sqrt{5'47'79}=234\text{ 餘 }23。$$

	4	
43	1 47	……………………$2\times20=40$,
3	1 29	$14\div4$ 得商 3,
464	18 79	$2\times23=46$,
4	18 56	$187\div46$ 得商 4.
	23	

例 3　求 4431025 的平方根。

$$\sqrt{4'43'10'25}=2105$$

	4	
41	43	
1	41	
4205	2 10 25	……21×20 已經大于 210，這時候
5	2 10 25	商數是 0，繼續移節演算，
	0	$2102\div420$ 的商爲 5。

§ 50. **平方根的近似值：**　從平方表裏看起來，整數的平

方根恰好是整數的數是很少的。例如 25 與 36 之間的十個整數的平方根都不是整數。但可以知道這十個整數的平方根一定是在 5 與 6 之間。例如 $5<\sqrt{31}<6$，$\because 25<31<36$。但在 5 與 6 之間的數只有5.…這樣的一種小數，可是小數的平方還是小數，不可能等于整數 31。這就是說 $\sqrt{31}$ 得不到絕對正確的數。一個分數要開平方的話，倘使分子分母都能得到整數平方根，例如 $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$，那末這分數的平方根還是一個分數而且是一個正確的根。但當分子分母中有一個不能得到整數平方根，那末這分數就不能開得絕對正確的平方根。

不能求出正確平方根的數，可以求出根的近似值，這近似值叫做近似根。

例如 $5<\sqrt{31}<6$.

這時候5叫做 $\sqrt{31}$ 的不足近似根，6 叫做 $\sqrt{31}$ 的過剩近似根，誤差都小于 1。

例如 $5.5<\sqrt{31}<5.6$，$\because 30.25<31<31.36$.

這時候 5.5 叫做 $\sqrt{31}$ 的不足近似根，5.6 叫做 $\sqrt{31}$ 的過剩近似根，誤差都小于 0.1。

例如 $5.56<\sqrt{31}<5.57$，$\because 5.56^2<31<5.57^2$.

這時候 5.56 叫做 $\sqrt{31}$ 的不足近似根，5.57叫做 $\sqrt{31}$ 的過剩近似根，誤差都小于0.01.

如此類推，誤差越小，近似根的小數位越多。誤差的小數位和近似根的小數位是一樣的。所以求近似根的方法，就是按照誤差規定，把餘數繼續開方到與誤差小數位相同爲止。事實上還須多開一位，把多開的一位用四捨五入，除掉或在前一位加 1，這樣的結果，可使誤差小于末一位數單位的一半。

例1　求$\sqrt{54779}$的近似根，使誤差小于0.1。

$\sqrt{5'47'79'.00'00}=234.04$（小數點後補寫二節 0）

	4
43	1 47
3	1 29
464	18 79
4	18 56
46804	23 00 00
4	18 72 16
	4 27 84

把第二位小數的 4 捨去，得$\sqrt{54779}=234.0$。誤差便小于0.05。（當然也小于 0.1）

注意：234.0 的這個 0 是不能略去的，因爲第二位小數是四捨的。所以這個近似根是一個不足近似根。倘若第二位小數是五入的話，那末近似根是過剩近似根。經過四捨五入之後，眞正的誤差是不大于 0.1 的一半。

例2　求$\sqrt{53.7}$的近似根，使誤差小于 0.005。

首先小數點 7 的後面補上五個零，分成三節。

$\sqrt{53'.70'00'00'}=7.328$

	49
143	4 70
3	4 29
1462	41 00
2	29 24
14648	11 76 00
8	11 71 84
	4 16

$\therefore\sqrt{53.7}$的近似根是7.33，誤差小于0.005。

例3　求$\sqrt{3\frac{4}{7}}$的近似根，使誤差小于0.005。

把已知分數用除法除到小數第六位。

$$3\frac{4}{7}=3.571428\cdots\cdots$$

$$\sqrt{3'.57'14'28}=1.889$$

$$\begin{array}{r|r}
 & 1 \\
\hline
28 & 2\ 57 \\
8 & 2\ 24 \\
\hline
368 & 33\ 14 \\
8 & 29\ 44 \\
\hline
3769 & 3\ 70\ 28 \\
9 & 3\ 39\ 21 \\
\hline
 & 31\ 07
\end{array}$$

答：近似根爲 1.89。

以上所講的是求正確數的近似根的方法。在實際問題上所獲得的數，它本身也是一個近似數。例如實際度量所得的數往往是近似數。所以要求近似數的近似根時，還應當根據近似計算法來進行計算。事實上碰到要求近似根的時候還可以查表，這樣就更加便利。人民教育出版社編譯的四位數學用表裏的第十二種表就可供查用。

練　習　題

260.　求$\sqrt{3762}$，$\sqrt{3820000}$的近似根，誤差小于1。

261.　求$\sqrt{351.2}$，$\sqrt{5.301}$的近似根，誤差小于0.1。

262. 求$\sqrt{0.00345}$的近似根，誤差小于 0.00005。

263. 求$\sqrt{5\frac{7}{8}}$，$\sqrt{\frac{5}{7}}$的近似根，誤差小于 0.005。

讀者倘備有四位數學用表的話，可以把以上求出來的數與表上查出來的數核對一下。

第十講　二次方程式與不等式

§51. 引言：　在第八講裏，我們已經講過方程式的兩種重要性質，並從這性質推出，保持方程式同値性的條件下去變換方程式的五種方法。根據這方法我們已經會解最簡單的方程式，就是一元一次方程式和多元一次聯立方程式。現在要進一步研究較複雜的方程式卽一元二次方程式。因爲用代數方法去解實際問題所發生的方程式，不一定是一元一次方程式，也常常會發生一元二次方程式。例如解下列問題的時候。

某農業生產合作社組織勞動力打麥，計劃打 960 堆小麥，而實際上每天比原訂計劃多打40堆，因此這工作提前 4 天完成了。求原訂計劃一天打多少堆？原訂計劃是預定多少天完成的？

這問題中包含三個數量，就是每天所打小麥堆數、打麥天數和小麥總堆數。這三個數量間的關係是很明顯的。就是每天打麥堆數乘天數等于小麥總堆數。可以用三種不同的方法佈列方程式，但所佈列出來的方程式都是二次方程式。

(1) 設計劃一天打 x 堆，那末預定 $\frac{960}{x}$ 天可以完成；現在每天打 $x+40$ 堆，只要 $\frac{960}{x+40}$ 天可以完成；這天數比預定天數少 4 天，故得方程式。

$$\frac{960}{x}-\frac{960}{x+40}=4.$$

化簡得，$x^2+40x=9600$ ………………(I)

(2) 設預定 y 天完成，那末計劃每天可打 $\frac{960}{y}$ 堆；但現在每天打 $\left(\frac{960}{y}+40\right)$ 堆，只要 $(y-4)$ 天；所以得方程式：

$$\left(\frac{960}{y}+40\right)\left(y-4\right)=960$$

化簡得，$y^2-4y-96=0$ ………………(Ⅱ)

(3) 設計劃 x 天，每天打 y 堆，那末馬上可以得出方程式。

$$\left.\begin{cases} xy=960 \\ (x-4)(y+40)=960 \end{cases}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{Ⅲ})$$

上面三種方法所列出來的方程式，都不是一次方程式。像方程式(Ⅰ)(Ⅱ)叫它做一元二次方程式。方程式(Ⅲ)叫二元二次聯立方程式。這種二次方程式，是不可能按照一次方程式的解法把它解出來的。原因就是它比一次方程式多包含一項未知數的二次項。但是這類的實際問題倒是常常碰到的。此外，從公式 $V=h\pi r^2$ 計算圓柱體底半徑，從公式 $s=Vt-\frac{1}{2}gt^2$ 計算物體落下時間等等，也都是解二次方程式問題。爲了解決這類問題，我們來研究一元二次方程式的一般解法是必要的。

所有的一元二次方程式，經過化簡，把所有的項移到左邊。而使右邊只剩一個零，寫成：　$\underline{ax^2+bx+c=0}$。

這叫做<u>一元二次方程式的標準式</u>。這裏的二次項係數 a 是不等于零的一個數。而且習慣上都使它爲正數（不是正數的時候可以把方程式變號）。其餘兩個係數 b，c 都是代表任何有理數的。

