

Washington

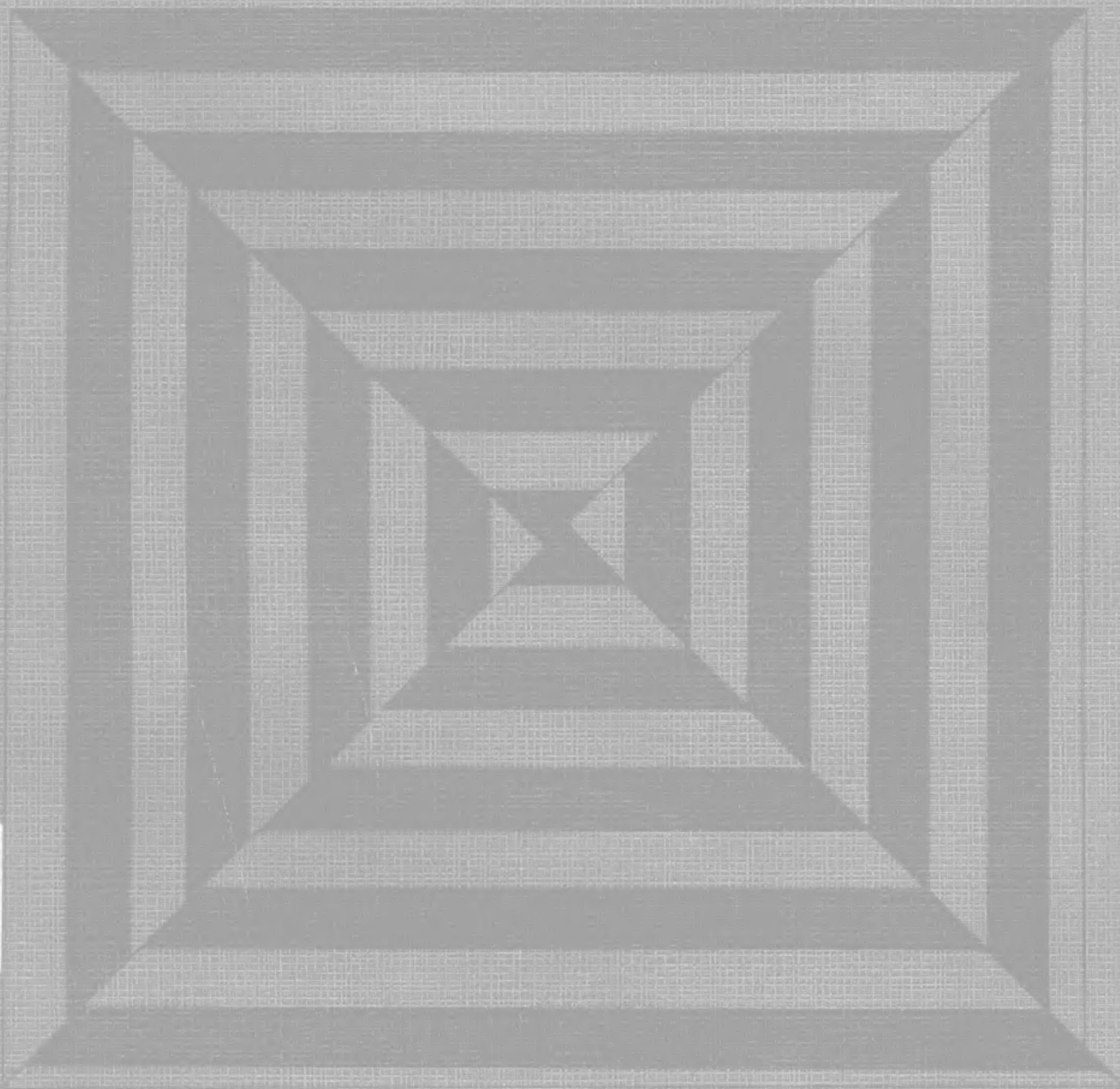
715688

An Introduction to Calculus with Applications

應用微積分

下 冊

郭 燮 昌 譯



東華書局印行

分積微用應

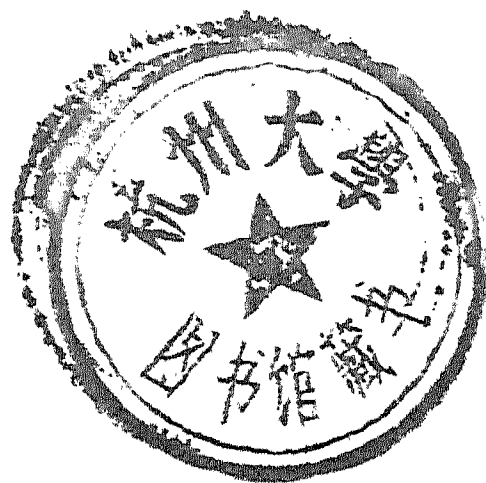
下 冊

著 者

Allyn J. Washington

譯 者

郭 燮 昌



東華書局印行

目 錄

第六章 三角函數與反三角函數的導數.....183~220

6-1	三角函數.....	183
6-2	基本三角關係.....	190
6-3	正弦函數與餘弦函數的導數.....	197
6-4	其他三角函數的導數.....	202
6-5	反三角函數.....	205
6-6	反三角函數的導數.....	209
6-7	應 用.....	212
6-8	雜 題.....	218

第七章 指數函數與對數函數的導數.....221~237

7-1	指數函數與對數函數.....	221
7-2	對數函數的導數.....	227
7-3	指數函數的導數.....	231
7-4	應 用.....	233
7-5	雜 題.....	236

第八章 積分方法 238~267

8-1	一般冪公式.....	238
8-2	基本對數式.....	240
8-3	指數式.....	243
8-4	基本三角式.....	246
8-5	微分方程式：變數分離法.....	251
8-6	指數成長及衰退律.....	255
8-7	其他積分型式.....	260

2. 應用微積分 (下冊)

8-8 雜 題	266
第九章 偏導數與重積分	268
9-1 兩個變數的函數	268
9-2 三維空間中的曲線與曲面	271
9-3 偏導數	279
9-4 偏導數的一些應用	283
9-5 重積分	290
9-6 雜 題	296
第十章 極坐標	299~311
10-1 極坐標	299
10-2 極坐標中的曲線	302
10-3 極坐標中的面積	306
10-4 雜 題	310
第十一章 經驗曲線的配合	312~338
11-1 頻率分配與集中趨勢的量數	312
11-2 標準差	318
11-3 一組點的直線配合	323
11-4 數據的曲線配合	331
11-5 雜 題	336
第十二章 函數展為級數	339~357
12-1 麥克勞林級數	339
12-2 級數之運算	344
12-3 應用級數展式之計算	349
12-4 泰勒級數	353
12-5 雜 題	356
附 錄	358~367

第六章

三角函數與反三角函數的導數

6-1 三角函數

許多重要的現象，特別是科學及工程的一些範圍內，其本質是週期性的。亦即，它們的性質是在固定的時間週期後又再重複。這些性質可由三角函數（特別是正弦及餘弦函數）的應用表出。現認為學生已具有基本三角學的基礎。本節與下一節將綜述三角函數及其性質以供複習與參考，因為這些材料對本章及以後幾章的內容是很必要的。

一角之頂點在原點始邊為正 x 軸稱為在標準位置之角。若以反時針方向度量該角為正，依順時針方向量之為負。（看圖 6-1）

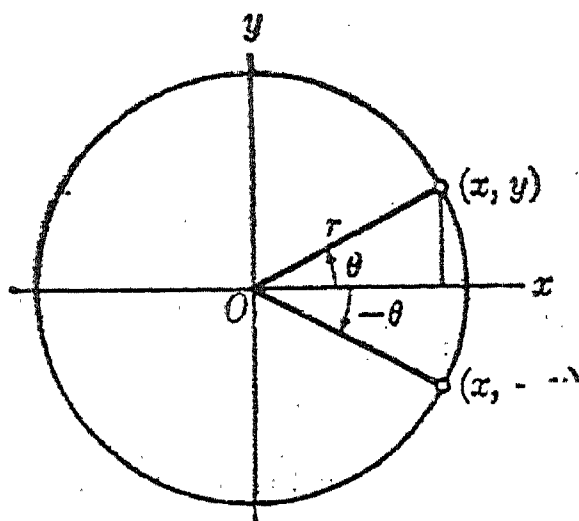


圖 6-1

六個三角函數由角的終邊上一點的坐標 (x, y) 及此點與原點距離（視為正值）定義如下：

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= \frac{y}{r}, & \cos \theta &= \frac{x}{r}, \\ \tan \theta &= \frac{y}{x}, & \cot \theta &= \frac{x}{y}, \\ \sec \theta &= \frac{r}{x}, & \csc \theta &= \frac{r}{y}. \end{aligned} \right\} \quad (6-1)$$

角有兩個常用的度量，即度 (degree) 與弧度 (radian)。1 度為一周角的 $\frac{1}{360}$ ，主要用於三角形的解法中。1 度分為 60 等分，每一份稱為 1 分；每分等分為 60 份，每份稱為 1 秒。度及其小數部份亦常應用。

在理論探討上用弧度作為角之度量較為便利。因本書主旨在於闡發有廣泛應用的數學，以後大都以弧度為度量。頂點在圓心之角其所對的弧長等於該圓半徑時此角為 1 弧度。

因一圓之周長為 $c=2\pi r$ ，圓周對半徑之比為 2π 。意即圓周的長度為半徑的 2π 倍，或 360° 的角等於 2π 弧度的角。因之

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

由於弧度定義的特性，角之度量的弧度數通常都用 π 表出。

$$\text{例 A. } 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 0.01745 \text{ rad}; \quad 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57.3^\circ;$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ rad} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ; \quad \frac{\pi}{3} \text{ rad} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ;$$

$$\frac{\pi}{10} \text{ rad} = \frac{180^\circ}{10} = 18^\circ.$$

有一點必須注意。因 π 是一圓周對其直徑的比數，用弧度的度量法是把角用數表出。基此原因，在理論工作上用弧度度量，因弧度是數不需任何特約規定就可以代表數量。因為同樣理由，用弧度時就不指出其單位。

$$\text{例 B. } \frac{\pi}{6} = 30^\circ; \quad \frac{2\pi}{3} = 120^\circ; \quad \sin 1 = \sin 57.3^\circ;$$

$$\frac{\pi}{6} = 0.524; \quad \sin \frac{\pi}{6} = \sin 0.524.$$

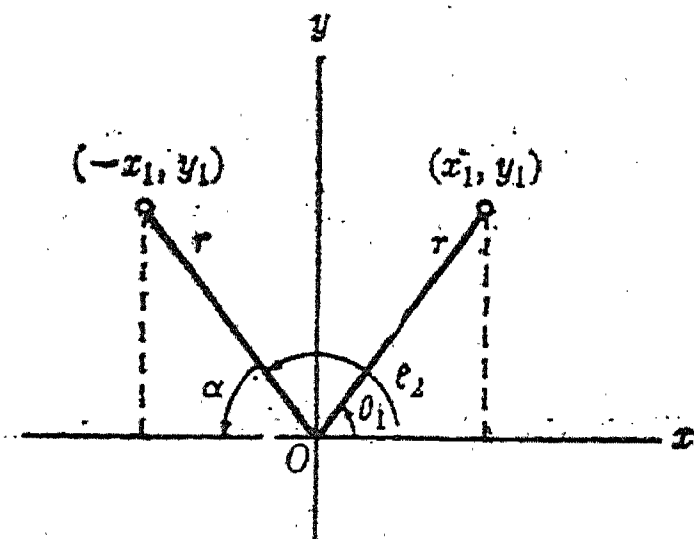
三角函數值表列於附錄中，下表列出一些常用角及這些角函數的確值。

度	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
正弦	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
餘弦	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0	1
正切	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	無意義	0	無意義	0

因為表中只包含 0° 與 90° 間各角的函數值，故必須再能求大於 90° 角之函數值。

一標準位置之角其終邊與某一小於 360° 之正角相同。因終邊相同的各角之三角函數相等，故只需求出小於 360° 的正角的各三角函數值。

函數的符號由該角終邊所在象限而定。由(6-1)式的定義，可看出第一象限內角之所有函數為正，第二象限內的角 $\sin \theta$ 及 $\csc \theta$ 為正，第三象限內的角 $\tan \theta$ 及 $\cot \theta$ 為正，第四象限內的角 $\cos \theta$ 及 $\sec \theta$ 為正，而其他函數皆為負。可由 x 與 y 在各象限內的符號以驗證此事。



由圖 6-2 可看出 (x_1, y_1) 爲 θ_1 終邊上的點而 $(-x_1, y_1)$ 爲 θ_2 終邊上的點。意指若 θ_2 角的終邊在第二象限內, θ_2 的各函數的絕對值與第一象限內的角 θ_1 之對應函數相等。二角的 r 相同, $\alpha = \theta_1$, α 稱爲參考角, $\alpha = 180^\circ - \theta_2$, 令 F 表任一三角函數, 可得

$$F(\theta_2) = \pm F(180^\circ - \theta_2) = \pm F(\pi - \theta_2). \quad (6-3)$$

用正或負視該函數在第二象限內爲正或負而定。

同法, 可導出第三或第四象限內角的三角函數 (看圖 6-3 及 6-4):

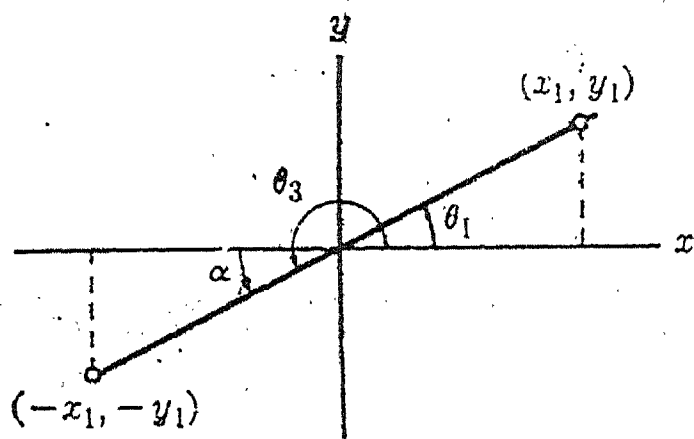


圖 6-3

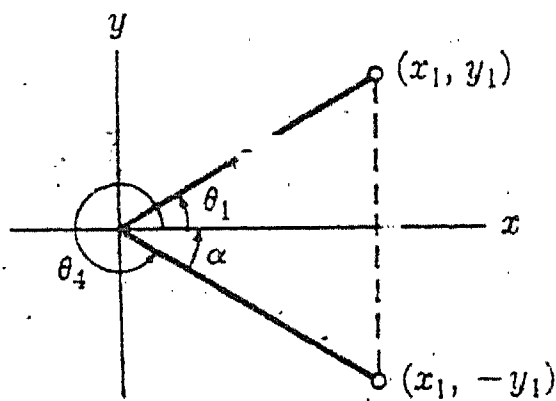


圖 6-4

$$\left. \begin{aligned} F(\theta_3) &= \pm F(\theta_3 - 180^\circ) = \pm F(\theta_3 - \pi); \\ F(\theta_4) &= \pm F(360^\circ - \theta_4) = \pm F(2\pi - \theta_4). \end{aligned} \right\} \quad (6-4)$$

例 C. 令 $\theta_2 = 135^\circ$.

$$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 135^\circ) = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2,$$

$$\tan 135^\circ = -\tan(180^\circ - 135^\circ) = -\tan 45^\circ = -1.$$

令 $\theta_3 = 210^\circ$.

$$\tan 210^\circ = \tan(210^\circ - 180^\circ) = \tan 30^\circ = \sqrt{3}/3,$$

$$\cos 210^\circ = -\cos(210^\circ - 180^\circ) = -\cos 30^\circ = -\sqrt{3}/2.$$

令 $\theta_4 = 330^\circ$.

$$\sin 330^\circ = -\sin(360^\circ - 330^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2},$$

$$\cos 330^\circ = \cos(360^\circ - 330^\circ) = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2.$$