§ 52. **幾種特殊二次方程式的解法：**

(1) 有一個可容水 1400 立方尺的圓柱形水桶，高爲12尺，

計算它的底半徑。

取π的近似值爲3.14，代入公式，得

$$12\times3.14\times r^2=1400,$$

$$r^2=37.15,$$

$$r=\pm\sqrt{37.15}.$$

把上列數開方誤差小于0.005，得

$$r=\pm6.09.$$

答r有二個根，$r_1=6.09$尺，$r_2=-6.09$尺。但在這問題中負數無意義，所以水桶底半徑r是6尺零9分。

把上面的方程式和二次方程式的標準式比較一下，容易看出它缺少一次項。由是可以得出缺少一次項的二次方程式的解法。

$$ax^2+c=0.$$

第一步，常數項c移到右邊，$ax^2=-c$；

第二步，$\because a\neq0$，兩邊除以a，$x^2=-\frac{c}{a}$；

第三步，兩邊開平方，　　$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

$$\therefore x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}};\qquad x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

所求得的兩個根是一對對立數。但我們已經知道，負數是不能開平方的，這就是說當$-\frac{c}{a}$是負數時，即a和c同號時，方程式沒有根。

例如方程式$3x^2+9=0$與$-x^2-4=0$都是沒有根的。

(2) 現在再研究缺少常數項的二次方程式。

$$ax^2+bx=0.$$

這方程式的左邊，容易看出，有公因式x，把左邊分解因

式。得：

$(ax+b)x=0$ ……………………… (Ⅰ)

這二數的積等于0，那末這兩數至少有一個等于0，得：

$x=o$；或 $ax+b=0$ ……………… (Ⅱ)

(Ⅱ)中的兩個一次方程式同(Ⅰ)的一個二次方程式是同値的。因爲(Ⅰ)的根是(Ⅱ)的根，反過來(Ⅱ)的根也是(Ⅰ)的根。因此我們只要解出(Ⅱ)中的兩個一次方程式就好了。

$$x=0;\text{ 或 } x=-\frac{b}{a},$$

這就是缺常數項的二次方程式的兩個根。

$$\text{卽 } x_1=0; \quad x_2=-\frac{b}{a},$$

這種方程式的特點，就是兩個根總是可以找到的，而且有一個根是零。

例如 解方程式 $3x^2-12x=0$.

$$3x(x-4)=0,$$

但3不等于零，得 $x=0$，或 $x-4=0$，

$$\therefore x_1=0; \quad x_2=4.$$

(3) 一次項和常數項都缺的二次方程式。

$$ax^2=0.$$

因 $a\neq o$，卽 $x\cdot x=0$.

卽 $x=0$ 或 $x=0$. $\therefore x_1=0$; $x_2=0$.

這種方程式的二個根都等于零。

(4) 二次項的係數是1，而且左邊的三項式是可以分解因式的二次方程式。

$$x^2+px+q=(x-a)(x-b)=0.$$

這裏的 a,b，是由 $a+b=-p$，$a\cdot b=q$ 來决定的。這樣的二次方程式與兩個一次方程式 $x-a=o$，$x-b=o$ 同値。

所以 $x=a$，$x=b$，就是二次方程式的兩個根。即 $x_1=a$；$x_2=b$。

這種二次方程式的兩個根總是可以找到的。例如解方程式 $x^2-17x+72=0$。

第一步，分解左邊因式，得 $(x-8)(x-9)=0$.

第二步，每個因式可等于零，得$x-8=0$，或$x-9=0$.

第三步，解這一次方程，得 $x=8$；$x=9$.

即 $x_1=8$；$x_2=9$.

練　習　題

解下列各題中的方程式：

264. 已知 $s=\frac{1}{2}gt^2$；$s=5280$，$s=32.2$，求 t 的值，誤差小于 0.05.

265. $\frac{1}{7}x^2-2.15=0$；$0.43-2x^2=0$. 誤差小于0.005.

266. $7x^2+25=2x^2+150$；$x^2+1=\frac{x^2}{4}+4$；

$\frac{x(9+2x)}{15}=\frac{3x+6}{5}$；$\frac{2x}{3}-\frac{5}{4x}=\frac{7x}{9}-\frac{21}{4x}$.

267. $\frac{13}{2x+3}=\frac{3x+2}{2+x}$，使根的誤差小于 0.0005.

268. $x^2+15x+56=0$；　$x^2-16x=36$；

$5x-6=x^2$；　$2x^2+52x+320=0$.

§53. 一元二次方程式的一般解法：把一元二次方程式的標準式，以二次項的係數 a 遍除各項後，可寫成下列形式：

$$x^2+px+q=0.\ (\text{這裏 } p=\frac{b}{a},\ q=\frac{c}{a})$$

現在利用完全平方的公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，把上式

的前二項配成完全平方。得：

$$x^2+px=-q,$$

$$x^2+2x\cdot\frac{p}{2}=-q,$$

左邊只要加上$\left(\frac{p}{2}\right)^2$就配成完全平方。

$$x^2+2x\cdot\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q,$$

即：$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$

再兩邊開平方，得：

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

$$\therefore\ x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-p}. \qquad (\mathrm{I})$$

即 $x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$； $x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$

例1　解方程式$3x^2-7x=6$.

各項除以3得：$x^2-\frac{7}{3}x=2,$

即：$x^2-2x\cdot\frac{7}{6}=2,$

兩邊加上$\left(\frac{7}{6}\right)^2$：$x^2-2x\cdot\frac{7}{6}+\left(\frac{7}{6}\right)^2=\left(\frac{7}{6}\right)^2+2;$

即：$\left(x-\frac{7}{6}\right)^2=\left(\frac{7}{6}\right)^2+2;$

兩邊開平方，得：$x-\frac{7}{6}=\pm\sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2+2},$

$$\therefore\ x=\frac{7}{6}\pm\sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2+2},$$

$$=\frac{7}{6}\pm\frac{11}{6}.$$

$$\therefore\ x_1=3;\ x_2=-\frac{2}{3}.$$

倘使把上面文字方程式的解答(Ⅰ)看做公式，以相當于p，q的數代入的話，所得解答也是一樣的。如以$p=-\frac{7}{3}$，$q=-2$，代入(Ⅰ)，得：$x=-\left(-\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(-\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)^2-(-2)}$

$$=\frac{7}{6}\pm\sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2+2}=\frac{7}{6}\pm\frac{11}{6}=3\text{ 或 }-\frac{2}{3}.$$

例2. 解方程式 $x^2+3x=\frac{4}{3}$，誤差小於0.0005。

$$x^2+2x\cdot\frac{3}{2}=\frac{4}{3},$$

兩邊各加$\left(\frac{3}{2}\right)^2$，得：$x^2+2x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{4}{3}$；

即：$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{4}{3}$；

兩邊開平方， 得：$x+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{4}{3}}$；

$$\therefore\ x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{4}{3}};$$

$$=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{43}{12}}$$

$$=-1.5\pm1.893.$$

$$\therefore x_1=0.393;\quad x_2=-3.393.$$

如果從二次方程式的標準式，按照配完全平方來解。

$$ax^2+bx+c=0.$$

兩邊除以a，常數項移到右邊，得：

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a},$$

$$x^2+2x\cdot\frac{b}{2a}=-\frac{c}{a};$$

兩邊各加$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$，得：$x^2+2x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$；

卽：$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$；

兩邊開方，得：$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$.

$$\therefore\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (\text{II})$$

這是二次方程式的標準式的解答公式。它比公式(Ⅰ)有更多的代表性。當 $a=1$，$b=p$，$c=q$，代入(Ⅱ)式就可得到(Ⅰ)式。這就說明公式(Ⅰ)僅僅是公式(Ⅱ)的一個特例。但在這公式中含有 b^2-4ac 的開平方根。根據只有正數可以開平方的限制，那末當 $b^2-4ac<0$ 時，二次方程式就沒有解答。所謂沒有解答的意思，就是現在還找不出一個能滿足方程式的數，但是將來數概念擴大以後，還是可以找到的。所以現在解方程式以前，最好先計算一下 b^2-4ac 這個值，判別一下原方程式是否有解。倘使 $b^2-4ac<0$，那就是說這方程式無解，而且不必繼續進行運算。

例1　解方程式 $3x^2-2x+7=0$

這裏 $a=3$，$b=-2$，$c=7$，

$b^2-4ac=(-2)^2-4\times3\times7=-80<0$，∴此方程式無解。

例2　解方程式 $3x^2-10x+3=0$

這裏 $a=3$，$b=-10$，$c=3$。

$b^2-4ac=(-10)^2-4\times3\times3=64>0$

而且 64 還是一個完全平方數，它不僅有解，而且它的正確根可以求出來。代入公式

$$x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\times3\times3}}{2\times3}=\frac{10\pm8}{6}$$

$\therefore x_1=3;\quad x_2=\frac{1}{3}.$

例3 解方程式 $4x^2-4x-7=0.$

這裏 $a=4,\ b=-4,\ c=-7.$

$b^2-4ac=(-4)^2-4\times4\times(-7)=128>0.$

這方程式有解，又因爲128不是完全平方數，所以只能求出它的兩個近似根。 卽 $x_1=1.914;x_2=-0.914.$ 誤差小于0.0005。

練　習　題

解下列方程式：

269. $10x^2+7x=12;$　　270. $x^2-4x=60;$

271. $x^2+4x=2;$　　272. $9x^2+6x-17=0;$

273. $(x-2)(x+3)=x(5x-9)-2;$

274. $\frac{x}{2}[2+4(x-1)]=190;$

275. $\frac{2x+1}{x+5}+\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x+5}+\frac{3}{x-3};$

276. $\frac{2x^2}{x^2-4}-\frac{x}{2-x}=1+\frac{x}{x+2};$

277. 從公式 $s=vt+\frac{1}{2}gt^2$ 中，解出 t 。

278. 從公式 $T=2\pi\gamma h+2\pi\gamma^2$ 中，解出 γ。

279. 某農民把麥子賣給國家，賣出的小麥較大麥多10斗，小麥共值280元，大麥共值180元，但知1斗小麥較1斗大麥貴1元。求小麥和大麥共賣出多少斗？

280. 某農場有一長方形菜地共36公頃。與寬邊平行劃一

條綫，把菜地分成大、小兩塊，它們面積的比爲 2:1，小塊的長較原菜地的寬少 100 公尺，求此菜地之長及寬。

281. 火車誤點 16 分鐘，打算在 80 公里的路上趕上正常的時間，所以每小時必須加快 10 公里，求最初火車的速度。

282. 小船在江上往來于 A, B 兩城之間，共需 3 小時 45 分，兩城的距離爲 6 公里，水流速度爲每小時 3 公里，求船行的速度。

283. 兩力作用于一點，其方向恰成直角，兩力的比爲 2:5，合力爲 37.7 公斤，求兩力（誤差小于 0.05 公斤）。

§54. **不等式及其應用：** 不等式的符號我們已經很熟悉。在算術裏講到數的大小的時候，曾經用過不等式的符號，例如 $8>5$；$\frac{4}{3}<2<3$；$0.75<1.2<3$ 等等。我們講到兩個有理數大小的時候，也用過這符號，例如 $7>-2$；$-45<-17<0$。上一節中用 $b^2-4ac<0$ 表示 b^2-4ac 代表負數。以上這些式子都叫做不等式。倘使只用一個不等式的時候，它也有左邊和右邊的名稱，這與等式一樣。在幾何學裏也常常用到不等的概念，例如三角形 ABC 內，若 $AB>BC$ 則 $\angle C>\angle A$；若 C 是直綫 AB 外的任一點，則 $AB<AC+CB$。等等。倘使有任意兩個量或兩個數 a 與 b，拿來比較的時候，那末總可以得出一個結果。不是 $a>b$ 就是 $a=b$ 或 $a<b$，這三者必居其一，第四種情況是沒有的。這 $a>b$ 與 $a<b$ 就是用不等號把兩個數連接起來的形式，這就叫做不等式。而 $a=b$ 叫做等式。$a>b$ 讀做 a 大于 b，$a<b$ 讀做 a 小于 b。

倘使只曉得它們不等；有時也用 $a\neq b$ 來表示，讀做 a 不等于 b。若 a 大于 b 或等于 b，寫做 $a\geq b$，讀做 a 不小于 b。若 a 小于 b 或等于 b，寫做 $a\leq b$，讀做 a 不大于 b。但在實際問

題上，當兩個具體的量互相比較的時候，不一定都說做大于小于，還要看具體情況，有各種不同的說法。例如杭州的六和塔比保叔塔高；錢江大橋比西湖的斷橋長；中國人口比美國人口多；父親比母親胖；妹妹比弟弟體重輕等等。把這些具體的量，經過度量而得到數之後，再加以比較，那就是大于小于的問題。例如把妹妹弟弟的體重稱一稱，妹妹是28斤，弟弟是32斤，這時候$28<32$。

不等式在數學上有它一定的作用：

(1) 應用不等式可以把近似值的誤差界限表示出來。例如度量寫字台的長 l 的近似值爲 1.27 公尺，可以寫做 $l\approx1.27$ 公尺，或 $l=1.27$ 公尺(±0.005)，如用不等式可寫做：

$$1.265\text{公尺}\leq l\leq1.275\text{公尺}。$$

應用不等式可以把某一個數的範圍表示出來。例如 n 代表三位整數，那末 $100\leq n\leq999$。設 Q 代表斗內所蓄的水量，那末 $Q\leq1$ 斗。設 a 代表母親比女兒大的年紀，那末 15 歲$<a<50$ 歲。

(2) 應用不等式可以把一羣的數按大小順序排列起來。例如：

$$-3<-2<-1<0<1<2;$$

$$16>8>4>2>1>\frac{1}{2}>\frac{1}{4}>\frac{1}{8}。$$

(3) 應用不等式可以把數的正負表示出來。

若 $a>0$，　a 一定是正數。

若 $a\leq0$，　a 表示不是正數。

若 $ab>0$，　a,b 一定同號。

若 $ab<0$，　a,b 一定異號。

§55. **不等式的性質：** 由于客觀事物中存在着兩個量不等的種種事實，所以代數裏才產生“不等式”這一概念。現在再

進一步從實際事例來理解不等式的性質。

哥哥比弟弟高，那末弟弟一定比哥哥矮。設哥哥身高爲 a 尺，弟弟爲 b 尺，上面這句話以式表示如下：

若 $a>b$，則 $b<a$。（不等式性質Ⅰ）

同理若 $a<b$，則 $b>a$。

這式子說明兩個不等數具有反逆性。這性質如用語言來講是：當不等式的左右兩邊對調時，不等號反向。

城隍山比玉皇山低，玉皇山比五雲山低，那末城隍山也比五雲山低。設城隍山，玉皇山，五雲山的高度各爲 a、b、c 公尺。上面的事實用式表示爲：

若 $a<b$，$b<c$，則 $a<c$。（不等式性質Ⅱ）

這式子說明三個不等數的傳遞性。如以數軸上的點來表示，A 點在 B 點的左邊，B 點在 C 點的左邊，那末 A 點也在 C 點的左邊。如用語言來說：第一數小于第二數，而第二數小于第三數，那末第一數也小于第三數。

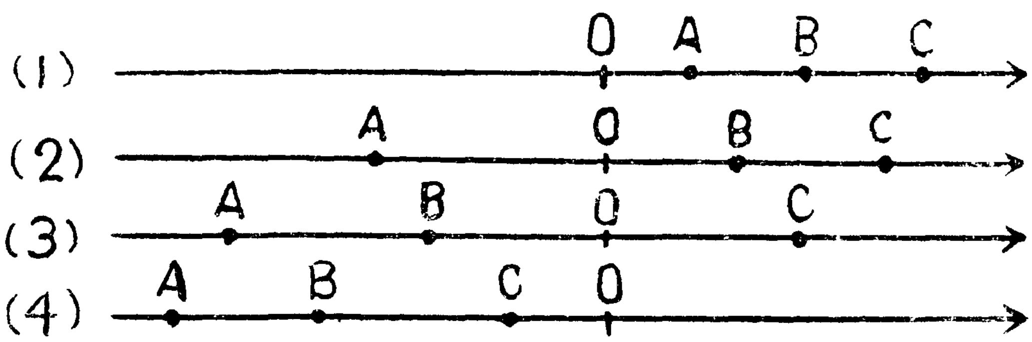

圖 23.

父親的年紀比兒子大，那末幾年後或幾年前父親的年紀還是比兒子大。

設父年爲 a 歲，子年爲 b 歲，m 年後或 m 年前，父親年紀爲 $a+m$ 歲或 $a-m$ 歲，兒子年紀爲 $b+m$ 歲或 $b-m$ 歲。以式表之如下：

若 $a>b$，則 $a+m>b+m$，或 $a-m>b-m$.