說明各三角函數的變化的一個最清楚的方式是利用其圖形。因正

弦函數與餘弦函數的圖形最重要，將只討論這兩個。

在作三角函數的圖形中，角以弧度為單位。在此方式中 x 與 y 皆以數字表出。

在方程式 $y = a \sin (bx + c)$ 及 $y = a \cos (bx + c)$ 中 a 表曲線之幅(amplitude)。此為曲線與 x 軸的最大距離。此二曲線的週期(period)為 $2\pi/b$ 。任一函數 F ，若對所有 x ， $F(x) = F(x + P)$ ，稱為有週期 P 。 c 在方程式中的作用為使 $y = a \sin bx$ 或 $y = a \cos bx$ 曲線向左移($c > 0$)或向右移($c < 0$)，而移動的距離為 c/b 。 c/b 稱為位移(displacement)。

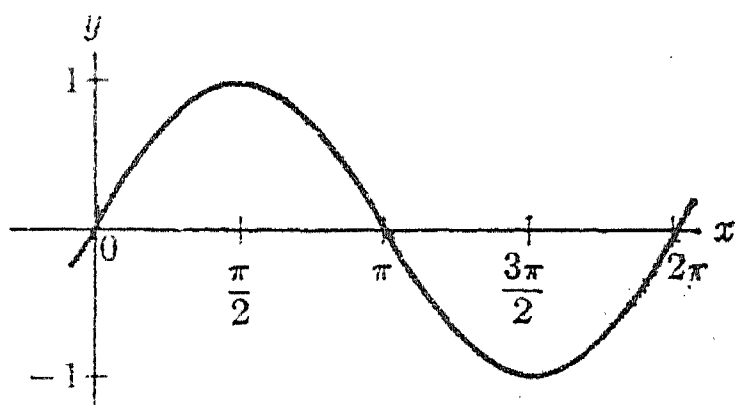


圖 6-5

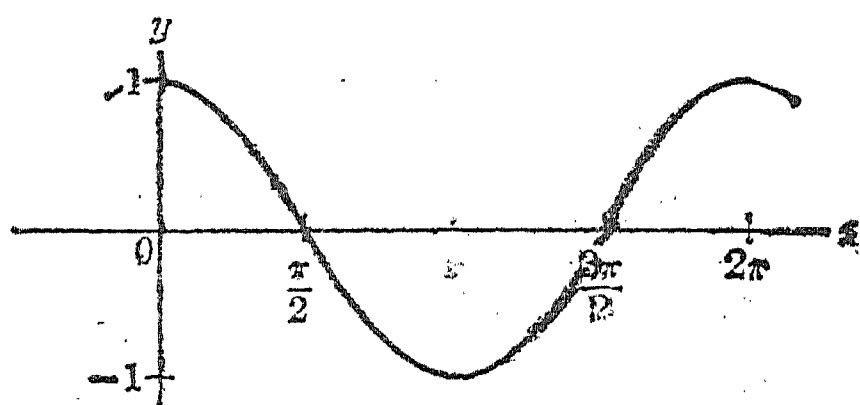


圖 6-6

因之，由已知正弦曲線及餘弦曲線之基本形狀為圖 6-5 及 6-6 所示以及由方程式所獲得的資料，可作正弦函數及餘弦函數之圖。以下二例說明此方法。

例 D. 作 $y = 3 \sin (2x + \pi/4)$ 之圖。

先看 $a = 3$ ，意即曲線之幅為 3。再看 $b = 2$ ，意即曲線的週期為 $2\pi/2 = \pi$ 。因之曲線上各點沿 x 軸每 π 單位“重複出現”。 $c = \pi/4$ ，意即位移為 $(\pi/4)/2 = \pi/8$ 。亦即此曲線是把 $y = 3 \sin 2x$ 移到其左方 $\pi/8$ 處。因之，曲線由 $x = -\pi/8$ “開始”，再在 $x = 7\pi/8$ ($x = -\pi/8$ 之右 π 單位) 又再開始，又在 $15\pi/8$ 等處再開始。由此項資料可作出下表，因而迅即作出圖形。(看圖 6-7。)

x	$-\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$
y	0	3	0	-3	0	3

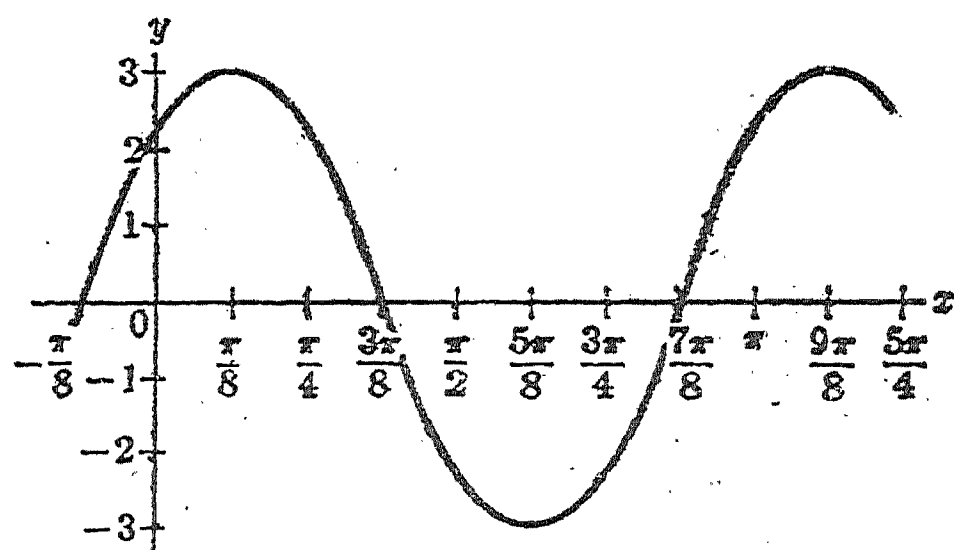


圖 6-7

例 E. 作函數 $y = 2 \cos(x/2 - \pi/6)$ 之圖。

幅 = 2, 週期 = $2\pi / \frac{1}{2} = 4\pi$, 位移 = $(\pi/6) / \frac{1}{2} = \pi/3$ (向右)。作出各值之表;

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{10\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{3}$
y	2	0	-2	0	2

然後作出圖 6-8 中之圖。當 x 的係數小於 1 時, 週期加長。

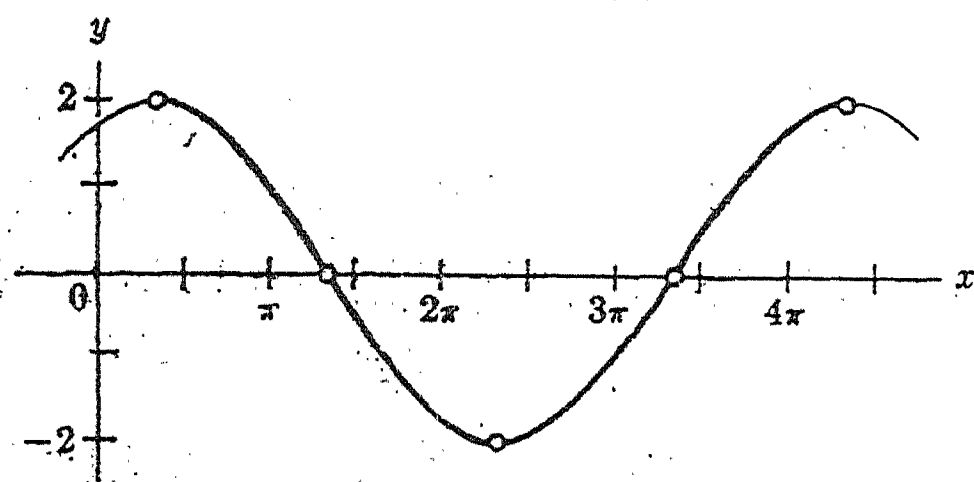


圖 6-8

習 題

在 1 至 4 各題中，以 π 表各角。

1. 15° 2. 240° 3. -60° 4. 80°

在 5 至 12 各題中，求各三角函數。

5. $\sin \frac{7\pi}{18}$ 6. $\cos \frac{\pi}{20}$ 7. $\tan \frac{17\pi}{18}$ 8. $\sin \frac{9\pi}{5}$
 9. $\tan 0.8$ 10. $\cot 2$ 11. $\cos 1.1$ 12. $\sin 3.9$

在 13 至 16 各題中，求 $0 \leq \theta < 2\pi$ 之 θ 值。

13. $\sin \theta = 0.3420$ 14. $\cos \theta = 0.4384$
 15. $\tan \theta = -1.192$ 16. $\cot \theta = -0.5095$

在 17 至 24 各題中，作各函數之圖。

17. $y = 3 \sin x$ 18. $y = -4 \sin 3x$ 19. $y = 2 \cos 2x$
 20. $y = 6 \cos \pi x$ 21. $y = 2 \sin \left(3x - \frac{\pi}{2} \right)$ 22. $y = 4 \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right)$
 23. $y = \cos \left(\pi x - \frac{\pi}{2} \right)$ 24. $y = \sin (\pi x + 1)$

25 至 29 各題係指出三角函數的一些應用。

25. 一擺的角位移 θ 之方程式為 $\theta = \theta_0 \cos \omega t$ ，其中 θ_0 為初位移 ($t=0$ 時)。
 若 $\omega = 2 \text{ rad/sec}$ 及 $\theta_0 = \pi/30 \text{ rad}$ ，作此方程式的兩個循環之圖。
26. 在彈簧一端之物體其距離平衡位置之位移為時間之函數 $x = A \cos (\omega t + \alpha)$ 。作表此運動之圖。
27. 小提琴弦上某一點振動之位移為 $y = \sin 512\pi t$ ，其中 y 以公厘 (mm) 計， t 以秒計。求 $t = 0.001$ 秒時此點的位移。
28. 在一交流電路中之電壓為 $e = E_m \sin (\omega t + \alpha)$ 。若 $E_m = 110 \text{ volts}$ ， $\omega = 120\pi \text{ rad/sec}$ ， $\alpha = -\pi/3$ ，求 0.01 秒後及 1 秒後之瞬時電壓。

29. 若一彈簧之上端未固定而作正弦式運動並影響彈簧端擺錘之運動。一外力使彈簧上端依方程式 $y = 4 \sin 2t - 2 \cos 2t$ 而運動，作此運動曲線之圖。此可由作出兩曲線 $y_1 = 4 \sin 2t$ 與 $y_2 = 2 \cos 2t$ 然後求 $y = y_1 - y_2$ 。此法稱為縱坐標加法。

6-2 基本三角關係

由 (6-1) 式各三角函數的定義，可知各函數間存在一些關係。並可導出某些其他重要關係式。這些關係式有非常明確的應用，因為有些問題要靠改變其形式去求解答。要熟悉這些基本關係並能認清其不同之處才有能力作有效運用。因此，在本節中複習各重要的三角關係。

$$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}, \quad \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}. \quad (6-5)$$

又因
$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{y/r}{x/r}.$$

可得
$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \quad (6-6)$$

應用各定義及畢氏關係式 $x^2 + y^2 = r^2$ ，可求出某些重要關係式。畢氏關係式的每一項以 r^2 除之，可得

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1. \quad (6-7)$$

畢氏關係式的每一項以 x^2 除之，可得

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta. \quad (6-8)$$

畢氏關係式的每一項以 y^2 除之，可得

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta. \quad (6-9)$$

應用 (6-5) 至 (6-9) 各基本公式，可證明各三角函數間許多其他關係式。下例說明此類三角恆等式的證法。

例 4. 證明恆等式 $\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \csc^2 x$.

兩邊都有 $\sec^2 x$ 與 $\csc^2 x$, 故可用平方關係式。將右邊 $\sec^2 x$ 以 $1 + \tan^2 x$ 代之, 可得一項 $\csc^2 x$ 與另一項相加。左邊為 $\csc^2 x$ 與另一項相加, 所以此一步驟可以有利用。

$$\begin{aligned}\sec^2 x \csc^2 x &= (1 + \tan^2 x) \csc^2 x \\ &= \csc^2 x + \tan^2 x \csc^2 x \\ &= \csc^2 x + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \\ &= \csc^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \csc^2 x + \sec^2 x.\end{aligned}$$

亦可用其他變化式, 同樣有效。

參看圖 6-1 及各函數的定義, 可看出 $\sin \theta = \frac{y}{r}$ 及 $\sin(-\theta) = -\frac{y}{r}$ 。由此可得關於負角的各重要關係式。

$$\left. \begin{aligned}\sin(-\theta) &= -\sin \theta, & \cos(-\theta) &= \cos \theta, \\ \tan(-\theta) &= -\tan \theta.\end{aligned}\right\} \quad (6-10)$$

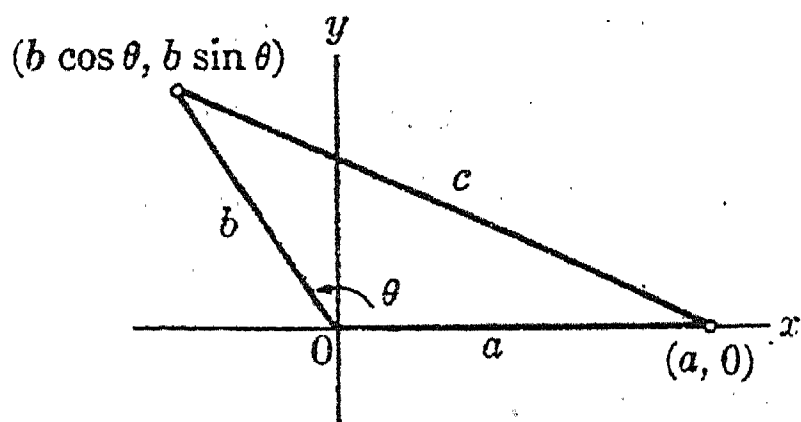


圖 6-9

用距離公式 (1-1) 及圖 6-9, 可導出餘弦定律。

$$\left. \begin{aligned}
 c^2 &= (b \cos \theta - a)^2 + (b \sin \theta)^2 \\
 &= b^2 \cos^2 \theta - 2ab \cos \theta + a^2 + b^2 \sin^2 \theta \\
 &= b^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + a^2 - 2ab \cos \theta, \\
 c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta.
 \end{aligned} \right\} \quad (6-11)$$

用距離公式、餘弦定律以及已導出的其他關係式，可再導出許多重要等式。用所導出的某些關係式又可導出一些其他的關係式。因為在以下的討論中要用到本節中許多等式的各種不同用法，隨着這些推演學生將可學會熟練的運用這些關係式。

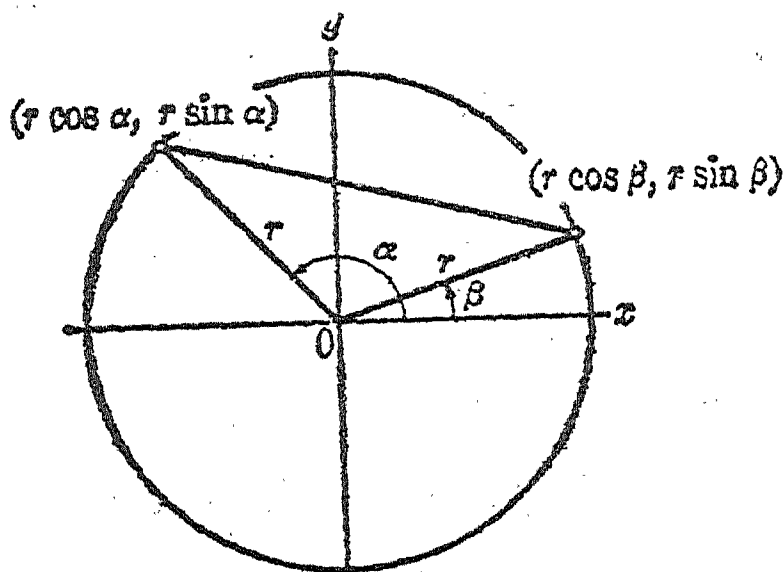


圖 6-10

由圖 6-10，可得

$$\begin{aligned}
 &(r \cos \alpha - r \cos \beta)^2 + (r \sin \alpha - r \sin \beta)^2 \\
 &= r^2 + r^2 - 2(r)(r) \cos(\alpha - \beta), \\
 &r^2 \cos^2 \alpha - 2r^2 \cos \alpha \cos \beta + r^2 \cos^2 \beta \\
 &\quad + r^2 \sin^2 \alpha - 2r^2 \sin \alpha \sin \beta + r^2 \sin^2 \beta \\
 &= 2r^2 - 2r^2 \cos(\alpha - \beta).
 \end{aligned}$$