（不等式性質Ⅲ）

這性質如以數軸上的點來表示。如圖24

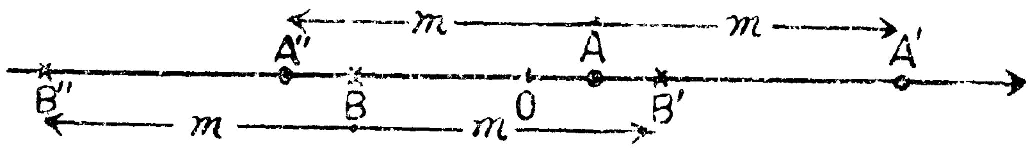

圖 24.

A 點在 B 點的右邊，若 A、B 同時向右移動 m 的距離，那末 A' 還是在 B' 的右邊；若 A、B 同時向左移動 m 的距離，那末 A'' 還是在 B'' 的右邊。如用語言來說：不等式的兩邊同加或同減某數，那末不等號方向不變。從這性質，和方程式的性質一樣可以推得一個結論：在不等式中，可把任何項變號後移到另一邊去。

例如 $3x-5>7$，兩邊各加 5 可得 $3x>7+5$。

有兩塊長短不等的布，若各接長幾倍或縮短幾倍，那末長的還是長，短的還是短。設長的一塊布爲 a 尺，短的一塊爲 b 尺，各接長或縮短 m 倍。以式表示如下：

$$\text{若 } a>b,\ \text{則 } am>bm,\ \text{或 } \frac{a}{m}>\frac{b}{m},\ \text{（不等式性質IV）}$$

這性質如以語言來說：不等式的兩邊同以正數乘或除，那末不等號方向不變。

現在研究一下不等式兩邊變號問題。即證明不等式的性質V：若 $a>b$，則 $-a<-b$。

第一種情况：設 a,b 都是正數，從數軸上看，A 點在 B 點的右邊，$\because -a,-b$ 都是 a,b 的對立數，所以代表 $-a,-b$ 的兩點 A',B'，都在原點的左邊，$\because OA>OB$，$\therefore OA'>OB'$，這時候 A' 在 B' 的左邊，$\therefore -a<-b$。

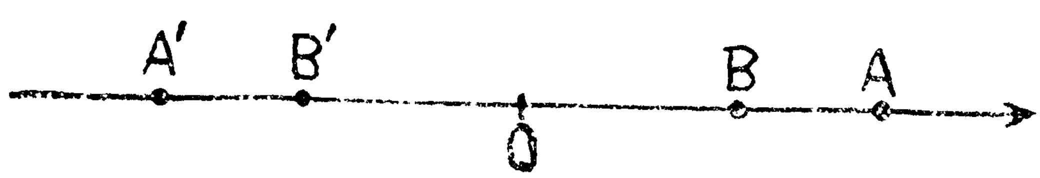

圖 25.

第二種情况：設 a 是正數，b 是負數。從數軸上看，A 點在 B 點的右邊，這時 $-a$ 是 a 的對立數而且是負的，所以代表 $-a$ 的點 A' 在原點的左邊。但 $-b$ 是 b 的對立數而且是正的，所以代表 $-b$ 的點 B' 在原點的右邊。即 A' 在 B' 的左邊，$\therefore -a<-b$。

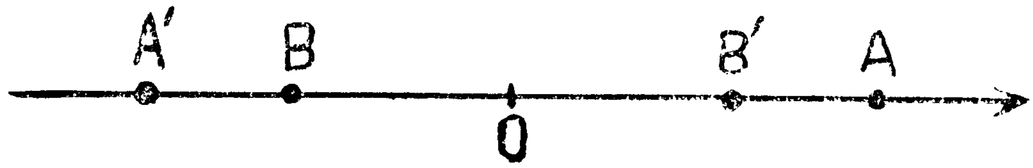

圖 26.

第三種情况：設 a,b 都是負數，$\because >b,a$ 所以 A 點在 B 點的右邊，這時候 a,b 的對立數 $-a,-b$ 都是正數。$\because OA<OB$，$\therefore OA'<OB'$，所以 A' 在 B' 的左邊，$\therefore -a<-b$。

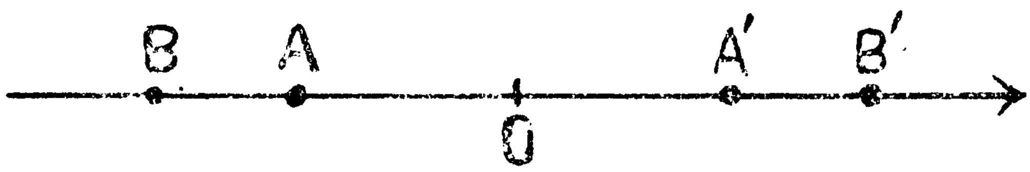

圖 27.

這性質如用語言來說：不等式的兩邊都變號時，不等號要變向，大于變小于，小于變大于。

從(Ⅳ)(Ⅴ)兩性質可以推得一個結論：不等式的兩邊同以負數乘或除，那末不等式變號。上面的性質舉例說明如下：

例 1　$-3<16$，那末 $-3+5<16+5$，$-3-21<16-21$；
即　$2<21$，$-24<-5$。

例 2　$-27<-9$，那末 $-27\times3<-9\times3$，即 $-81<-27$；
$-27<-9$，那末 $-27\div3<-9\div3$，即 $-9<-3$。

例 3　$-27<-9$，那末 $-27\times(-3)>-9\times(-3)$，
即 $81>27$；
$-27<-9$，那末 $-27\div(-3)>-9\div(-3)$，
即 $9>3$。

這裏應當注意，當不等式兩邊用字母或代數式來乘除時，不要認爲表面上沒有負號，于是不等號不變。要曉得字母或代數式可能代表負數的。遇到這種情況，就應當仔細分別清楚。

例如 $ax>b$，兩邊除以 a，若 $a>o$，則 $x>\frac{b}{a}$ 若 $a<o$，則 $x<\frac{b}{a}$.

§56. **一元一次不等式的解法：** 不等式也分兩種。一種是式中的字母以任何數代入，不等式永遠成立，例如 $x^2+3>2$；$(a-b)^2>o$；$a^2+b^2>2ab$ 等等，叫做絕對不等式。凡表示兩個數大小的不等式，例如 $-5<2$，也屬于這一種。這和等式中的恆等式相類似。另一種是式中的字母只有某些範圍的數代入，不等式才能成立，別的範圍内的數代入，不等式不能成立。例如 $x-5>3$，這不等式中的 x，只有大于 8 的數代入，不等式才能成立；若 x 以不大于 8 的數代入，不等式就不成立。這種不等式叫做條件不等式。$x>8$ 叫做不等式 $x-5>3$ 的解。由于不等式中含有一個未知數而且是一次的，所以也叫做一元一次不等式。它的標準形式是 $ax+b>o$ 或 $ax+b<o$。這裏的 a,b 是已知數，而且 a 不等于 o。現在舉例說明這類不等式的解法：

例 1　解不等式 $\frac{1}{2}(x-3)<\frac{3}{4}x-\frac{1}{3}$.

兩邊乘以最小公分母12，得：

$$6x-18<9x-4.$$

含未知數的項移到左邊，其餘的項移到右邊，得：

$$6x-9x<18-4.$$

合併同類項，得：$-3x<14$.

兩邊除以-3，得：$x>-\frac{14}{3}$，　答：$x>-\frac{14}{3}$.

注意：解不等式的每一步驟，都要根據不等式的性質。不等式的解可以是無限多的，上面的例只要大于$-\frac{14}{3}$的無限多個數，都是這不等式的解。

例 2　解不等式 $2x-8>0$.

$$2x>8,\quad \therefore x>4.$$

這不等式也可繪圖來解釋，因爲左邊是一個 x 的一次二項式，若以 y 來代表這二項式，可得 $y=2x-8$。我們知道，把這方程式的圖象繪起來是一條直綫。這直綫當 $x=4$, $y=0$,即直綫與橫軸相交于點$(4,0)$。若 $x>4$,直綫在橫軸的上方,則 y 是正値，即 $2x-8>0$。從圖象中看出：當 $x>4$ 的時候，直綫上點的縱坐標是正的，如圖中陰影的一部分,所以 $x>4$ 就是不等式的解。

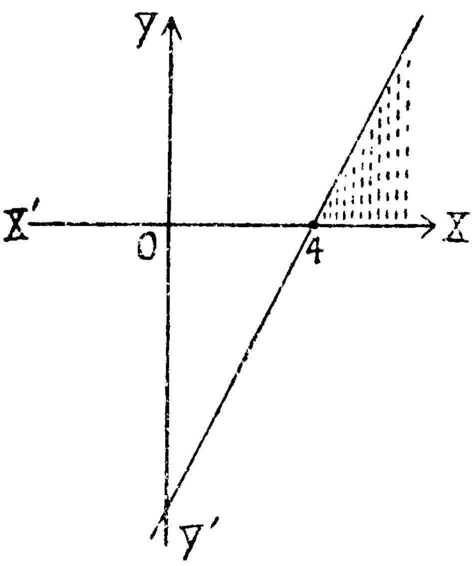

圖28.

例 3　用圖解法解不等式 $x+3>-x-1$,

這不等式的兩邊都是 x 的一次二項式，設

$$y_1=x+3\cdots\cdots\cdots(1);\qquad y_2=-x-1\cdots\cdots\cdots(2)。$$

分別繪出(1)與(2)的圖象，容易看出在二直綫交點右邊的部分，所有 $y_1>y_2$ 。所以滿足不等式的解答，就是交點右面所有橫坐標大于 -2 的點。即 $x>-2$，是不等式的解。

如用代數解法解出來也是$x>-2$。

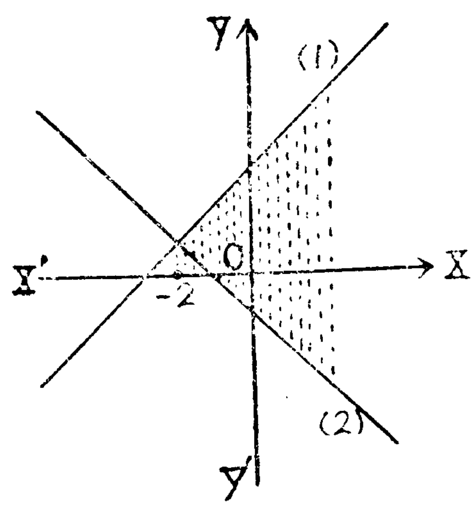

圖 29.

凡能分解成一次因式的一元二次不等式，也是容易解的。

例 4　解不等式 $x^2+2x-3>0$。

左邊分解因式，得

$(x+3)(x-1)>0$;

兩因式的積大于零，這兩因式一定要同號：

即(1) $\begin{cases} x+3>0, \\ x-1>0, \end{cases}$ 或(2) $\begin{cases} x+3<0, \\ x-1<0, \end{cases}$

由(1)，得 $x>-3$，$x>1$，同時滿足這兩不等式的一定是它的共同的值，所以得解 $x>1$。

由(2)，得 $x<-3$，$x<1$，它的共同的值是 $x<-3$，所以得解 $x<-3$。

答：$x>1$；或 $x<-3$。

例 5 解不等式 $x^2-x-6<0$。

左邊分解因式，$(x-3)(x+2)<0$，

兩因式的積小于零，這兩因式一定要異號。

即(1) $\begin{cases} x-3>0, \\ x+2<0, \end{cases}$ 或(2) $\begin{cases} x-3<0, \\ x+2>0。 \end{cases}$

由(1)，得 $x>3$，$x<-2$，要同時滿足這對不等式的值是找不出的，所以這組無解。

由(2)，得 $x<3$，$x>-2$，這是所求的解，而且可以寫成一個不等式，即 $-2<x<3$.

練　習　題

284. 解下列不等式：

(a) $3x+2>8x-7$;　(b) $\frac{3x-1}{2}>\frac{4x-5}{3}$.

285. 解下列不等式，如無解說明理由。

(a) $2(x-1)-x>3(x-1)-2x-5$;

(b) $2x-2<(x-3)-(5-x)$.

286. 解不等式 $2x-7<0$，並用圖解釋。

287. 圖解不等式 $3x-2<5x+1$，並用代數解法核驗.

288. 解下列不等式：

(a) $3x-x^2+10>0$,　(b) $x^2+4x+3<0$.

習 題 答 案

7. 每畝田平均產量 $\frac{ma+nb}{m+n}$ 斤；多 $ma-nb$ 斤.

8. 汽船速度 $\frac{a+b}{2}$ 里；水流速度 $\frac{a-b}{2}$ 里.

9. 共用 $ma+2\times\frac{b}{10}$ 元.

10. 偶數 $2m$；奇數 $2m+1$ 或 $2m-1$.

11. $100c+10b+a$.

12. $ma=n$.

13. $2x=vx$.

14. $2\pi a^2+2\pi a\cdot h=t$；$\pi a^2\cdot h=\mathrm{v}$.

15. $(c-2)+c+(c+2)=s$.

16. $b=a\times p\%$.

17. $p=m\div a^3$.

18. $3a=x$.　　19. $a\times 60=b$.

20. 先從 b 減去 c，把這個差與 a 相加，再從 m 減去這個和.

21. c 除以 a 的商再乘以 b；又求 b 與 n 的積；然後從第一個積減去第二個積.

22. a 除以 b 的 2 倍；又 a 與 b 的和的 3 倍，然後從第二個積減去第一個積.

23. 先從 a 減去 b，再以差乘 a，乘 a 再乘 a.

24. 先求 a 乘以 b 的積；c 除以 d 的商；又 d 的 3 倍，然後

第一個積加商再加第二個積.

25. a 的平方的 2 倍加上 b 乘以 a 的積，再從和減去 c.

26. b 的平方與 a 的 3 倍的和，再把這和立方，最後乘 2 .

27. 從 m 減去 n ，把這差 k 次乘方，最後除以 k.

28. a 的幾次乘方再乘 3，從這積減去 b；再以 a 乘 n 的積乘這差.

29. a 的平方減去 b 的五次方，把這差與 a 的平方根相加.

(30題—35題，設 a、c 代表任何數；且 a 大于 b .)

30. $(a+b)(a-b)$.　　31. $(a-b)^3+(a^3-b^3)$.

32. a^2+b^2-2ab.　　33. $\sqrt[3]{a^2+b^2}$,

34. $n\sqrt{a}-n\sqrt{b}$.　　35. $a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$.

36. $\frac{23}{24}$.　　37. $\frac{1}{5}$.

38. 9 , 15.　　39. 10, $\frac{65}{81}$.

41.

原　數	$+7$	-3.5	$+186.12$	$-7\frac{3}{5}$	$-(-8)$卽8	$-(+32)$卽-32
它的對立數	-7	$+3.5$	-186.12	$+7\frac{3}{5}$	-8	$+32$
它的絕對值	7	3.5	186.12	$7\frac{3}{5}$	8	32

原　數	$-[-(-5)]$卽-5	$-\{-[-(+5)]\}$卽-5
它的對立數	$+5$	$+5$
它的絕對值	5	5

42. $-7\frac{4}{5}<-7\frac{2}{3}<-0.301<+\frac{1}{316}<5\frac{1}{2}$.

43. -64.　　44. $5\frac{2}{3}$.　　45. -0.9.

46. 3.　　47. -4.　　48. $4\frac{11}{18}$.

49. $9\frac{1}{3}$　　50. 2.　　51. 5.52.

52. 16.　　53. 在原地後 4 步.

54. 獲利 4125 元.

55. (1) -35;　(2) -150;　(3) 56;

(4) 0.0001;　(5) -6;　(6) $1\frac{1}{3}$;

(7) -20;　(8) -7.3084;　(9) $-\frac{1}{18}$;

(10) 108.

56. (1) $-11\frac{4}{7}$;　(2) 9;　(3) -9;

(4) 5;　(5) $\frac{13}{24}$;　(6) $-1\frac{1}{3}$;

(7) -2;　(8) 5;　(9) $\frac{9}{14}$;

(10) 30030.

57. (1) $-\frac{1}{6}$;　(2) $-4\frac{5}{6}$.

58. (1) $12\frac{1}{4}$;　(2) $12\frac{1}{4}$;　(3) $-8\frac{3}{4}$;

(4) $-8\frac{3}{4}$;　(5) $-42\frac{7}{8}$;　(6) $-42\frac{7}{8}$.

59. $-9x+4y-11z$.　　60. $x-13$.

61. $-a^3+3a^2b-4ab^2+b^3$.

62. (1) $3a^2+(-2ab+5a^2b^2-7\frac{1}{2})=3a^2-(2ab-5a^2b^2+7\frac{1}{2})$.