全式以 r^2 除之並集項，可得

$$\begin{aligned}
 &\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) + \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \\
 &= 2 - 2 \cos(\alpha - \beta).
 \end{aligned}$$

用 (6-7) 式後重行排列各項，得一重要的加法公式。

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (6-12)$$

現再論其他三個加法公式。

$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)]$, 用(6-10)式及(6-12)式, 可得

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (6-13)$$

在(6-12)式中, 若令 $\alpha = 90^\circ$, 結果爲

$$\cos(90^\circ - \beta) = \cos 90^\circ \cos \beta + \sin 90^\circ \sin \beta,$$

因 $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, 可得

$$\cos(90^\circ - \beta) = \sin \beta. \quad (6-14)$$

因 β 爲一普遍的角, 而 $\cos \beta$ 爲 β 的函數, 可用其他的角代替 β 。在(6-14)式中以 $90^\circ - \beta$ 代 β , 可得

$$\cos[90^\circ - (90^\circ - \beta)] = \sin(90^\circ - \beta),$$

$$\text{或} \quad \sin(90^\circ - \beta) = \cos \beta. \quad (6-15)$$

在(6-14)式中以 $\alpha + \beta$ 代 β , 可得

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos[(90^\circ - \alpha) - \beta] \\ &= \cos(90^\circ - \alpha) \cos \beta + \sin(90^\circ - \alpha) \sin \beta; \end{aligned}$$

再用(6-14)式及(6-15)式, 可得

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \quad (6-16)$$

在(6-16)式中以 $-\beta$ 代 β , 可得

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (6-17)$$

例 B. 證明 $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)$.

$$\begin{aligned} &\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \\ &= \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \sin x\right) \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \cos^2 x - \sin^2 \frac{\pi}{4} \sin x \cos x \\
&\quad + \cos^2 \frac{\pi}{4} \sin x \cos x - \sin^2 x \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos^2 x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \sin x \cos x \\
&\quad + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \sin x \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \sin^2 x \\
&= \frac{1}{2} \cos^2 x - \frac{1}{2} \sin^2 x = \frac{1}{2} (\cos^2 x - \sin^2 x).
\end{aligned}$$

令 $A = \alpha + \beta$ 及 $B = \alpha - \beta$ 可得 $\alpha = \frac{1}{2}(A + B)$ 及 $\beta = \frac{1}{2}(A - B)$ 。

用此二式於(6-16)式及(6-17)式中並相減之, 可得

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}. \quad (6-18)$$

在下節中將可看到此式的用途。

在(6-16)式中若 $\alpha = \beta$, 可得

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (6-19)$$

又, 在(6-13)式中若 $\alpha = \beta$, 可得

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha. \quad (6-20)$$

用(6-7)式, (6-20)可寫為

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha. \quad (6-21)$$

(6-19)式, (6-20)式, (6-21)式為倍角公式。

在(6-21)式中, 以 α 代 2α , 可得

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad (6-22)$$

及

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}. \quad (6-23)$$

(6-22)式與(6-23)式爲半角公式。

例 C. 已知 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$, 求 $\sin 2\alpha$ 及 $\cos \frac{\alpha}{2}$ 。

已知 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, 且 α 爲第四象限之角, 於是可得 $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ 。

因之,
$$\sin 2\alpha = 2\left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

再, α 在 $3\pi/2$ 與 2π 之間, $\alpha/2$ 必在 $3\pi/4$ 與 π 之間, 意指 $\alpha/2$ 在第二象限, 因此 $\cos \alpha/2$ 爲負, 故

$$\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + 3/5}{2}} = -0.8944.$$

另外兩個有用的關係是從弧度的定義而得。由幾何學知, 一圓弧的長度與其中心角成正比, 而全圓弧長爲其圓周。令 s 表弧長, 對於一個全圓 $s = 2\pi r$, 對於中心角爲 θ (以弧度計) 之一圓弧 (看圖 6-11)

$$s = \theta r \quad (6-24)$$

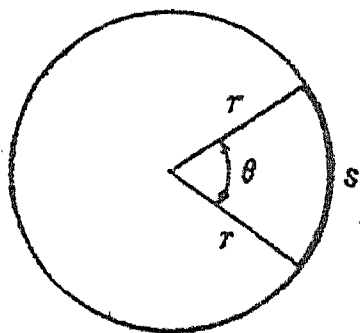


圖 6-11

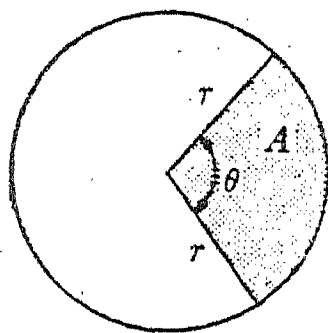


圖 6-12

另一幾何事實爲圓扇形的面積與其中心角成正比。一全圓的面積爲 $A = \pi r^2$, 此可寫爲 $\frac{1}{2}(2\pi)r^2$ 。因一全圓的角爲 2π , 因之一圓的扇形的面積用半徑及中心角 (以弧度計) 表出 (看圖 6-12) 爲

$$A = \frac{1}{2} \theta r^2 \quad (6-25)$$

例 D. 一圓的半徑爲 5 吋及中心角爲 18° , 求其圓弧的長度。並求對應的圓扇形面積。

首先必須把 θ 表爲弧度：

$$18^\circ = \frac{\pi}{10}.$$

解 s , 可得

$$s = \frac{\pi}{10} (5) = \frac{\pi}{2} = 1.57 \text{ (吋)}.$$

面積爲

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{10} \right) (25) = \frac{5}{4} \pi = 3.93 \text{ (方吋)}.$$

在本節中推演了許多公式。如前所述, 乃以後推論之基礎。這些公式推演過程也包含在本節之中, 主要係幫助學生溫習各個等式的用法。

習題

在 1 至 14 各題中, 證明各三角恆等式。

1. $\tan x \csc x = \sec x$
2. $\cos^2 x (1 + \tan^2 x) = 1$
3. $\sin x \tan x + \cos x = \sec x$
4. $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$
5. $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$
6. $\tan^2 y \sec^2 y - \tan^4 y = \tan^2 y$
7. $\sin (x+y) \sin (x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$
8. $\cos (x+y) \cos (x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y$
9. $\cos (x-y) + \sin (x+y) = (\cos x + \sin x) (\cos y + \sin y)$
10. $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$
11. $2 \sin x + \sin 2x = \frac{2 \sin^3 x}{1 - \cos x}$
12. $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$

$$13. \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2 \sin(\alpha/2)}$$

$$14. \tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

15 至 20 各題係指出基本三角關係的一些應用。

15. 通過同一介質的二波之位移 y_1 及 y_2 爲

$$y_1 = A \sin 2\pi(t/T - x/\lambda) \quad \text{及} \quad y_2 = A \sin 2\pi(t/T + x/\lambda)。$$

求二波結合的位移 $y_1 + y_2$ 之式。

16. 某些條件下，在一光線的入射角 i 及反射角 r 的分析中，求得下式：

$$E_2 \left(\frac{\tan r}{\tan i} + 1 \right) = E_1 \left(\frac{\tan r}{\tan i} - 1 \right)$$

證明此式即爲

$$E_2 = E_1 \frac{\sin(r-i)}{\sin(r+i)}。$$

17. 當溫度變化 40° 時一溫度計的指針經過 55° 。若針長 5.0 吋刻度爲圓形的。若溫度最大變化爲 150° ，刻度的長度是多少？

18. 一個 5 呎長的擺其擺動角爲 4.5° ，求擺錘擺動的距離。

19. 一水平水管其半徑爲 6 呎，若管內水深爲 3 呎，求水量對管容積的百分數。

20. 爲做知覺區的實驗，一心理學家作一圓扇形面積，使 $r=2$ 吋， $\theta=120^\circ$ 。求此扇形的面積。（看 5-3 節的第 19 題。）

6-3 正弦函數與餘弦函數的導數

在第二章中曾介紹微分法的運算。在所有情形中所用的函數都是代數函數。前已推演求導數的步驟並複習過三角函數的性質，現可據以推演求三角函數導數所需的公式。

在應用 Δ 步驟求出正弦函數的導數後，就可以此導數爲基礎求出其他三角函數及反三角函數的導數。因此現在首先求正弦函數的導數。

令 $y = \sin u$, 此處 u 爲 x 的函數且表爲弧度。若 u 變化 Δu 則 y 變化 Δy 。因之

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= \sin(u + \Delta u), \\ \Delta y &= \sin(u + \Delta u) - \sin u \\ \frac{\Delta y}{\Delta u} &= \frac{\sin(u + \Delta u) - \sin u}{\Delta u} \end{aligned}$$

應用(6-18)式得

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta u} &= \frac{2 \sin \frac{1}{2}(u + \Delta u - u) \cos \frac{1}{2}(u + \Delta u + u)}{\Delta u} \\ &= \frac{\sin(\Delta u/2) \cos[u + (\Delta u/2)]}{\Delta u/2}. \end{aligned}$$

再令 $\Delta u \rightarrow 0$, 分子分母皆趨於零。此一情況與求代數函數的導數時完全相同。欲求其極限, 必須求

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta u/2)}{\Delta u/2},$$

因爲是此二因式使分子與分母趨於零。

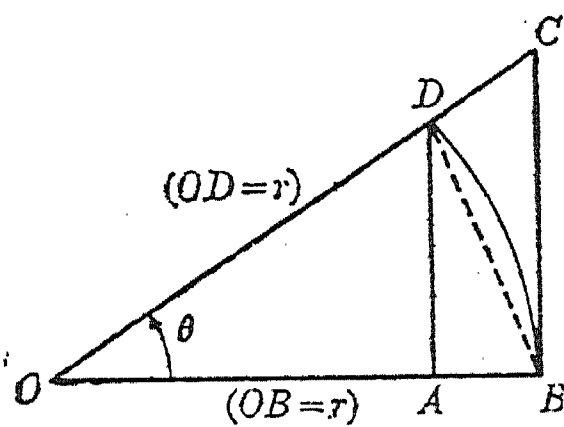


圖 6-13

現要用幾何方法求

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta},$$

(爲記號方便令 $\Delta u/2 = \theta$)。看圖 6-13, 可知下列對各面積的不等式爲真。

三角形 OBD 面積 $<$ 扇形 OBD 面積 $<$ 三角形 OBC 面積,

$$\frac{1}{2}r(r \sin \theta) < \frac{1}{2}r^2\theta < \frac{1}{2}r(r \tan \theta),$$

$$\sin \theta < \theta < \tan \theta.$$

因需求 $\sin \theta/\theta$ 之極限, 全式以 $\sin \theta$ 除之然後取倒數:

$$1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta}, \quad 1 > \frac{\sin \theta}{\theta} > \cos \theta.$$

欲求 $\theta \rightarrow 0$ 時之極限, 左邊仍爲 1 而右邊趨於 1。因之 $\sin \theta/\theta$ 必趨於 1。意即

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta u/2)}{\Delta u/2} = 1. \quad (6-26)$$

用(6-26)式的結果於 $\frac{\Delta y}{\Delta u}$, 可得

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left[\cos \left(u + \frac{\Delta u}{2} \right) \frac{\sin(\Delta u/2)}{\Delta u/2} \right] = \cos u$$

$$\frac{dy}{du} = \cos u. \quad (6-27)$$

但所欲求者爲 y 對 x 的導數, 此需應用下式:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

由(6-27)式與(6-28)式, 可得 ($y = \sin u$)

$$\frac{d(\sin u)}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}.$$

例 A. 求 $y = \sin 2x$ 的導數。

在此例中 $u = 2x$ 。因之

$$\frac{dy}{dx} = \cos 2x \frac{d(2x)}{dx} = 2 \cos 2x.$$

例 B. 求 $y = 2 \sin (x^2)$ 的導數。

在此例中 $u = x^2$ 。故 $\frac{du}{dx} = 2x$,

$$\frac{dy}{dx} = 2[\cos(x^2)]2x = 4x \cos x^2.$$

此處應注意者為，正如函數幕的導數一樣，應記住要包含 du/dx 。

例 C. 求 $y = \sin^2 x$ 的導數。

此例為 (2-28) 式幕之法則與 (6-29) 式正弦函數的導數二者之結合。在幕之法則內 $u = \sin x$ ，因之

$$\frac{dy}{dx} = 2(\sin x) \frac{d \sin x}{dx} = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

例 D. 求 $y = 2 \sin^3 (2x^4)$ 的導數。

在幕之法則中， $u = \sin (2x^4)$ 。正弦函數的導數中， $u = 2x^4$ 。故可得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2(3) \sin^2 (2x^4) \frac{d(\sin 2x^4)}{dx} \\ &= 6 \sin^2 (2x^4) \cos (2x^4) \frac{d(2x^4)}{dx} = 48x^3 \sin^2 (2x^4) \cos (2x^4). \end{aligned}$$

欲求餘弦函數的導數，可寫為 $\cos u = \sin[(\pi/2) - u]$ 。故若 $y = \sin[(\pi/2) - u]$ 可得

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \frac{d\left[(\pi/2) - u\right]}{dx} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \left(-\frac{du}{dx}\right) \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \frac{du}{dx}.\end{aligned}$$

因 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin u$, 故得

$$\frac{d(\cos u)}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx}. \quad (6-30)$$

例 E. 求 $y = \cos^2 2x$ 的導數。

用幕之法則與(6-30)式, 可得

$$\frac{dy}{dx} = 2(\cos 2x)(-\sin 2x)(2) = -4 \sin 2x \cos 2x = -2 \sin 4x.$$

例 F. 求 $y = \sin 2x \cos x^2$ 的導數。

用積之法則與正弦函數及餘弦函數的導數, 可得

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (\sin 2x)(-\sin x^2)(2x) + (\cos x^2)(2 \cos 2x) \\ &= -2x \sin 2x \sin x^2 + 2 \cos 2x \cos x^2\end{aligned}$$

習 題

在 1 至 24 各題中, 求各函數的導數。

1. $y = \sin(x+2)$

2. $y = 3 \sin 4x$

3. $y = 2 \sin(2x-1)$

4. $y = 5 \sin(3-x)$

5. $y = 5 \cos 2x$

6. $y = \cos(1-x)$

7. $y = 2 \cos(3x-1)$

8. $y = 4 \cos(6x^2+)$

9. $y = \sin^2 4x$

10. $y = 3 \sin^3(2x+)$

11. $y = 3 \cos^3(5x+2)$

12. $y = 4 \cos^2 \sqrt{x}$

13. $y = x \sin 3x$

14. $y = \sin x \cos 4x$

15. $y = 2 \sin 2x \cos x$

16. $y = x \cos 2x^3$

17. $y = \frac{\sin 3x}{x}$

18. $y = \frac{2x}{\sin 4x}$

19. $y = \frac{2 \cos x^2}{3x}$

20. $y = \frac{5x}{\cos x}$

21. $y = \sin^3 x - \cos 2x$

22. $y = x \sin x + \cos x$

23. $y = x - \frac{1}{3} \sin^3 4x$

24. $y = 2x \sin x + 2 \cos x - x^2 \cos x$

25. 證明 $\frac{d^4 \sin x}{dx^4} = \sin x$.