(2) $6x^3+(5x^2-3x-\frac{5}{7})=6x^3-(-5x^2+3x+\frac{5}{7})$.

63. 第一式的值$=-42\frac{7}{8}$；第二式的值$=42\frac{7}{8}$.

64. 第一式的值$=-42\frac{7}{8}$；第二式的值$=42\frac{7}{8}$.

65. $\frac{1}{3}a+\frac{13}{12}b$.　　66. $x^4+x^2y^2+y^4$.

67. $-\frac{5}{6}a^2-\frac{33}{20}ab+\frac{7}{6}b^2-\frac{2}{5}a^2b^2$.

68. $1.55a^2-3ab-17.25ac-8.875bc$.

69. $7m-9n^2+5m^2$.

70. $-4xy$.

71. $2a^3-3ac+6bc+3c^2+ab-3b^2$.

72. $-(a+b)^3+5(a+b)^2-(a+b)$.

73. $+2b$

74. $3+(ac+ad-ab)+(-xy-xz)$ 或 $3-(ab-ac-ad)-(xy+xz)$.

75. $\frac{5}{4}a^2-\frac{7}{4}ab+\frac{5}{3}b^2$,　$\frac{1}{4}a^2-\frac{5}{4}ab-\frac{4}{3}b^2$.

76. $12ab^2cxy$.　　77. $-4a^2b^5c^3y^2$.

78. $\frac{3}{4}x^3y^5z^4$.　　79. $7.75a^5x^5$.

80. $84a^6b^6$.　　81. $-\frac{35}{12}a^6b^6c^6$.

82. $121a^2x^4$;　$25a^4b^4x^2$;　$0.01a^2b^4x^6y^2$.

$1331a^3x^6$;　$125a^6b^6x^3$;　$-0.001a^3b^6x^9y^3$.

83. (1) $\frac{1}{9}a^4b^2c^6$;　(2) $-\frac{1}{27}a^6b^3c^9$;

(3) $-\frac{1}{243}a^{10}b^5c^{15}$;　(4) $-\frac{1}{243}a^{10}b^5c^{15}$;

(5) $\frac{1}{729}a^{12}b^{6}c^{18}$.

(3) 與 (4) 的結果相同，根據指數定律(Ⅰ).

84. $2a^3-6a^2b+6ab^2-4b^3$.

85. $4x^2-9y^2+6yz-z^2$.

86. $6x^4-4x^3-7x^2-3x-1$.

87. $c^4-9c^2d^2-24cd^3-16d^4$.

88. $a^6-3a^4x^2+3a^2x^4-x^6$.

89. x^6-y^6.

90. $6x^3+4x^2-14x+4$.

91. $a^2+2ab+b^2$; $a^2-2ab+b^2$; a^2-b^2;

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; $a^3-3a^3b+3ab^2-b^2$;

$x^2+8x+15$.

92. $9x^2+12xy+4y^2$.

93. $0.09x^4+0.2ax^2y+\frac{1}{9}a^2y^2$.

94. $4a^6y^4-12a^3by^3+96^2y^2$.

95. $\frac{4}{9}a^6b^2-\frac{2}{3}a^3bxy+\frac{1}{4}x^2y^2$.

96. $1\frac{7}{9}-25a^2x^4$.

97. $27a^3+\frac{81}{2}a^2bx^2+\frac{81}{4}ab^2x^4+\frac{27}{8}b^3x^6$.

98. $x^4-y^4-2xy^3-x^2y^2$.

99. $\frac{8}{27}p^3n^3-p^2n^2m^2+\frac{9}{8}pnm^4-\frac{27}{64}m^6$.

100. $25x^4-20x^2y+4y^2+\frac{10}{3}x^2y^2-\frac{4}{3}y^3+\frac{1}{9}y^4$.

101. $8a^3+12a^2b+6ab^3+b^3-12a^2-12ab-3b^2+6a+3b-1$.

102. $x^4-10x^3+25x^2-36$.

103. 999975; 2475; 6084; 996004;

3584; 1061208; 132651; 217081801;

104. $-\frac{5}{2}a^2xy$; -7^2xy.

105. $5a-2xy-1$.

106. $13a^4-20\cdot 8a^3+39$.

107. $c+d+x+y$.

108. 商式為$\frac{5}{2}x-\frac{1}{4}$， 餘式為$\frac{7}{4}x-\frac{5}{4}$.

109. 商式為 $3x^3+x^2+3x+4$，餘式為 0 .

110. 商式為 x^3+2x^2-3，餘式為 0 .

111. $16x^4-8ax^3+4a^2x^2-2a^3x+a^4$.

112. $\frac{1}{9}+\frac{1}{3}ax^2+a^2x^4$.

113. $\frac{4}{25}a^2x^2-\frac{1}{5}axy^3+\frac{1}{4}y^6$.

114. $x^3+x^2(a-y)+x(a-y)^2+(a-y)^3$.

115. $32x^5+16x^4+8x^3+4x^2+2x+1$.

116. $10(2a+3b+4)$. 117. $3a^3(-3ab+5c+7d^3)$.

118. $2x^{n-2}(x^2+2xy-4y^2)$.

119. $(x-2)(b-a)$. 120. $b(c-d)(b^3-c^2x)$.

121. $3(5a-2b)$. 122. $(a-b)^2(3a-b)$.

123. $(x-y)(2k+1)$.

124. $(x-y+z)(2a+6b+9c)$.

125. $3(2x^2-x+1)(a+5b+7)$.

126. $(2x-y)^2$. 127. $a(5b-4x)^2$.

128. $-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)^2$. 129. $2(5x^5+1)^2$.

130. $a^2(2b+5c)(2b-5c)$.

131. $3a(x+y+z)(x+y-z)$.

132. $(8a+7b)(-4a-11b)$.

133. $x(4x-1)(4x^2-7x+2)$.

134. $(2ax^2+1)^3$.　　135. $(3m-\frac{1}{2}np)^3$.

136. $(x+4)(x-2)$.　　137. $(y-8)(y+7)$.

138. $3a(x+8)(x+7)$.　　139. $(p-10)(p-4)$.

140. $(1-17y)(1+4y)$.　141. $(x+y-7)(x+y+2)$.

142. $(3-2a)(9+6a+4a^2)$.

143. $5x(m+n)(m^2-mn+n^2)$.

144. $(2x-y)(16x^4+8x^3y+4x^2y^2+2xy^3+y^4)$.

145. $(2a+1)(4a^2-2a+1)(2a-1)(4a^2+2a+1)$.

146. (1) 3380.　(2) 1400.

147. 原式$=8n$.　所以能被 8 整除.

148. $(x-y)(x+7)$.　　149. $(x-5)(x^2-2)$.

150. $2(a-x)(5a-7)$.　151. $(3a+2x)(5b+3a-2x)$.

152. $(m^2+3n)(m^2-3n-7a)$.

153. $3a^2(1+y-x)(1-y+x)$.

154. $(a-b+2c)x(5y+2x)$.

155. $(p-1+2x-y)(p-1-2x+y)$.

156. $(a+b-8)(a+b+1)$.

157. $(2x-3y+6a)(2x-3y+2a)$.

158. $(x+y)(x+2y)(x+5y)$.

159. $(x-1)^2(x+2)$.

160. $(x+1)(3x^2-x-1)$.

161. $(x^2+x+1)(2x^2+3)$.

162. $(9x^2+1+3x)(9x^2+1-3x)$.

163. $(x+2)(x+3)(x-1)$.

164. $(ab+2cd+ac-2bd)(ab+2cd-ac+2bd)$.

165. 最高公因式$=2^2\times 3x^2y^2z^4$;

最低公倍式$=2^4\times 3^2x^3y^3z^5$.

166. 最高公因式$=3a$; 最低公倍式$=6a^2b(a+b)$.

167. 最高公因式$=5(m+1)$;

最低公倍式$=10(m+1)^2(m-1)$.

168. 最高公因式$=3x-y$;

最低公倍式$=2(3x-y)^2(3x+y)(9x^2+3xy+y^2)$.

169. 最高公因式$=1$;

最低公倍式$=(x+2)(x-1)(x-3)$.

170. 最高公因式$=x^2+1$;

最低公倍式$=(x-1)(x+1)(x^2+1)$.

171. $\frac{12x}{21y}$; $\frac{17}{13(a+b)}$; $\frac{4-14a}{5a-6}$; $\frac{2ax^3-x^2}{x^2-2x+2}$.