26. 若 $y = \cos 2x$, 證明

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -4y.$$

27. 縫紉機針上一點距機面的位移為 $y = 15 \cos 2t$, 其中距離以公厘計, 時間以秒計。求 0.1 秒後此點的速度。

28. 若一質點距一定點的距離為 $s = 2 \sin 3t + t^2$, 其中 s 以呎計, 求其在 2 秒後的速度。

6-4 其他三角函數的導數

將其他三角函數用正弦及餘弦表出, 即可求其導數。完成微分法後用三角關係把導數化爲一較便利的形式。

求 $\tan u$ 的導數時, 把 $\tan u$ 寫爲 $\frac{\sin u}{\cos u}$ 。令 $y = \frac{\sin u}{\cos u}$, 用商之法則, 可得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(\cos u)(\cos u) \frac{du}{dx} - (\sin u)(-\sin u) \frac{du}{dx}}{\cos^2 u} \\ &= \frac{\cos^2 u + \sin^2 u}{\cos^2 u} \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 u} \frac{du}{dx} = \sec^2 u \frac{du}{dx}. \end{aligned}$$

故
$$\frac{d(\tan u)}{dx} = \sec^2 u \frac{du}{dx} \quad (6-31)$$

求 $\cot u$ 的導數，令 $y = \frac{\cos u}{\sin u}$ ，也用商之法則：

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(\sin u)(-\sin u) \frac{du}{dx} - (\cos u)(\cos u) \frac{du}{dx}}{\sin^2 u} \\ &= \frac{-\sin^2 u - \cos^2 u}{\sin^2 u} \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 u} \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

因之
$$\frac{d(\cot u)}{dx} = -\csc^2 u \frac{du}{dx} \quad (6-32)$$

求 $\sec u$ 的導數，令 $y = 1/\cos u$ 。則

$$\frac{dy}{dx} = -(\cos u)^{-2}(-\sin u) \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos u} \frac{\sin u}{\cos u} \frac{du}{dx}.$$

因之
$$\frac{d(\sec u)}{dx} = \sec u \tan u \frac{du}{dx}. \quad (6-33)$$

求 $\csc u$ 的導數，令 $y = 1/\sin u$ 。則

$$\frac{dy}{dx} = -(\sin u)^{-2}(-\cos u) \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\sin u} \frac{\cos u}{\sin u} \frac{du}{dx}.$$

因之
$$\frac{d(\csc u)}{dx} = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}. \quad (6-34)$$

例 A. 求 $y = 2 \tan 8x$ 的導數。

用 (6-31) 式，得

$$\frac{dy}{dx} = 2(\sec^2 8x)(8) = 16 \sec^2 8x.$$

例 B. 求 $y = \cot^4 2x$ 的導數。

用幕之法則與 (6-32) 式, 得

$$\frac{dy}{dx} = 4(\cot^3 2x)(-\csc^2 2x)(2) = -8 \cot^3 2x \csc^2 2x.$$

例 C. 求 $y = 3 \sec^2 4x$ 的導數。

用幕之法則與 (6-33) 式, 得

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 3(2)(\sec 4x)(\sec 4x \tan 4x)(4) \\ &= 24 \sec^2 4x \tan 4x.\end{aligned}$$

例 D. 求 $y = x \csc^3 2x$ 的導數。

用積之法則, 幕之法則, 與 (6-34) 式, 得

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x(3 \csc^2 2x)(-\csc 2x \cot 2x)(2) + \csc^3 2x \\ &= \csc^3 2x(-6x \cot 2x + 1).\end{aligned}$$

例 E. 求 $y = (\tan 2x + \sec 2x)^3$ 的導數。

用幕之法則, (6-31) 與 (6-33) 式, 得

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 3(\tan 2x + \sec 2x)^2[(\sec^2 2x)2 + (\sec 2x \tan 2x)2] \\ &= 6 \sec 2x(\tan 2x + \sec 2x)^3.\end{aligned}$$

習 題

在 1 至 24 各題中, 求各函數的導數。

1. $y = \tan 5x$

2. $y = 3 \tan (3x + 2)$

3. $y = \cot (1 - x)^2$

4. $y = 3 \cot 6x$

5. $y = 3 \sec 2x$

6. $y = \sec \sqrt{1 - x}$

7. $y = -3 \csc \sqrt{x}$

8. $y = \csc(1 - 2x)$

9. $y = 5 \tan^2 3x$

10. $y = 2 \tan^2 (x^2)$

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 11. $y = 2 \cot^4 3x$ | 12. $y = \cot^2 (1-x)$ |
| 13. $y = \sqrt{\sec 4x}$ | 14. $y = \sec^8 x$ |
| 15. $y = 3 \csc^4 7x$ | 16. $y = \csc^2 (2x^2)$ |
| 17. $y = x^2 \tan x$ | 18. $y = \frac{\cot 4x}{2x}$ |
| 19. $y = \frac{\csc x}{x}$ | 20. $y = \frac{1}{2} \sin 2x \sec x$ |
| 21. $y = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x$ | 22. $y = \csc 2x - 2 \cot 2x$ |
| 23. $y = \tan 2x - \sec 2x$ | 24. $y = x - \tan x + \sec^2 2x$ |

在 25, 26 兩題中, 求各函數的微分。

- | | |
|---------------------------|----------------------|
| 25. $y = \tan 4x \sec 4x$ | 26. $y = 2x \cot 3x$ |
|---------------------------|----------------------|

27. 觀測一火箭發射升空時, 觀測者與發射位置的距離為 1000 呎。對火箭之仰角為 $\theta = 3t/(2t+10)$ 為時間的函數。因之, 火箭的高度為

$$h = 1000 \tan \frac{3t}{2t+10}.$$

求 5 秒後高度的時間變率。

28. 證明 $y = \cos^3 x \sin x$ 滿足方程式

$$\cos x \frac{dy}{dx} + 3y \sin x - \cos^2 x = 0.$$

6-5 反三角函數

有時會需要從三角關係中求出角之解。在已知一角的函數而必須求出此角時就發生這種情況。再, 若欲求一角在某些條件下的變率, 有一式來表角而不是僅用角的函數可較便利。為此目的之函數已經有了, 且其在微積分中有重要的應用。

現定義反三角關係。x 的反正弦定義為

$$y = \arcsin x, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (6-35)$$

(亦可用記號 $y = \sin^{-1} x$ 。) 並有其他類似的反三角關係。

應特別強調者 $y = \arcsin x$ 與 $x = \sin y$ 表 x 與 y 間的同一個關係。有了兩種形式其便利處爲一三角關係可用一角的函數表出或用角表出。(6-35)式的讀法爲“ y 乃其正弦爲 x 之角”。

例 A. 若 $y = \arcsin \frac{1}{2}$, 乃欲求“其正弦爲 $\frac{1}{2}$ 之角”。故 $y = \pi/6$ 爲一適當的答案。但 $-11\pi/6, 13\pi/6$ 等等, 也滿足此式。

例 B. 已知 $y = \sec 2x$, 欲解出 x , 首先, 由反三角關係的定義 $2x = \operatorname{arcsec} y$ 。於是 $x = \frac{1}{2} \operatorname{arcsec} y, |y| \geq 1$, 爲所求之解。

已知 $4y = \operatorname{arccot} 2x$, 欲求 x 。首先, $2x = \cot 4y$, 然後得 $x = \frac{1}{2} \cot 4y$ 。可知用反三角關係可變換函數的形式。

在例 A, 若在 $y = \arcsin x$ 中指定某一 $-1 \leq x \leq 1$ 的 x 值, 可求出許多 y 值。由定義各可能值的任一個皆爲正確。當指定 x 各值時如此就會發生含混不清。欲定義反三角函數使沒有含混情形, 而使對一已知值僅有一個 x 值, 對已知反三角關係式選用下列各主值。

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arcsin} x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \operatorname{Arccos} x \leq \pi, \\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctan} x < \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (6-36)$$

意爲欲求一已知 x 值的對應 y 值時, 用 (6-36) 式內所定的 y 值。大寫字母 A 指明要用其主值。

例 C. $\operatorname{Arcsin} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, 此爲該函數在規定範圍內唯一值。 $5\pi/6$ 在規定範圍以外不是所要的值。

$\operatorname{Arccos}(-\frac{1}{2}) = 2\pi/3$ 。其他值如 $4\pi/3$ 及 $-2\pi/3$ 等, 因不在所規定的範圍內故不正確。

$$\begin{aligned} \text{例 D. } \operatorname{Arcsin}(-\sqrt{3}/2) &= -\pi/3, & \operatorname{Arccos}(-1) &= \pi, \\ \operatorname{Arctan} 0 &= 0, & \operatorname{Arcsin}(-0.1564) &= -\pi/20, \\ \operatorname{Arccos}(-0.8090) &= 4\pi/5, & \operatorname{Arctan}(\sqrt{3}) &= \pi/3. \end{aligned}$$

學生可能要問，為何在許多不同的可能值中要選這些值。這是因為若 x 為正時所得結果之角在第一象限內。但，另外需定 x 為負的情形。對於 $\text{Arcsin } x$ 不能用第二象限之角，因第二象限角的正弦也為正，第四象限角的正弦為負，為了使 x 的值有一連續範圍，把第四象限的角用負角表出。依同樣理由 $\text{Arctan } x$ 也選定在此範圍內。但， $\text{Arccos } x$ 不能照此方式選定，因第四象限角之餘弦亦為正。因之，為使 $\text{Arccos } x$ 的值有一連續範圍，對 x 的負值選用第二象限的角。

對於其他函數的主值，若 x 為正時選其為第一象限的角。對於 x 為負值時，這些函數值如何選定，沒有一個普遍的準則。在實用中，對於負值可用已定義其範圍的一函數（例如 $\text{Arcsec } x = \text{Arccos } \frac{1}{x}$ ）。基此原因，對 x 的負值不規定這些其他函數值的範圍。

若已知一反函數的 x 值，可求出此角的各三角函數。若需一般關係式，畫一個三角形非常有用。以下各例說明此法。

例 E. 求 $\cos(\text{Arcsin } 0.5)$ 。〔應記住：反函數為角。〕

因 0.5 為正，故知 $\text{Arcsin } 0.5$ 為第一象限角。而得 $\text{Arcsin } 0.5 = \pi/6$ 。問題為求 $\cos(\pi/6)$ 。此值為 $\sqrt{3}/2$ 或寫作 0.8660。

例 F. 求 $\sin(\text{Arctan } x)$ 。

$\text{Arctan } x$ 乃“其正切為 x 之角”的另一說法。作一直角三角形如圖 6-14，令一銳角為 θ ， θ 之對邊為 x ， θ 之鄰邊為 1。由定義， $\tan \theta = x/1$ 或 $\theta = \text{Arctan } x$ ，意指 θ 為所欲求之角。

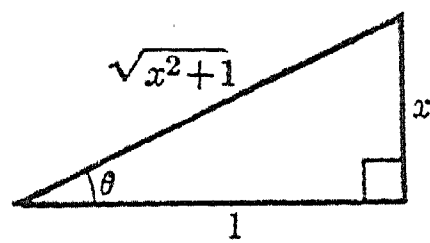


圖 6-14

由畢氏定理，此三角形的斜邊為 $\sqrt{x^2 + 1}$ 。現求 $\sin \theta$ 即 $\sin(\text{Arctan } x)$ ，由定義為 $x/\sqrt{x^2 + 1}$ ，因之

$$\sin(\text{Arctan } x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

因 $y = \text{Arcsin } x$ 與 $x = \sin y$ 為同義方程式，可依 y 軸作出正弦

曲線即為反正弦之圖形。其他各反函數之圖亦用同法得之。各圖中較黑部份表各主值 (看圖 6-15, 6-16, 及 6-17)。

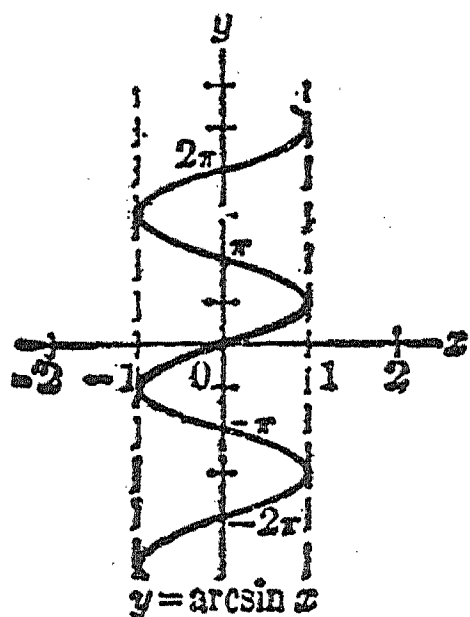


圖 6-15

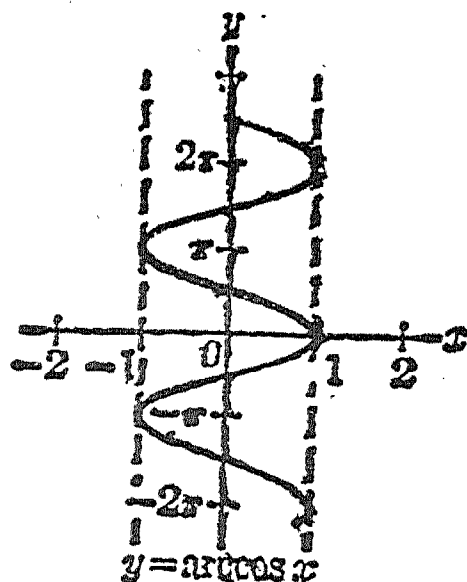


圖 6-16

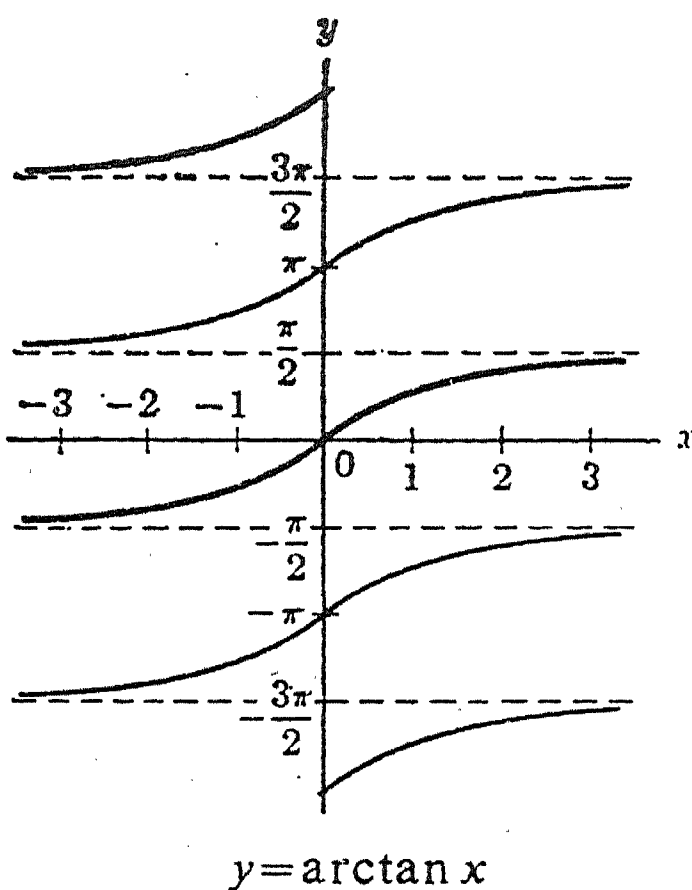


圖 6-17

習題

在 1 至 16 各題中, 計算各式之值。

1. $\text{Arccos}(\frac{1}{2})$

2. $\text{Arctan}(-\sqrt{3})$

- | | |
|---|--|
| 3. $\text{Arcsin } 1$ | 4. $\text{Arcsin } (-\frac{1}{2})$ |
| 5. $\text{Arctan } (\frac{1}{3}\sqrt{3})$ | 6. $\text{Arcsec } 2$ |
| 7. $\text{Arccot } \sqrt{3}$ | 8. $\text{Arcsin } (-\frac{1}{2}\sqrt{2})$ |
| 9. $\text{Arccsc } \sqrt{2}$ | 10. $\text{Arcsin } 0$ |
| 11. $\text{Arccos } (-0.5878)$ | 12. $\text{Arctan } (-3.732)$ |
| 13. $\sin (\text{Arctan } \sqrt{3})$ | 14. $\cos [\text{Arctan } (-1)]$ |
| 15. $\cos (2 \text{Arcsin } 1)$ | 16. $\sin (2 \text{Arctan } 2)$ |

在 17 至 20 各題中解出 x 。

- | | |
|-----------------------|------------------------------------|
| 17. $y = \sin 3x$ | 18. $y = \cos (x - \pi)$ |
| 19. $y = 1 + \sec 3x$ | 20. $y = 2 - \text{Arcsin } (x/6)$ |

在 21 至 26 各題中，對每一式求其代數式。

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 21. $\tan (\text{Arcsin } x)$ | 22. $\sin (\text{Arccos } x)$ |
| 23. $\sin (\text{Arcsin } x)$ | 24. $\cos (2 \text{Arctan } x)$ |
| 25. $\sin (2 \text{Arcsin } x)$ | 26. $\tan (\text{Arcsin } 2x)$ |

27. 在一彈簧端點擺動的某物體其位移的方程式為 $y = A \sin 2t$ ，解出 t 。

28. 證明 $\text{Arcsin } \frac{3}{5} + \text{Arcsin } \frac{5}{13} = \text{Arcsin } \frac{56}{65}$ 。〔提示：利用 $\sin(\alpha + \beta)$ 〕

6-6 反三角函數的導數

欲求 $y = \text{Arcsin } u$ 的導數，先解出 u 得 $u = \sin y$ 然後對 x 取導數：

$$\frac{du}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx}.$$

由此式解出 dy/dx 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{du}{dx}.$$

因對於 $\text{Arcsin } u$ 的主值範圍 $-\pi/2 < y < \pi/2$ ， $\cos y > 0$ 。故選正平方

根。因之可得：

$$\frac{d(\operatorname{Arcsin} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}. \quad (6-37)$$

反正弦函數的導數是代數函數。

令 $y = \operatorname{Arccos} u$ ，並按照求 $\operatorname{Arcsin} u$ 的導數的相同步驟可求反餘弦函數的導數：

$$\begin{aligned} u &= \cos y, & \frac{du}{dx} &= -\sin y \frac{dy}{dx}, \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\sin y} \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} \frac{du}{dx}. \\ \frac{d(\operatorname{Arccos} u)}{dx} &= -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}. \end{aligned} \quad (6-38)$$

因對於 $\operatorname{Arccos} u$ 主值範圍 $0 < y < \pi$, $\sin y > 0$, 故選正平方根。反餘弦的導數為反正弦的導數之負值。

令 $y = \operatorname{Arctan} u$ ，解出 u 並取其導數，可求反正切函數的導數：

$$\begin{aligned} u &= \tan y, & \frac{du}{dx} &= \sec^2 y \frac{dy}{dx}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec^2 y} \frac{du}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2 y} \frac{du}{dx}. \\ \frac{d(\operatorname{Arctan} u)}{dx} &= \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}. \end{aligned} \quad (6-39)$$

反正切函數的導數也是代數函數。

反正弦函數與反正切函數在應用及高深數學中較為重要。所以其他反三角函數的導數公式不再討論，而列於習題中。

例 A. 求 $y = \operatorname{Arcsin} 4x$ 的導數。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}} (4) = \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}.$$

例 B. 求 $y = \text{Arccos}(1-2x)$ 的導數。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{-1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}(-2) = \frac{2}{\sqrt{1-1+4x-4x^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4x-4x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}.\end{aligned}$$

例 C. 求 $y = (x^2+1)\text{Arctan } x - x$ 的導數。

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+1) \frac{1}{1+x^2} + (2x)\text{Arctan } x - 1 = 2x \text{Arctan } x.$$

例 D. 求 $y = x \text{Arctan}^2 2x$ 的導數。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x(2)(\text{Arctan } 2x) \left(\frac{1}{1+4x^2} \right) (2) + \text{Arctan}^2 2x \\ &= \left(\frac{4x}{1+4x^2} + \text{Arctan } 2x \right) \text{Arctan } 2x.\end{aligned}$$

例 E. 求 $y = x \text{Arcsin } 2x + \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2}$ 的導數。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x \left(\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \right) + \text{Arcsin } 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (1-4x^2)^{-1/2} (-8x) \\ &= \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} + \text{Arcsin } 2x - \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} = \text{Arcsin } 2x.\end{aligned}$$

習題

在 1 至 20 各題中, 求各函數的導數。

1. $y = \text{Arcsin } (x^2)$

2. $y = \text{Arcsin } (1-x^2)$

3. $y = 2 \text{Arcsin } 3x^3$

4. $y = \text{Arcsin } \sqrt{1-x}$

5. $y = \text{Arccos } \frac{1}{2}x$

6. $y = 3 \text{Arccos } 5x$

7. $y = \text{Arctan } \sqrt{x}$

8. $y = \text{Arctan } (1+x)$

9. $y = \text{Arctan } \left(\frac{1}{x} \right)$

10. $y = 4 \text{Arctan } 3x^4$

11. $y = x \operatorname{Arcsin} x$

12. $y = x^2 \operatorname{Arccos} x$

13. $y = \frac{3x}{\operatorname{Arcsin} 2x}$

14. $y = \frac{\operatorname{Arctan} 2x}{x}$

15. $y = \operatorname{Arcsin}^2 4x$

16. $y = \sqrt{\operatorname{Arcsin} (x-1)}$

17. $y = 3 \operatorname{Arctan}^3 x$

18. $y = \frac{1}{\operatorname{Arccos} 2x}$

19. $y = \frac{1}{1+4x^2} - \operatorname{Arctan} 2x$

20. $y = \operatorname{Arcsin} x - \sqrt{1-x^2}$

21. 求函數 $y = \operatorname{Arcsin}^3 x$ 的微分。22. 求函數 $y = \operatorname{Arctan} 2x$ 的二級導數。

23. 證明 $\frac{d(\operatorname{Arccot} u)}{dx} = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$ 。

24. 證明 $\frac{d(\operatorname{Arcsec} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2(u^2-1)}} \frac{du}{dx}$ 。

25. 證明 $\frac{d(\operatorname{Arccsc} u)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{u^2(u^2-1)}} \frac{du}{dx}$ 。

26. 某人走向高度 h 之一建築物，對建築物頂端之仰角爲此人與建築物距離 x 之函數。將仰角 θ 表爲 h 與 x 之式然後求 $d\theta/dx$ 。人之身高對建築物高度相較略去不計。

6-7 應 用

以上所導得各三角函數及反三角函數的導數公式，現可如同代數函數的導數情形一樣應用這些函數。可用三角函數及反三角函數以解時間變率，切線與法線，作曲線，極大與極小，及微分應用問題。以下各例說明這些函數在此類問題中的應用。

例 A. 作曲線 $y = \sin^2 x - \frac{x}{2}$, $0 \leq x \leq 2\pi$, 之圖。

首先求

$$\frac{dy}{dx} = 2 \sin x \cos x - \frac{1}{2} = \sin 2x - \frac{1}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \cos 2x.$$

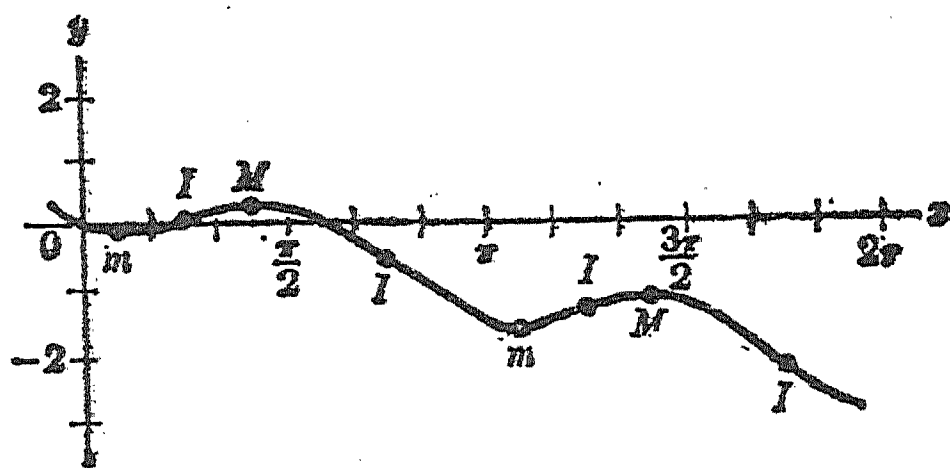


圖 6-18

唯一容易求得的截距為 $(0, 0)$ 。(看圖 6-18)在 $\sin 2x = \frac{1}{2}$ 處有極大或極小。因之極大及極小點係出現於

$$2x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}.$$

$$x = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}.$$

用二級導數，求得 $x = \pi/12$ 與 $13\pi/12$ 時 d^2y/dx^2 為正， $x = 5\pi/12$ 與 $x = 17\pi/12$ 時 d^2y/dx^2 為負。故極大點為 $(5\pi/12, 0.278)$ 與 $(17\pi/12, -1.19)$ 。極小點為 $(\pi/12, -0.064)$ 與 $(13\pi/12, -1.64)$ 。在 $\cos 2x = 0$ 處有反曲點，

$$2x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}.$$

各反曲點為 $(\pi/4, 0.11)$, $(3\pi/4, -0.68)$, $(5\pi/4, -1.47)$, $(7\pi/4, -2.25)$ 。用這些資料作出曲線。

例 B. 求內接於半徑為 2 之半圓內的最大矩形面積。

由圖 6-19 知 $A=2xy$, 其中 $x=2\cos\theta$, $y=2\sin\theta$ 。所以 $A=8\cos\theta\sin\theta=4\sin 2\theta$ 。欲求使有最大面積的 θ 值。

$$\frac{dA}{d\theta}=8\cos 2\theta, \quad 8\cos 2\theta=0, \quad 2\theta=\frac{\pi}{2}, \quad \theta=\frac{\pi}{4}.$$

故所求的最大面積為

$$A=4\sin 2(\pi/4)=4.$$

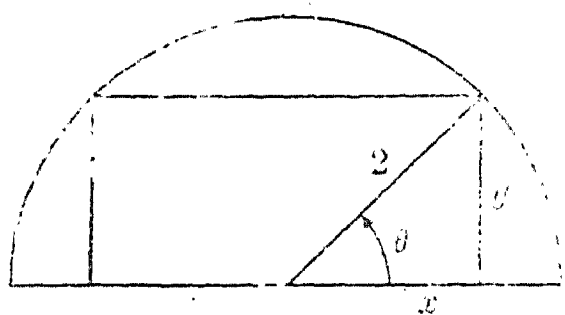


圖 6-19

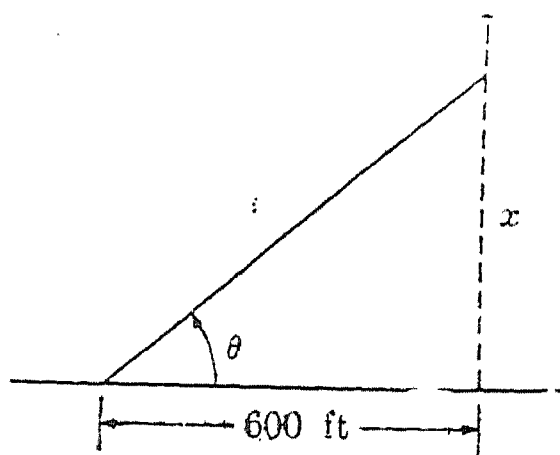


圖 6-20

例 C. 一火箭在距離觀測者 600 呎處垂直發射上升。若仰角為 $\pi/4$ 時, 其變率為 0.5 rad/sec , 火箭上升之速度如何?

由圖 6-20,

$$\theta = \text{Arctan}(x/600).$$

對時間取導數, 得

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1+x^2/(3.6 \times 10^5)} \frac{dx/dt}{600} = \frac{600 dx/dt}{3.6 \times 10^5 + x^2}.$$

由已知資料, $\theta = \pi/4$ 時 $d\theta/dt = 0.5 \text{ rad/sec}$, $x = 600$ 呎。

$$\text{故} \quad 0.5 = \frac{600 dx/dt}{7.2 \times 10^5}, \quad \frac{dx}{dt} = 600 \text{ ft/sec}.$$

此火箭在該瞬間以每秒 600 呎之率上升。

例 D. 運動之質點其 x 與 y 坐標為 $x = \cos 2t$, $y = \sin 2t$ 。求

$t = \pi/8$ 時其速度之大小與方向。

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -2 \sin 2t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 2 \cos 2t,$$

$$v_x|_{t=\pi/8} = -2 \sin 2\left(\frac{\pi}{8}\right) = -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2},$$

$$v_y|_{t=\pi/8} = 2 \cos 2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2},$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2+2} = 2, \quad \tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1.$$

因 v_x 為負且 v_y 為正， $\theta = 135^\circ$ 。此例中 θ 為水平線與合速度間之角。

由作曲線知其為一圓（圖 6-21）。故此質點係以反時針方向在一圓周上運動。將 x 與 y 之式分別平方後相加，得 $x^2 + y^2 = \cos^2 2t + \sin^2 2t = 1$ 。此乃半徑為 1 之圓。

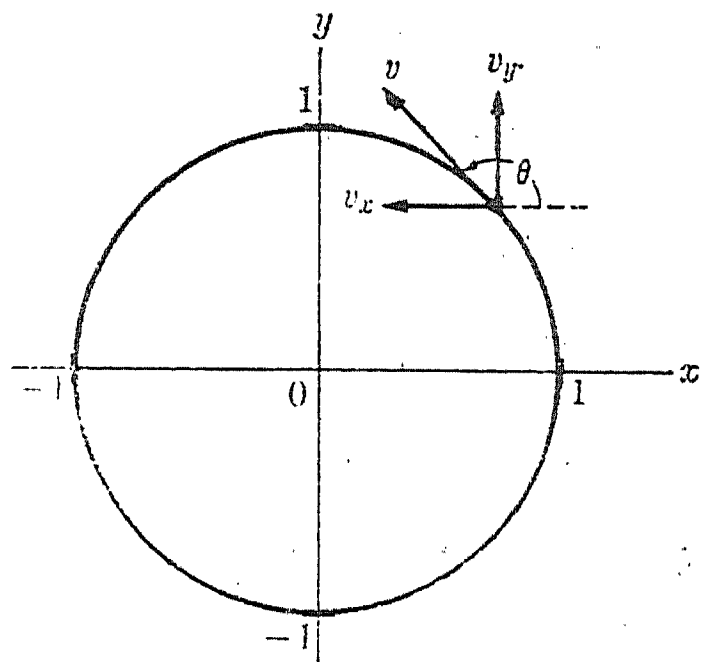


圖 6-21

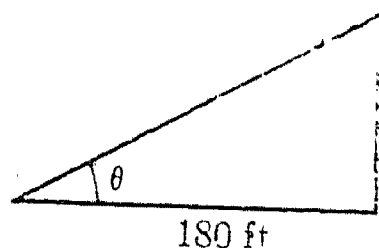


圖 6-22

例 E. 水平地面上距一建築物屋基 180 呎處一點對屋頂之仰角為 30° 。若此角度有誤差 $15'$ ，計算屋高時之誤差如何？

由圖 6-22， $h = 180 \tan \theta$ 。求 h 的微分

$$dh = 180 \sec^2 \theta d\theta.$$

因 $\theta = 30^\circ$ ， $\sec \theta = 2/\sqrt{3}$ ， $\sec^2 \theta = 4/3$ 。 θ 之可能誤差 $15'$ 即 0.25° ，