173. $\frac{a^2x^2-b^2}{ax+b}$; $\frac{a^3x^3+b^3}{ax+b}$; $\frac{acx^2+(bc+ad)x+bd}{ax+b}$.

174. $\frac{x}{6y^4}$; $\frac{a-3}{a-5}$; $\frac{1}{x^2-y^2}$;

$\frac{5+a}{6-a}$; $\frac{-(3x+7y)}{4xy}$; $\frac{x-4}{x-3}$.

175. (1) $\frac{20bcx^2}{60abcx^3}$, $\frac{15acx}{60abcx^3}$, $\frac{12ab}{60abcx^3}$;

(2) $\frac{a(x+a)}{x^2-a^2}$, $\frac{-x(x+a)}{x^2-a^2}$, $\frac{a^2}{x^2-a^2}$;

(3) $\frac{3(a-3)}{(a+1)(a+2)(a-3)}$, $\frac{5(a+2)}{(a+1)(a+2)(a-3)}$;

(4) $\frac{a^2-x^2}{a+x}$, $\frac{(a+x)^2}{a+x}$, $\frac{a^2+x^2}{a+x}$;

(5) $\frac{24x(b+x)}{12(b^2-x^2)}$, $\frac{6b(b+x)}{12(b^2-x^2)}$, $\frac{-9x^2}{12(b^2-x^2)}$,

$\frac{10b^2}{12(b^2-x^2)}$.

176. $\frac{3x+3y}{x^2-y^2}$.　　177. 0.

178. $\frac{1}{x+3}$.　　179. $\frac{x+y+z}{x^2+y^2}$.

180. 1.　　181. $\frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab}$.

182. $\frac{x}{x+1}$.　　183. $-\frac{a+b}{a^2+b^2}$.

184. $\frac{2x(x-y)(x^2-xy+y^2)}{3y(x^2+y^2)}$.

185. $\frac{m^2(m^2+n^2)(m^2+mn-n^2)}{(m+n)^2(m^2-mn+n^2)}$.

186. $\frac{x^2+x-1}{x^2-3}$.　　187. $4(3x+8)$.

192. $y=x$ 的圖象是第一象限與第三象限的分角綫；$y=-x$ 的圖象是第二象限與第四象限的分角綫；這兩條分角綫互相垂直.

193. $y=3x+5$ 的圖象是一條直綫，它和 $y=3x$ 的直綫平行，且在直綫 $y=3x$ 的上方 5 個單位.
$y=3x-5$ 也是與直綫 $y=3x$ 平行的，不過它在直綫 $y=3x$ 的下方 5 個單位.

194. $y=-2x$ 的圖象是一條通過原點，位在第二、三象限的一條直綫。$y=-2x+3$ 的圖象是一條直綫，它和直綫 $y=-2x$ 平行，且在直綫 $y=-2x$ 的上方 3 個單位.

195. $\frac{3}{4}$ 小時.　　196. 11592 塊.

197. $3\frac{3}{8}$小時.

198. 鋼 305.19%； 發電量 219%； 原煤 177.85%；
發電機 393.83%(764.3%)；
電動機 148.68%(164%)；
水泥 209.79%； 機製紙 176.08%；
棉布 146.84%； 糖 275.5%；

201. 3:1:1. 202. $9a:8b:12c$.

203. 16:24:30:55.

205. 銅$71\frac{1}{2}$公斤， 錫 143 公斤， 銻 214 $\frac{1}{2}$公斤.

207. 氫 34.7 公斤， 氧 277.7 公斤.

208. 31.25 厘米. 209. 可減少 60 頁.

210. 0.1275 噸.

211. 2. 212. 1. 213. −4.

214. 2. 215. 1. 216. 5.

217. 12. 218. 5. 219. $\frac{2}{7}$.

220. $\frac{3}{2}$. 221. $\frac{a}{2}$. 222. $\frac{17}{3a-5}$.

223. $f=\frac{pq}{p+q}$； $p=\frac{fq}{q-f}$； $q=\frac{fp}{p-f}$.

224. $p=\frac{2A}{h}-B$.

225. $x=4$, $y=3$. 226. $x=5$, $y=7$.

227. $x=y=-2$. 228. $a=10$, $b=6$.

229. $n=19$, $m=3$. 230. $x=5$, $y=2$.

231. $x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}$； $y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$

232. $x=\dfrac{b(1-m)}{a-nm}$； $y=\dfrac{b(n-a)}{a-nm}$.

233. $x=1$，$y=3$. 234. $x=4.5$，$y=1$.

235. $x=2$，$y=3$，$z=-4$.

236. $x=15$，$y=12$，$z=10$.

237. $x=1$，$y=\dfrac{1}{2}$，$z=\dfrac{1}{3}$，$u=\dfrac{1}{4}$.

238. $x=1$，$y=2$，$z=3$，$u=4$.

239. $x=2$，$y=3$，$z=4$.

240. $x=\dfrac{2}{3}$，$y=2$，$z=-1$.

241. 水草原 60 公頃，乾草原 100 公頃.

242. 大豆割 4 天，高粱割 5 天.

243. 一個農民每天收割 0.5 頃，一架收割機每天收割 3.5 頃。

244. 大豆 749 公斤，高粱 1309 公斤.

245. 熟練工人 40 人，半熟練工人 90 人.

246. 20%.

247. 甲車每小時 30 公里，乙車每小時 35 公里.

248. 水流速度每小時 $\dfrac{mu}{2t(t+u)}$ 公里.

249. 甲距支點 12 公厘，乙距支點 9 公厘.

250. 這分數爲 $\dfrac{2}{7}$.

251. 第一種合金 12 公分，第二種合金 18 公分，第三種合金 8 公分.

252. 每斤 a 元的茶需 $\dfrac{md-s-2bd}{2(a-b)}$ 公斤，每斤 b 元的茶需 $\dfrac{2ad-md+s}{2(a-b)}$ 公斤.

253. 前輪周長$\frac{m(a-1)}{ak}$公尺，後輪周長$\frac{m(a-1)}{k}$公尺.

前輪轉$\frac{ak}{a-1}$次，後輪轉$\frac{k}{a-1}$次.

254. 甲種布每公尺 3.2 元，乙種布每公尺 0.4 元.

255. 新地段的長是 1.65 公里，寬是 1.23 公里.

256. ± 0.1; $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{3}{4}$; $\pm 5a$; 2; -3; -0.1.

257. 0.01; $\frac{3}{4}$; a^2; 3.

258. $\frac{1}{3}\times 0.1ax$; $\frac{1}{2}a^2x^4$; $\frac{1}{4}(b+c)y$.

259. 把正數的開方性質應用到負數開方去的緣故。

260. 61.3; 1954.5. 261. 18.7; 2.3.

262. 0.0587. 263. 2.42; 0.85.

264. $t=18.1$. （負值無意義）

265. ± 3.88; ± 0.46.

266. ± 5; ± 2; ± 3; ± 6.

267. 1.826.

268. -7, -8; 18, -2; 3, 2; -16, -10.

269. $\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{2}$. 270. 10, -6.

271. 0.4, -4.4. （誤差小于 0.05）

272. 1.1, -1.7. （誤差小于 0.05）

273. 2, $\frac{1}{2}$. 274. 10, $-\frac{19}{2}$.

275. 5, -1. 276. 2.

277. $\frac{-v\pm\sqrt{v^2+2gs}}{g}$

278. $\dfrac{-\pi h\pm\sqrt{\pi^2h^2+2\pi hT}}{2\pi}$.

279. 大麥 30 斗，小麥 40 斗；或大麥 60 斗，小麥 70 斗.

280. 菜地長爲 900 公尺，寬爲 400 公尺.

281. 最初火車速度每小時 50 公里.

282. 船行速度每小時 5 公里.

283. 35 公斤，14 公斤.

284. (a) $x<1\frac{4}{5}$.　　(b) $x>-7$.

385. (a) $\because -2>-8$，$\therefore x$ 可有任何的值.

(b) $\because -2$不<-8，$\therefore x$ 無解.

286. $x<3\frac{1}{2}$.　　287. $x>-\frac{3}{2}$.

288. (a) $-2<x<5$.　(b) $-3<x<-1$.

《数学教学用表》勘误表

《数学教学用表》中有部分数据计算有误，请使用本页所列的正确数值.