計算時應化為弧度, 即 0.00436 rad 。

$$dh = 180 \left(\frac{4}{3} \right) (0.00436) = 1.05 \text{ (呎)}.$$

可知仰角之誤差為 $15'$ 時可導致計算高度時有 1 呎以上的誤差。

習題

1. 證明正弦曲線與餘弦曲線在其交點處兩者的斜率互為負值。
2. 證明在有意義值的正切曲線恆為增加的。
3. 證明 $y = \text{Arctan } x$ 恆為增加。
4. 證明曲線 $y = \text{Arcsin } x$ 與 x 軸相交成 45° 角。
5. 作 $y = \sin x + \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 之圖。
6. 作 $y = \sin x + \sin 2x$ ($0 < x < 2\pi$) 之圖。
7. 作 $y = x - \tan x$ ($-\pi/2 < x < \pi/2$) 之圖。
8. 作 $y = \sin x - \tan x$ ($-\pi/2 < x < \pi/2$) 之圖。
9. 求曲線 $y = \sin 2x$ 在 $x = 5\pi/8$ 處的切線方程式。
10. 求曲線 $y = \text{Arctan } (x/2)$ 在 $x = 3$ 處的法線方程式。
11. 在奏某一音符時豎笛的簧端之位移為 $y = 0.2 \sin 265\pi t$, 其中 y 以公厘計 t 以秒計。求在 0.001 秒後, 簧端的速度。
12. 若某物體所行距離 (呎) 為時間 t 的函數 $s = \sin t + \cos 2t$, 求當 $t = \pi/6$ (秒) 時此物體的速度與加速度。
13. 直徑 40 呎的大轉輪每分鐘轉一圈, 其上一座位的 x 與 y 坐標 (對於其中心) 為 $x = 20 \sin 2\pi t$, $y = 20 \cos 2\pi t$ 。求一乘坐者從開始位置 10 秒後的速度之大小 (ft/min) 與方向。
14. 一物體之運動其 x 與 y 坐標為 $x = \cos 2t$, $y = 2 \sin t$ 。求在 $t = \pi/6$ 時此物體的速度之大小與方向。

15. 求例 D 中質點在 $t = \pi/8$ 時的加速度之大小與方向。
16. 求第 14 題中物體的加速度之大小與方向。
17. 某人觀測一物從相距 100 呎的一建築物屋頂落下。若屋高為 200 呎，求 1 秒後對此物體仰角的變率。(物體下落距離為 $s = 16t^2$.)
18. 一飛機以 500 ft/sec 之水平速度飛越 4000 呎下地面的一觀測者。在此瞬間其仰角的變率如何？
19. 直角三角形之一股長為 6 單位，以此股為邊之銳角其增加率為 0.1 rad/sec。斜邊長為 10 單位時其變率如何？
20. 在一現代化旅館中，在休息室內可看到電梯(人在電梯中也可看見外面)，一人在休息室中看到電梯以 12 ft/sec 之率上升。若電梯離此室時此人距此電梯為 50 呎，此人視線對電梯之仰角在 10 秒後增加之率如何？
21. 一工廠從生產 x 單位貨品的每週總獲利 P 元為 $P = 10000 \sin 0.1x$, $0 < x < 30$ 。當產量由 20 單位變為 22 單位求獲利的近似變化。
22. 一三角形的兩邊及其夾角量得為 8.00 吋, 7.50 吋及 40° 。若夾角的誤差為 0.5° ，計算第三邊時所生的誤差如何？
23. 用三角函數求周長為 12 吋的最大矩形的面積。
24. 求已知周長之等腰三角形中面積最大者的頂角。
25. 一牆之高度為 6 呎與一建築物距離為 4 呎。越過牆的桿其兩端與建築物及地面接觸，桿之最短長度如何？
[提示： $y = 6 \csc \theta + 4 \sec \theta$ ，看圖 6-23。]

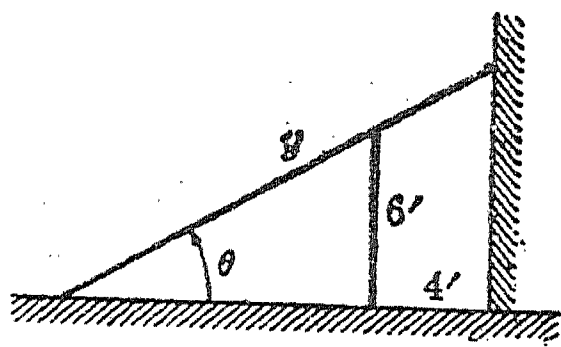


圖 6-23

26. 一幅畫 8 呎高掛在牆上其下端在觀察者眼睛的水平線之上 2 呎。欲視線

對此畫所張之角爲最大, 觀察者距牆應多遠?

6-8 雜 題

在 1 至 20 各題中, 求各函數的導數。

1. $y = 3 \cos (4x - 1)$
2. $y = 4 \sin (\frac{1}{2}x + 1)$
3. $y = \tan \sqrt{3-x}$
4. $y = 5 \csc 2x^2$
5. $y = 3 \operatorname{Arctan}(\frac{x}{3})$
6. $y = 2 \operatorname{Arcsin} (1-2x)$
7. $y = 2 \sin^3 \sqrt{x}$
8. $y = \cot^2 5x$
9. $y = x \sec 2x$
10. $y = (x+1) \cos 2x$
11. $y = \frac{\operatorname{Arcsin} x}{x}$
12. $y = \frac{2 \tan^2 3x}{x}$
13. $y = \sqrt{\csc 4x + \cot 4x}$
14. $y = 3 \sin^3 2x - 2 \cos^2 3x$
15. $y = \operatorname{Aresin} (\cos x)$
16. $y = \sin (\operatorname{Arctan} x)$
17. $y = x \operatorname{Arccos} x - \sqrt{1-x^2}$
18. $y = x \operatorname{Arcsin}^2 x + 2 \sqrt{1-x^2} \operatorname{Arcsin} x - 2x$
19. $x \sin 2y = y \cos 2x$
20. $x + \sec^2 (xy) = 1$

21. 旋轉木馬之脊在平臺以上之高度 h (呎) 爲

$$h = 4 - \sin \frac{\pi}{3} t.$$

求在 $t=2$ (秒) 時騎在馬上的人的垂直速度。

22. 一球繫於繩之端點在一垂直於水平面的圓周上運動。其影子與某一點的距離爲

$$x = 4 \cos \left(\frac{\pi}{3} t + \frac{\pi}{6} \right).$$

求 $t=6$ (秒) 時影子的速度 (ft/sec)。

23. 一物體的運動其坐標爲 $x = \sin 2\pi t$ 與 $y = \cos 2\pi t$ 求在 $t = \frac{1}{12}$ 時的
速度之大小與方向。

24. 求上題中物體的加速度之大小與方向。

25. 求曲線 $y=4\cos^2(x^2)$ 在 $x=1$ 處的切線方程式。
26. 求曲線 $y=\text{Arctan } x$ 在 $x=1$ 處的法線方程式。
27. 作函數 $y=x-\cos x$ 之圖。
28. 作函數 $y=4\sin x+\cos 2x$ 之圖。
29. 距牆 300 呎之旋轉光，其旋轉速度為每分鐘 6 迴轉。求光柱與牆成 45° 角時沿牆之瞬時速度。
30. 在光學中，一液體之折射率為 $n=\frac{\sin i}{\sin r}$ ，其中 i 為光從空氣到液體的入射角， r 為折射光在液體內的角。若入射角以 0.05 rad/min 之率增加，對於苯 $n=1.50$ ，當 $i=10^\circ$ 時求 r 的變率。
31. 直升機駕駛員與地上某點的水平距離為 500 呎。若直升機垂直運動，當他對該點的俯角由 50° 變為 47° 其高度的近似變化如何？
32. 作用於一擺錘上使其恢復至平衡位置之力為 $F=-mg\sin\theta$ ，其中 m 為擺錘的質量， g 為重力加速度， θ 為擺與垂直線間之角。設 $g=980 \text{ cm/sec}^2$ ，對一重 10 克之擺錘求 θ 為 3.0° 與 3.1° 時力之近似差。
33. 一屋簷承雷由 12 吋寬的金屬長條製成，長條的兩邊各折起 4 吋，兩邊與垂直線所成之角皆為 θ （看圖 6-24）。作截面面積 A 為 θ 的函數之圖。

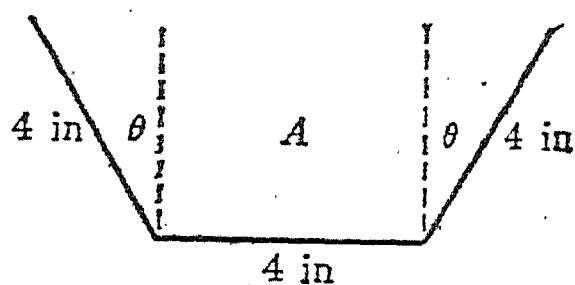


圖 6-24

34. 八呎高的雕像其底座在觀察者眼睛的水平線之上 4 呎，觀察者應距底座多遠可使視線對雕像所張之角為最大？
35. 一光源之照明度與入射角（由垂直線量起）之餘弦成正比而與到光源的距離 r 的平方成反比，一圓半徑為 10 吋，欲使光在圓周上的照明度為最大，光源應在圓心之上方幾吋處？（看圖 6-25）。

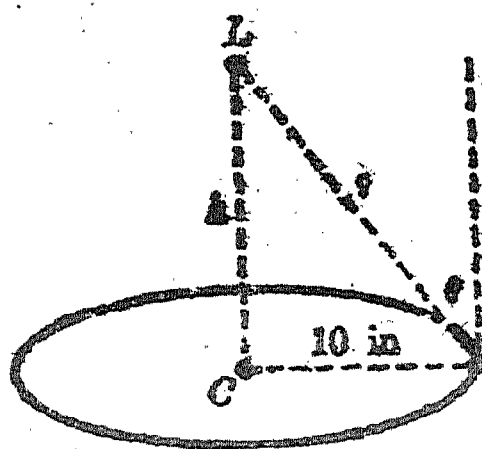


圖 6-25

36. 一 Y 形金屬架，高度為 10 吋，頂部寬度為 6 吋。求使所用材料最少之形。

第七章

指數函數與對數函數的導數

7-1 指數函數與對數函數

一個在生物、商業、及科學的許多應用中都很重要的函數是指數函數。與指數函數密切相關的對數函數亦有很多應用。因此，本節中將複習這些函數的性質，並在本章的其他各節中推演它們的導數。

由定義，指數函數的形式為

$$y = b^x, \quad (7-1)$$

其中 b 為底，是常數；指數 x 為自變數。兩變數限為實數而必須選取 1 以外的正數為底。因 1 的任何次幂皆為 1。若 b 為負數， x 為分母係偶整數的任何分數時，使 y 之值為虛數。

例 A. $y = 2^x$ 為一指數函數， x 為 2 的指數。亦即，2 的任何次幂可有其對應的 y 值。若 $x = 2$, $y = 4$ ；若 $x = -4$, $y = 1/16$ ；若 $x = 1/2$, $y = \sqrt{2} = 1.41$ ；若 $x = 3/2$, $y = 2\sqrt{2} = 2.83$ 。由指數函數的定義， x 可為任何實數值。

在(7-1)式中，因 y 為 x 的函數，亦可定 x 為 y 的函數。在(7-1)式中，定義 x 為 b 作底 y 的對數，寫作

$$x = \log_b y. \quad (7-2)$$

(7-1) 式與 (7-2) 式係以不同方式述明同一關係。(7-1) 式為指數式；而(7-2)式為對數式。在每一情形中， x 為一對數且對數為一指數。

例 B. 把 $y=2^x$ 寫成對數式為 $x=\log_2 y$ 。選定 y 之值後，由此式求出對應的 x 值，“2 的何次幂可得 y ？”所以，若 $y=4$ ，知 2^2 為 4 故 x 為 2。若 $y=8$ ， $2^3=8$ 得 $x=3$ 。

例 C $3^2=9$ 的對數式為 $2=\log_3 9$ ； $4^{-1}=1/4$ 的對數式為 $-1=\log_4 1/4$ 。記住，指數可為負值，但底必須為正值。

若 $-4=\log_b (1/81)$ ，寫成指數式時可求出 b 。指數形式為 $b^{-4}=1/81$ ，即 $b=3$ 。

討論函數關係時，通常用 y 表因變數，而 x 表自變數。基此原因，定義對數函數為

$$y=\log_b x. \quad (7-3)$$

由於變數的位置，(7-2) 式與 (7-3) 式好像有不同的意義。但一函數係由對於自變數上的運算而定義，而非由代表自變數的字母而定。此二式表同一函數，對數函數。

現示明(7-1)式指數函數及(7-3)式對數函數的圖形。據此可說明其性質。以下各例說明此事。

例 D. 作 $y=2^x$ 之圖。

設定 x 之值，然後求出的各對應值，得下表中各值。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

由這些值作出曲線，如圖 7-1 所示。

例 E. 作 $y=\log_3 x$ 之圖。

若先將方程式化為指數式： $x=3^y$ ，較易求出此圖上之點。由設定 y 之值，可求出 x 的各對應值。

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
y	-2	-1	0	1	2	3

由這些值作出圖 7-2 中的曲線。

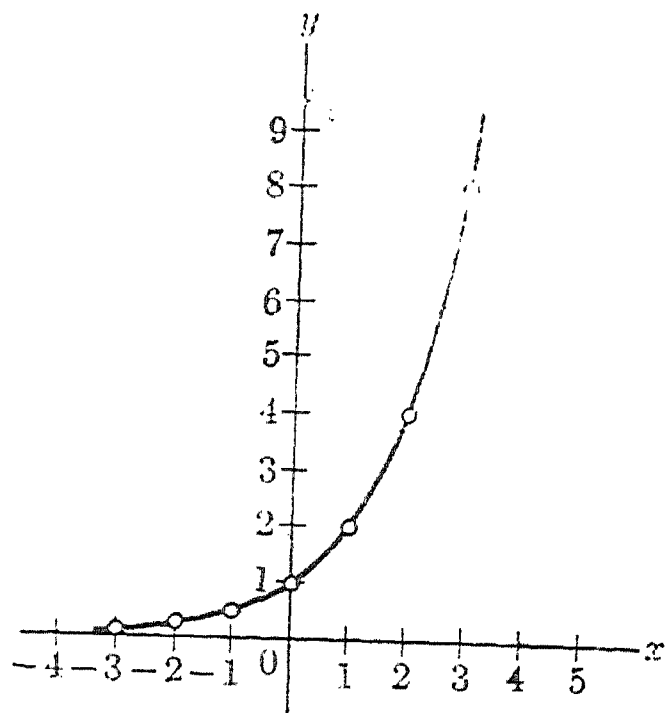


圖 7-1

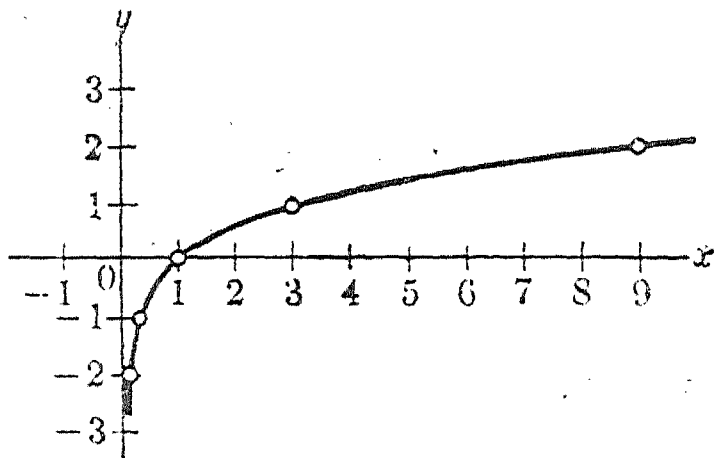


圖 7-2

任何指數曲線或對數曲線，其中 $b > 1$ ，皆與例 D 與例 E 者相似。由此可得一些結論：

- (1) 若 $0 < x < 1$, $\log_b x < 0$; $\log_b 1 = 0$; 若 $x > 1$, $\log_b x > 0$ 。
- (2) 若 $x > 1$, x 增加比 $\log_b x$ 快。
- (3) 對所有 x 值, $b^x > 0$ 。
- (4) 若 $x > 1$, b^x 增加比 x 快。

因一個對數也是一個指數，必須服從指數律。指數律在此時極為重要，列之於下以供參考。

$$b^u \cdot b^v = b^{u+v}, \quad (7-4)$$

$$b^u / b^v = b^{u-v}, \quad (7-5)$$

$$(b^u)^n = b^{nu}. \quad (7-6)$$

現將指示用這些指數律如何獲得對數的一些有用性質。

若令 $u = \log_b x$, $v = \log_b y$ 並把此二式寫為指數式，得 $x = b^u$, $y = b^v$ 。可得

$$xy = b^u b^v = b^{u+v}.$$

寫成對數式，即為

$$\begin{aligned} u+v &= \log_b xy, \\ \text{即 } \log_b x + \log_b y &= \log_b xy. \end{aligned} \quad (7-7)$$

(7-7)式所述之性質爲：二數乘積的對數，等於此二數的對數之和。

用 u 與 v 的同樣定義，可得

$$\frac{x}{y} = \frac{b^u}{b^v} = b^{u-v}.$$

寫成對數式，即爲

$$\begin{aligned} u-v &= \log_b \frac{x}{y}, \\ \text{即 } \log_b x - \log_b y &= \log_b \frac{x}{y}. \end{aligned} \quad (7-8)$$

(7-8)式所述之性質爲：二數之商的對數等於分子的對數減以分母的對數。

再令 $u = \log_b x$ 並寫成指數式爲 $x = b^u$ 。而

$$x^n = (b^u)^n = b^{nu}.$$

把此式寫成對數式爲

$$\begin{aligned} nu &= \log_b (x^n), \\ \text{即 } n \log_b x &= \log_b (x^n). \end{aligned} \quad (7-9)$$

此式所述者爲：一數 n 次冪的對數等於此數的對數乘以 n 。指數 n 可爲整數或分數。因此，可用(7-9)式以求一數的乘冪及根。

例 F 。由 (7-7) 式可知

$$\log_2 6 = \log_2 (2 \cdot 3) = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3.$$

由 (7-8) 式可知

$$\log_5 100 - \log_5 4 = \log_5 \frac{100}{4} = \log_5 25 = 2.$$

若已知

$$\log_b y = 2 \log_b x + \log_b a,$$

由(7-7)式與(7-9)式, 可寫為

$$\log_b y = \log_b x^2 + \log_b a = \log_b (ax^2),$$

因之,

$$y = ax^2.$$

有兩種對數之底應用較廣。底 10 主要用於計算；而底 e ，一個無理數約等於 2.718，主要用於理論方面。下節將可看出何以選用 e 作對數之底。此兩種情形的對數表皆列於附錄中。

現認為學生已熟悉以 10 為底的對數之計算。未寫出其底的對數 $\log x$ 係表示以 10 為底的對數。

因本章主要目的為推展對數函數與指數函數的導數，將採用 e 為底。用 $\ln x$ 表示以 e 為底的對數。

有時需要把一底的對數變為另一底的對數。若 $u = \log_b x$, $b^u = x$ ，取兩邊以 a 為底的對數，可得

$$u \log_a b = \log_a x, \quad u = \frac{\log_a x}{\log_a b},$$

即

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}. \quad (7-10)$$

用(7-10)式可把一底的對數變為另一底的對數。卜例說明此事。

例 G. 因以 10 為底的對數表較為普遍，故常需把以 10 為底的對數變換為另一底。欲把 $\log 20 = 1.3010$ 變作以 e 為底，亦即求 $\ln 20$ 。

$$\ln 20 = \frac{\log 20}{\log e} = \frac{\log 20}{\log 2.718} = \frac{1.3010}{0.4343} = 2.996.$$

習題

在 1 至 12 各題中，凡指數式變換為對數式，凡對數式變換為指數式。

1. $4^4 = 256$
2. $3^{-2} = \frac{1}{9}$
3. $\log_8 16 = \frac{4}{3}$
4. $\log_7 \left(\frac{1}{49}\right) = -2$
5. $8^{1/3} = 2$
6. $81^{3/4} = 27$
7. $\log_{0.5} 16 = -4$
8. $\log_{243} 3 = \frac{1}{5}$
9. $(12)^0 = 1$
10. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
11. $\log_8 \left(\frac{1}{512}\right) = -3$
12. $\log_{1732} \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{5}$

在 13 至 16 各題中, 求各文字所表之值。

13. $\log_7 y = 3$
14. $\log_8 4 = \frac{2}{3}$
15. $\log (10)^{0.2} = x$
16. $\log_8 y = -\frac{2}{3}$

17, 18 兩題作函數之圖。

17. $y = 3^x$
18. $y = 2 \log_4 x$

在 19 至 22 各題中, 化簡各對數式。

19. $\log_5 9 - \log_5 3$
20. $\log_4 3^3 - \log_4 9$
21. $\log_b \sqrt{x} - \log_b x^2$
22. $\log_b b^{-1} + \log_b \sqrt{b}$

在 23 至 26 各題中, 用以 10 為底的對數表計算各對數。

23. $\ln 3$
24. $\ln 0.9$
25. $\log_7 42$
26. $\log_{12} 122$

27. 高度 h 處的大氣壓力為 $p = p_0 e^{-kh}$, 其中 p_0 與 k 為常數。求以對數式表 h 。

28. 銀行中存款年利率為 4%, 三個月複利一次。一筆存款 A 在 t 年後的本利和為 $V = A(1.01)^{4t}$ 。用以 10 為底的對數解出 t 。

29. 在 1960 年一城市的人口數為 10000。此城市在 t 年後的人口數 P 為 $\ln P = 0.01t + \ln 10000$ 。求以指數式表 P 。

30. 附錄中的第 4 表為一簡短的自然對數表。用這些對數值可作計算, 但計算

時需加或減 2.3026 的倍數以定正確的小數點位置。在 $N = P \cdot 10^k$ 的情形, 則

$$\ln N = \ln P + k \ln 10 = \ln P + k (2.3026)$$

例如,

$$\ln 2.500 = 0.9163, \quad \ln 250.0 = 0.9163 + 2(2.3026) = 5.5215。$$

求下列各數的自然對數:

$$(a) 6.700 \quad (b) 67.00 \quad (c) 3400 \quad (d) 0.3400$$

用這些值計算 $(6.700)(3400)$ 。

7-2 對數函數的導數

現先求對數函數的導數。用對數函數的導數可求指數函數的導數, 此事將在下節中討論。現再用 Δ 步驟。令 $y = \log_b u$, 其中 u 為 x 的函數, 而得

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= \log_b (u + \Delta u), \\ \Delta y &= \log_b (u + \Delta u) - \log_b u = \log_b \left(\frac{u + \Delta u}{u} \right) \\ &= \log_b \left(1 + \frac{\Delta u}{u} \right), \\ \frac{\Delta y}{\Delta u} &= \frac{\log_b (1 + \Delta u/u)}{\Delta u} = \frac{1}{u} \cdot \frac{u}{\Delta u} \log_b \left(1 + \frac{\Delta u}{u} \right) \\ &= \frac{1}{u} \log_b \left(1 + \frac{\Delta u}{u} \right)^{u/\Delta u} \end{aligned}$$

(以 u 乘及除之, 是爲了以下計算極限值的需要。) 欲計算 $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$ 之值需求

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta u}{u} \right)^{u/\Delta u}$$

指數變爲無限但括弧內的數趨於 1。

欲求其近似值，作函數 $y = (1+x)^{1/x}$ 之圖（令 $\Delta u/u = x$ ）。製一數值表然後作函數之圖（圖 7-3）。

x	-0.5	-0.25	+0.25	+0.50	+1.00
y	4.00	3.16	2.44	2.25	2.00

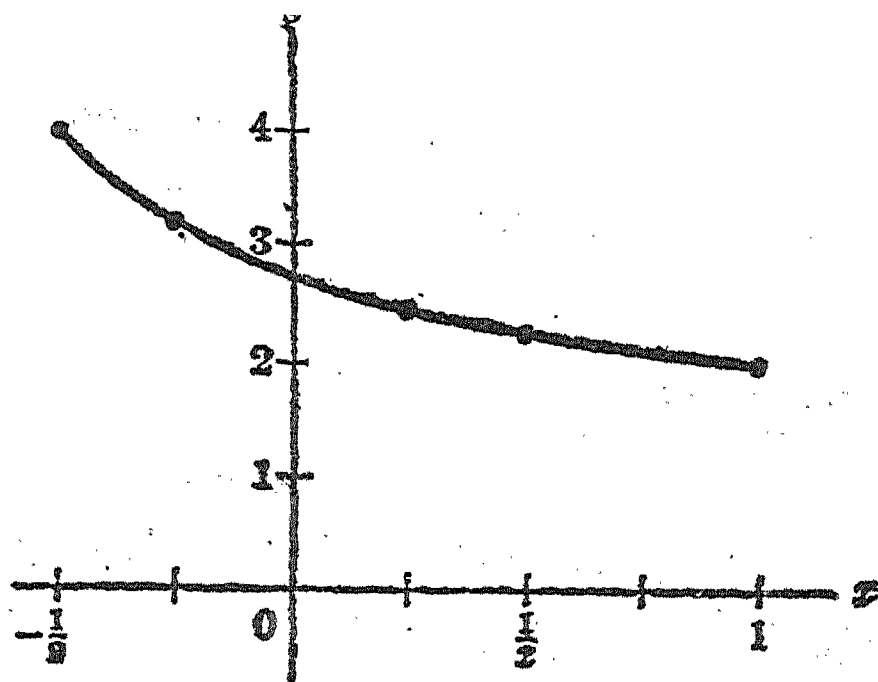


圖 7-3

因欲求 $x=0$ 附近的 y 值，故表及圖中只指出 $x=0$ 附近的值。自圖中看出此值近似於 2.7。選擇很小的 x 值可得以下各值：

x	0.1000	0.0100	0.0010	0.0001
y	2.594	2.705	2.717	2.718

在第 12 章中討論的方法可證明此值約為 2.71828。此極限值為無理數以 e 表之。

關於對數函數的導數，可得

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left[\frac{1}{u} \log_b \left(1 + \frac{\Delta u}{u} \right)^{u/\Delta u} \right] = \frac{1}{u} \log_b e.$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \log_b e.$$

由此式及 (6-28) 式，可得

$$\frac{d(\log_b u)}{dx} = \frac{1}{u} \log_b e \frac{du}{dx}. \quad (7-11)$$

在此, 若選擇 e 作為對數之底, 上式成為

$$\frac{d(\ln u)}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}. \quad (7-12)$$

選擇 e 作為底 b , 使 $\log_b e = 1$; 因之 (7-12) 式中可以少一個因數。現可知為什麼要選 e 作為一對數系之底。

例 A. 求 $y = \log 4x$ 的導數。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4x} (\log_e e) 4 = \frac{1}{x} \log e. \quad (\log e = 0.4343)$$

例 B. 求 $y = \ln 3x^4$ 的導數。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^4} (12x^3) = \frac{4}{x}.$$

例 C. 求 $y = \ln \tan x$ 的導數。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan x} \sec^2 x = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \csc x \sec x.$$

例 D. 求 $y = \ln [(x-1)/(x+1)]$ 的導數。

此例中把 y 寫成下式較易求解:

$$y = \ln(x-1) - \ln(x+1).$$

(若用對數的性質以化簡原式常能較易求其導數。)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2-1}.$$

例 E. 求 $y = \ln (1-2x)^3$ 的導數。

先把原式寫為 $y = 3 \ln (1-2x)$, 則

$$\frac{dy}{dx} = 3 \left(\frac{1}{1-2x} \right) (-2) = \frac{-6}{1-2x}.$$

須注意此函數與 $y = [\ln(1-2x)]^3$ 不同。後一函數中係對數的立方而第一函數中係 $(1-2x)$ 的立方。後一函數的導數為

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 3[\ln(1-2x)]^2 \left(\frac{1}{1-2x} \right) (-2) \\ &= -\frac{6[\ln(1-2x)]^2}{1-2x} \end{aligned}$$

習題

在 1 至 20 各題中, 求各函數的導數。

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1. $y = \log x^2$ | 2. $y = \log_2 6x$ |
| 3. $y = \ln(1-3x)$ | 4. $y = 2 \ln(3x^2-1)$ |
| 5. $y = 2 \ln \tan 2x$ | 6. $y = \ln \sin x$ |
| 7. $y = \ln \sqrt{x}$ | 8. $y = \ln \sqrt{4x-3}$ |
| 9. $y = x \ln x$ | 10. $y = \frac{\ln x}{x}$ |
| 11. $y = \ln(\ln x)$ | 12. $y = \ln \cos x^2$ |
| 13. $y = \ln \frac{x}{1+x}$ | 14. $y = \ln(x \sqrt{x+1})$ |
| 15. $y = \sin \ln x$ | 16. $y = (\ln x)^3$ |
| 17. $y = \ln(x \tan x)$ | 18. $y = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ |
| 19. $y = \ln \frac{x^2}{x+2}$ | 20. $y = \sqrt{x^2+1} - \ln \frac{1 + \sqrt{x^2+1}}{x}$ |

21. 求曲線 $y = \ln \cos x$ 在 $x = \pi/4$ 處的切線的斜率。

22. 求函數 $y = x^2 \ln x$ 的二級導數。

23. 求 $y = x^x$ 的導數。(先取兩邊的對數。)

24. 某一蒸氣管自其內表面到外表面的溫度 T 為

$$T = 100 - 40 \frac{\ln(r/5)}{\ln(6/5)},$$

其中 r 爲到管中心的距離。求溫度對 r 的變率。(此解只適合 $5 < r < 6$, 因爲這二值分別爲管之內半徑與外半徑。)

7-3 指數函數的導數

欲求指數函數的導數，令 $y = b^u$ ，再把方程式寫爲對數式：

$$\begin{aligned} u &= \log_b y, \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1}{y} \log_b e \frac{dy}{dx}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\log_b e} y \frac{du}{dx} = \frac{1}{\log_b e} b^u \left(\frac{du}{dx} \right), \\ \frac{d(b^u)}{dx} &= \frac{1}{\log_b e} b^u \left(\frac{du}{dx} \right). \end{aligned} \quad (7-13)$$

若令 $b = e$ ，(7-13) 式成爲

$$\frac{d(e^u)}{dx} = e^u \left(\frac{du}{dx} \right). \quad (7-14)$$

例 A. 求 $y = e^x$ 的導數。

$$\frac{dy}{dx} = e^x (1) = e^x.$$

函數 e^x 的導數等於其本身，此一指數函數在積分應用上用途很廣。

例 B. 求 $y = 2^{4x}$ 的導數。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log_2 e} 2^{4x} (4) = \frac{4}{\log_2 e} 2^{4x}.$$

例 C. 求 $y = \ln \cos e^{2x}$ 的導數。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos e^{2x}} (-\sin e^{2x}) (e^{2x}) (2) = -2e^{2x} \tan e^{2x}.$$

例 D. 求 $y = xe^{\tan x}$ 的導數。

$$\frac{dy}{dx} = x(e^{\tan x})\sec^2 x + e^{\tan x} = e^{\tan x} (x\sec^2 x + 1)。$$

例 E. 求 $y = (e^{1/x})^2$ 的導數。

$$\frac{dy}{dx} = 2(e^{1/x})(e^{1/x})(-1/x^2) = \frac{-2(e^{1/x})^2}{x^2} = \frac{-2e^{2/x}}{x^2}。$$