第 1 页　$e^2=7.38905\ 60989\ 30650$　$\sqrt{e}=1.64872\ 12707\ 00128$　$1/e=0.36787\ 94411\ 71442$

第 12 页　$\sqrt{71.68}=8.46168+0.00473=8.46641$，第 15、16 行也应作相应修改.

第 19～25 页　立方根表从 1.0～9.9 的第 8 栏数值有误，应为

N	8	N	8	N	8	N	8
1.0	1.02599	3.5	1.52978	6.0	1.82516	8.5	2.04721
1.1	1.05672	3.6	1.54389	6.1	1.83511	8.6	2.05513
1.2	1.08577	3.7	1.55775	6.2	1.84496	8.7	2.06299
1.3	1.11334	3.8	1.57137	6.3	1.85470	8.8	2.07080
1.4	1.13960	3.9	1.58475	6.4	1.86434	8.9	2.07854
1.5	1.16471	4.0	1.59791	6.5	1.87388	9.0	2.08623
1.6	1.18878	4.1	1.61086	6.6	1.88333	9.1	2.09386
1.7	1.21192	4.2	1.62361	6.7	1.89268	9.2	2.10144
1.8	1.23420	4.3	1.63616	6.8	1.90194	9.3	2.10896
1.9	1.25571	4.4	1.64851	6.9	1.91111	9.4	2.11642
2.0	1.27650	4.5	1.66069	7.0	1.92019	9.5	2.12384
2.1	1.29664	4.6	1.67269	7.1	1.92919	9.6	2.13120
2.2	1.31617	4.7	1.68452	7.2	1.93810	9.7	2.13852
2.3	1.33514	4.8	1.69619	7.3	1.94694	9.8	2.14578
2.4	1.35358	4.9	1.70769	7.4	1.95569	9.9	2.15300
2.5	1.37153	5.0	1.71905	7.5	1.96437		
2.6	1.38903	5.1	1.73025	7.6	1.97297		
2.7	1.40610	5.2	1.74132	7.7	1.98150		
2.8	1.42276	5.3	1.75224	7.8	1.98995		
2.9	1.43904	5.4	1.76303	7.9	1.99833		
3.0	1.45496	5.5	1.77369	8.0	2.00664		
3.1	1.47054	5.6	1.78422	8.1	2.01489		
3.2	1.48579	5.7	1.79463	8.2	2.02307		
3.3	1.50074	5.8	1.80492	8.3	2.03118		
3.4	1.51540	5.9	1.81510	8.4	2.03923		

第 132 页　概率积分表

x	0	x	0
4.00	0.499968 3288	5.00	0.499999 7133
4.10	0.499979 3425	5.10	0.499999 8302
4.20	0.499986 6542	5.20	0.499999 9003
4.30	0.499991 4601	5.30	0.499999 9421
4.40	0.499994 5875	5.40	0.499999 9667
4.50	0.499996 6023	5.50	0.499999 9810
4.60	0.499997 8875	5.60	0.499999 9893
4.70	0.499998 6992	5.70	0.499999 9940
4.80	0.499999 2067	5.80	0.499999 9967
4.90	0.499999 5208	5.90	0.499999 9982
		6.00	0.499999 9990

第7～11页 平方根表从10.～99.的插值有误,应为

N	平方根插值部分 1	2	3	4	5	6	7	8	9	N	平方根插值部分 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10.	155	309	464	618	773	927	1081	1235	1389	55.	67	134	201	269	336	403	470	537	604
11.	148	295	443	591	738	886	1033	1180	1328	56.	67	133	200	266	333	399	466	532	599
12.	142	283	425	566	708	849	991	1132	1273	57.	66	132	198	264	330	396	462	528	593
13.	136	273	409	545	681	817	953	1089	1225	58.	65	131	196	262	327	392	458	523	588
14.	132	263	394	526	657	788	920	1051	1182	59.	65	130	195	259	324	389	454	519	583
15.	127	254	381	509	636	763	890	1016	1143	60.	64	129	193	257	321	386	450	514	579
16.	123	247	370	493	616	739	862	985	1108	61.	64	128	191	255	319	383	446	510	574
17.	120	239	359	479	598	718	837	957	1076	62.	63	127	190	253	316	380	443	506	569
18.	116	233	349	465	582	698	814	930	1046	63.	63	126	188	251	314	377	439	502	565
19.	113	227	340	453	567	680	793	906	1019	64.	62	125	187	249	311	374	436	498	560
20.	111	221	332	442	553	663	773	884	994	65.	62	124	185	247	309	371	433	494	556
21.	108	216	324	432	540	647	755	863	971	66.	61	123	184	245	307	368	429	491	552
22.	106	211	316	422	527	633	738	844	949	67.	61	122	183	243	304	365	426	487	548
23.	103	206	310	413	516	619	722	825	928	68.	60	121	181	242	302	363	423	483	544
24.	101	202	303	404	505	606	707	808	909	69.	60	120	180	240	300	360	420	480	540
25.	99	198	297	396	495	594	693	792	891	70.	60	119	179	238	298	357	417	476	536
26.	97	194	292	389	486	583	680	777	874	71.	59	118	177	237	296	355	414	473	532
27.	95	191	286	382	477	572	668	763	858	72.	59	117	176	235	294	352	411	470	529
28.	94	187	281	375	469	562	656	749	843	73.	58	117	175	233	292	350	408	467	525
29.	92	184	276	368	460	553	645	737	829	74.	58	116	174	232	290	348	406	463	521
30.	91	181	272	362	453	543	634	724	815	75.	58	115	173	230	288	345	403	460	518
31.	89	178	267	357	446	535	624	713	802	76.	57	114	172	229	286	343	400	457	515
32.	88	176	263	351	439	526	614	702	789	77.	57	114	170	227	284	341	398	454	511
33.	86	173	259	346	432	518	605	691	778	78.	56	113	169	226	282	339	395	451	508
34.	85	170	256	341	426	511	596	681	766	79.	56	112	168	224	280	337	393	449	505
35.	84	168	252	336	420	504	588	671	755	80.	56	111	167	223	279	334	390	446	502
36.	83	166	248	331	414	497	579	662	745	81.	55	111	166	222	277	332	388	443	498
37.	82	163	245	327	408	490	572	653	735	82.	55	110	165	220	275	330	385	440	495
38.	81	161	242	322	403	484	564	645	725	83.	55	109	164	219	274	328	383	438	492
39.	80	159	239	318	398	477	557	637	716	84.	54	109	163	218	272	326	381	435	490
40.	79	157	236	314	393	472	550	629	707	85.	54	108	162	216	270	324	379	433	487
41.	78	155	233	311	388	466	543	621	699	86.	54	108	161	215	269	323	376	430	484
42.	77	153	230	307	384	460	537	614	690	87.	53	107	160	214	267	321	374	428	481
43.	76	152	228	303	379	455	531	607	682	88.	53	106	159	213	266	319	372	425	478
44.	75	150	225	300	375	450	525	600	675	89.	53	106	159	211	264	317	370	423	476
45.	74	148	222	297	371	445	519	593	667	90.	53	105	158	210	263	315	368	420	473
46.	73	147	220	293	367	440	513	587	660	91.	52	105	157	209	261	314	366	418	470
47.	73	145	218	290	363	435	508	580	653	92.	52	104	156	208	260	312	364	416	468
48.	72	144	215	287	359	431	503	574	646	93.	52	103	155	207	259	310	362	414	465
49.	71	142	213	284	355	426	498	569	640	94.	51	103	154	206	257	309	360	411	463
50.	70	141	211	282	352	422	493	563	633	95.	51	102	154	205	256	307	358	409	460
51.	70	139	209	279	348	418	488	557	627	96.	51	102	153	204	255	305	356	407	458
52.	69	138	207	276	345	414	483	552	621	97.	51	101	152	203	253	304	354	405	456
53.	68	137	205	274	342	410	479	547	615	98.	50	101	151	202	252	302	353	403	453
54.	68	136	203	271	339	406	474	542	610	99.	50	100	150	201	251	301	351	401	451

初 中 代 數 講 話
裘 頌 蘭 編 著
*
浙 江 人 民 出 版 社 出 版
（杭州武林路萬石里 1 號）
浙江省書刊出版營業許可證出字第 001 號
地方國營杭州印刷廠印刷　新華書店浙江分店發行
*
開本 787×1092 耗 1/32 印張 6 1/8 字數 133,000
1956 年 4 月第 一 版
1956 年 4 月第一次印刷
印數 1—8,090

統一書號：13103·1
定　　價：0.60 元