此題亦可依指數律先把函數式寫為 $y = e^{2/x}$ 解之, 用此式時, 導數為

$$\frac{dy}{dx} = e^{2/x}(-2/x^2) = \frac{-2e^{2/x}}{x^2}。$$

可知函數形式的此一改變可簡化求導數的步驟。

由(7-14)式與(7-13)式比較, 再一次看出選用 e 作為自然對數之底的便利。由於這個原因, e 在積分應用上經常出現。

習題

在 1 至 20 各題中, 求各函數的導數。

- | | |
|--|--|
| 1. $y = e^{6x}$ | 2. $y = 3e^{x^2}$ |
| 3. $y = 4^{6x}$ | 4. $y = 10^{x^2}$ |
| 5. $y = e^{\sqrt{x}}$ | 6. $y = e^{2x^4}$ |
| 7. $y = xe^x$ | 8. $y = x^2e^{2x}$ |
| 9. $y = xe^{\sin x}$ | 10. $y = e^x \sin x$ |
| 11. $y = \frac{3e^{2x}}{x+1}$ | 12. $y = \frac{e^x}{x}$ |
| 13. $y = e^{-3x} \sin 4x$ | 14. $y = (\cos 2x)(e^{x^2-1})$ |
| 15. $y = e^{2x} - e^{-2x}$ | 16. $y = 4e^{-(2/x)}$ |
| 17. $y = \ln \sin 2e^{6x}$ | 18. $y = \tan e^{x+1}$ |
| 19. $y = 2 \operatorname{Arcsin} e^{2x}$ | 20. $y = \operatorname{Arctan} e^{3x}$ |

21. 證明 $y = xe^{-x}$ 滿足微分方程式 $(dy/dx) + y = e^{-x}$ 。

22. 證明 $y = e^{-x} \sin x$ 滿足微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

23. 在實驗室培養細菌，最初的數目為 N_0 ， t 小時後細菌數目 $N = N_0 e^{kt}$ ，其中 k 為常數，求 N 對 t 的變率。

24. 裝有電壓 E 的電池之電路中，其電流為時間的函數

$$i = E(1 - e^{-10t}).$$

求電流 i 的時間變率。

7.4 應用

以下各例說明對數函數與指數函數在作曲線及時間變率問題上的應用。其他一些應用在習題中指出。

例 A. 作函數 $y = x \ln x$ 之圖。

唯一截距為 $(1, 0)$ ，(因 $\log_e 0$ 無意義，故對 $x=0$ 無截距。)

$$\frac{dy}{dx} = x \left(\frac{1}{x} \right) + \ln x = 1 + \ln x, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x}.$$

若 $\ln x = -1$ ，即 $x = e^{-1}$ ，一級導數為零。於此值二級導數為正。因之，在 $(1/e, -1/e)$ 有一極小點。因 $\ln x$ 對 x 為負值時無意義，故僅

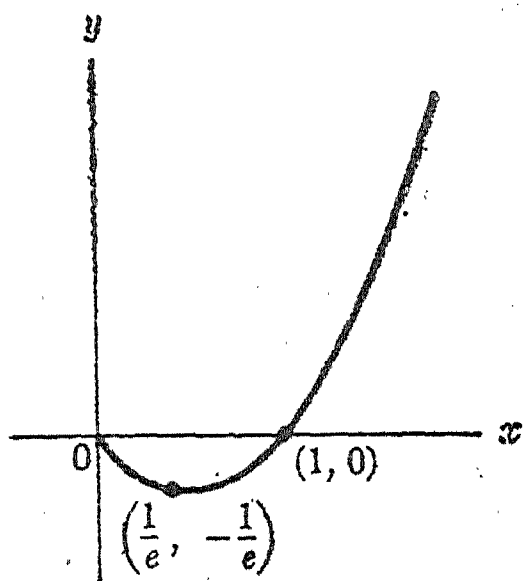


圖 7-4

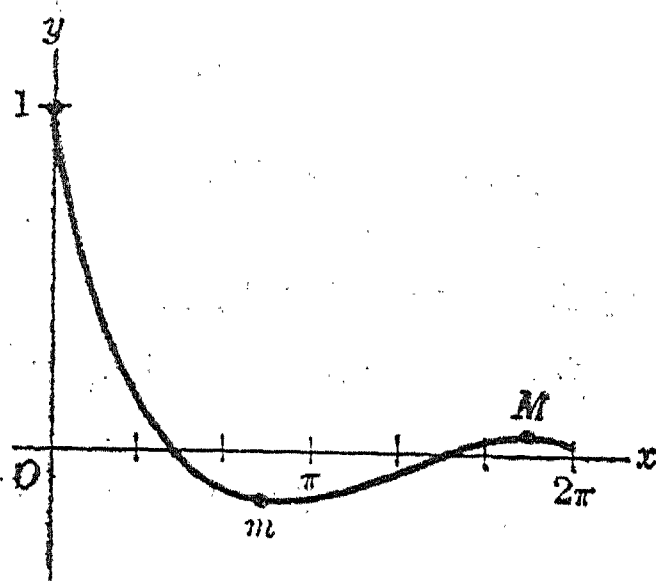


圖 7-5

論 x 爲正值之情形。二級導數指出曲線恆向上凹。其圖示於圖 7-4 中。

例 B. 作函數 $y = e^{-x} \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 之圖。

對於所有使 $\cos x$ 爲零之值這曲線有截距。在 0 與 2π 間使 $\cos x = 0$ 之值爲 $x = \pi/2$ 及 $x = 3\pi/2$ 。又 $(0, 1)$ 亦爲一截距。

$$\frac{dy}{dx} = -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x = -e^{-x}(\sin x + \cos x).$$

令一級導數等於零，可得 $\sin x + \cos x = 0$ ，或 $\tan x = -1$ 。在 $x = 3\pi/4$ 及 $x = 7\pi/4$ 處有極大值或極小值之點（看圖 7-5）。

$$\text{又} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2e^{-x} \sin x.$$

二級導數在 $x = 3\pi/4$ 時爲正及在 $7\pi/4$ 時爲負。故 $(3\pi/4, -0.067)$ 爲極小值點及 $(7\pi/4, 0.003)$ 爲極大值點。由二級導數可得各反曲點在 $x = 0, \pi$ ，及 2π 處。

例 C. 一城市的人口數 P ，以某一天後的日數 t 及在該天的人口數 P_0 表之，爲 $P = P_0 e^{kt}$ 。證明此城市人口之時間變率與時間 t 時的人口數成正比。

取 P 對時間的導數，得

$$\frac{dP}{dt} = k(P_0 e^{kt}) = kP.$$

此證明 dP/dt 與 P 成正比。

例 D. 一垂直運動之火箭假設重力爲唯一作用於其上之力且其質量以一常數率 r 減少，其速度 v 爲時間之函數

$$v = v_0 - gt - k \ln(1 - rt/m_0),$$

其中 v_0 爲初速， m_0 爲初質量， k 爲一常數。求加速度之式。

因加速度爲速度的時間變率，必須求 dv/dt 。

$$\begin{aligned}\frac{v}{dt} &= -g - k \frac{1}{1 - rt/m_0} (-r/m_0) \\ &= -g + \frac{km_0}{m_0 - rt} \left(\frac{r}{m_0} \right) = \frac{kr}{m_0 - rt} - g.\end{aligned}$$

習題

在 1 至 10 各題中，作各函數之圖。

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $y = \ln \cos x$ | 2. $y = \frac{\ln x}{x}$ |
| 3. $y = xe^{-x}$ | 4. $y = xe^x$ |
| 5. $y = \ln \frac{1}{x^2 + 1}$ | 6. $y = \ln x - x$ |
| 7. $y = x - e^x$ | 8. $y = e^{-x} \sin x$ |
| 9. $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ | 10. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ |

11. 求曲線 $y = x^2 \ln x$ 在 $(1, 0)$ 點的切線之方程式。
12. 求曲線 $y = \ln \frac{x^2 + 1}{10}$ 在 $x = 3$ 處的法線之方程式。
13. 鐳的原子數 N 在任何時間 t 時為 $N = N_0 e^{-kt}$, N_0 為 $t = 0$ 時的原子數。證明 N 的時間變率與 N 成正比。
14. 一房間使用排氣機使在 t 分鐘後房中的二氧化碳的立方呎數為 $n = 3(e^{-0.05t} + 1)$ 。求 n 對 t 的時間變率。證明此結果為 $0.05(3 - n)$ 。
15. 力與加速度成正比，一質點在 x 軸上的位移為 $x = ae^{kt} + be^{-kt}$ ，證明作用於其上之力與位移成正比。
16. 一曲線上之點的曲率半徑為

$$R = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2}$$

求曲線 $y = \ln \sec x$ 在 $x = \pi/4$ 時的曲率半徑。

17. 一心理學家知道某人對某種知識在 t 分鐘內所習到的百分數 p (即 $p\%$) 為 $p = \ln(5t + 1)^2$ 。求第四分鐘內所習到的近似百分數。

18. 一物體在彈簧的一端其運動時離平衡位置之位移為 $y = e^{-0.5} (0.4 \cos 6t - 0.2 \sin 6t)$ 。求表此物體的速度之式。當 $t = \pi/12$ 秒時其速度如何？此方程式所述之運動稱為“阻尼諧動”。位移為時間的函數其曲線的一般形狀為例 **B** 中曲線的形狀。
19. 一商人知道每週賣出商品 x 件總收入為 $I = 100xe^{-x/10}$ 。每週應賣出幾件可使 I 為極大？

7-5 雜 題

在 1 至 20 各題中，求各函數的導數。

- | | |
|--------------------------------|------------------------------|
| 1. $y = 3 \ln(x^2 + 1)$ | 2. $y = \ln(1 - 5x)^3$ |
| 3. $y = (e^{x-3})^2$ | 4. $y = e^{\sqrt{1-x}}$ |
| 5. $y = \ln(\csc x^2)$ | 6. $y = \ln(3 + \sin x^2)$ |
| 7. $y = [\ln(3 + \sin x)]^2$ | 8. $y = \ln(3 + \sin x)^2$ |
| 9. $y = e^{\sin 2x}$ | 10. $y = 3e^{\sec 3x}$ |
| 11. $y = x^3 e^x$ | 12. $y = 2xe^{4x}$ |
| 13. $y = x^2 \ln x$ | 14. $y = (x+1) \ln(x^3+1)$ |
| 15. $y = \frac{e^{2x}}{x^2+1}$ | 16. $y = \frac{\ln x}{2x+1}$ |
| 17. $y = e^{-x} \sec x$ | 18. $y = e^{3x} \ln x$ |
| 19. $x^2 \ln y = y + x$ | 20. $y = x^2(e^{\cos 2x})^2$ |
21. 求曲線 $y = \ln \cos x$ 在 $x = \pi/6$ 處切線的方程式。
22. 求曲線 $y = e^{x^2}$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 處法線的方程式。
23. 作 $y = \ln(1+x)$ 之圖。
24. 作 $y = x(\ln x)^2$ 之圖。
25. 證明曲線 $y = e^x$ 在 $x = a$ 的斜率等於其在 $x = a$ 的縱坐標。
26. 在一次細菌培養中，時間 t 與細菌數目 n 的關係為

$$t = \ln\left(\frac{n}{b-n}\right)^{a/b} - b,$$

其中 a 與 b 皆常數, 求 t 對 n 的變率。

27. Beer-Lambert 光吸收定律可表為

$$I = I_0 e^{-\alpha x},$$

其中 I/I_0 為射入光柱被傳送的分數, α 為常數, x 為光在介質中所行距離。求 I 對 x 的變率。

28. 一物體運動通過一有阻力的介質其速度為 $v = 40(1 - e^{-0.05t})$ 。求當 $t = 10$ 時的加速度。
29. 一物體從一氣象氣球落下。對此物體有空氣的阻力, 其落下的距離為 $y = 320(t + 10e^{-0.1t} - 10)$ 。求 10 秒後的速度。
30. 一物體位移的 x 與 y 分量分別為 $x = e^{-t} \sin 2t$ 與 $y = e^{-t} \cos 2t$ 。求 $t = \pi/4$ 時的加速度。
31. 若通貨膨脹使幣值每年減 5%, 則 \$100 的價值在 t 年中為 $V = 100(0.95)^t$ 。求第四年中此價值的近似變化。
32. 一城市空氣取樣的分析指出在某一天二氧化硫的 PPM (parts per million) 數目為 $\text{PPM} = 0.05 \ln(2 + 24t - t^2)$, 其中 t 為這一天中的鐘點, 求上午十時到中午之間空氣中二氧化硫數量的近似變化。
33. 求在第一象限中內接於曲線 $y = e^{-x^2}$ 之下的最大矩形之面積。
34. 懸掛於兩點間的一均勻纜索由其本身重量下垂所成的曲線 (例如掛於兩電線桿的電話線) 稱為懸垂線。此曲線的方程式是

$$y = \frac{H}{2w} (e^{wx/H} + e^{-wx/H}),$$

其中 w 與 H 為常數。證明懸垂線的方程式滿足微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

第八章 積分方法

8-1 一般冪公式

習畢基本超越函數的導數，能積分的函數更廣。某些在以前無法積分的代數函數現在可以積分。本章指示一些基本積分公式以及微分方程式在生物、商業、及科學中更多的重要應用。

首先討論的積分公式是一般冪之公式。爲參考之用，再把一般冪公式(4-5)式寫之於下：

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \quad (8-1)$$

此公式現可如同用於代數函數一樣，用於超越函數。當應用此公式時主要在辨認 u 、 n 、及 du 。而必須熟悉第二、六、七章中所列各微分式。以下各例說明此一公式的用法。

例 A. 積分 $\int \sin^3 x \cos x dx$.

此處 $n=3$, $u=\sin x$, $du=\cos x dx$. 因之

$$\int \sin^3 x (\cos x dx) = \frac{1}{4} \sin^4 x + C.$$

例 B. 積分 $\int \sqrt{1+\tan x} \sec^2 x dx$.

此處 $n=\frac{1}{2}$, $u=1+\tan x$, $du=\sec^2 x dx$. 因之

$$\int \sqrt{1+\tan x} \sec^2 x dx = \frac{2}{3} (1+\tan x)^{3/2} + C.$$

例 C. 積分 $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

此處 $n=1$, $u=\ln x$, $du=\frac{dx}{x}$. 因之

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C.$$

例 D. 積分 $\int (2+3e^{2t})^3 e^{2t} dt$.

此處 $n=3$, $u=2+3e^{2t}$, $du=6e^{2t} dt$. 因之

$$\begin{aligned} \int (2+3e^{2t})^3 e^{2t} dt &= \frac{1}{6} \int (2+3e^{2t})^3 (6e^{2t} dt) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} (2+3e^{2t})^4 + C \\ &= \frac{1}{24} (2+3e^{2t})^4 + C. \end{aligned}$$

例 E. 求定積分 $\int_0^{0.5} \frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 之值。

此處 $n=1$, $u=\operatorname{Arcsin} x$, $du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 因之

$$\int_0^{0.5} \frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{(\operatorname{Arcsin} x)^2}{2} \Big|_0^{0.5} = \frac{(\pi/6)^2}{2} - 0 = \frac{\pi^2}{72}.$$

習題

在 1 至 18 各題中, 求各積分。

1. $\int \sin^4 x \cos x dx$

2. $\int \sqrt{\cos x} \sin x dx$

3. $\int \tan^2 x \sec^2 x dx$

4. $\int \sec^3 x (\sec x \tan x) dx$

5. $\int \cos 2x \sin 2x dx$ 6. $\int \sqrt{\cot x} \csc^2 x dx$
7. $\int (e^{2x} + 1)^2 (2e^{2x} dx)$ 8. $\int e^{5x} (4 - e^{2x}) dx$
9. $\int \sqrt{1 - e^{-x}} (e^{-x} dx)$ 10. $\int (e^x + e^{-x})^{1/4} (e^x - e^{-x}) dx$
11. $\int \frac{\ln(2x+3)}{2x+3} dx$ 12. $\int \frac{3 + \ln 2x}{x} dx$
13. $\int \frac{\operatorname{Arccos} 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ 14. $\int \frac{\operatorname{Arctan} 5x}{1+25x^2} dx$
15. $\int (1 + \sec^2 x)^4 (\sec^2 x \tan x dx)$ 16. $\int \frac{\operatorname{Arcsin}^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$
17. $\int_0^{x/6} \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$ $\int_{\pi/8}^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{1+\cos \theta}}$
19. 一曲線斜率的一般式為 $(\ln x)^2/x$ 若此曲線通過 $(1, 2)$, 求其方程式。
20. 在某些情形下培養中的細菌數目的變率為

$$\frac{dP}{dt} = \frac{-Ae^{-t}}{(1+e^{-t})^2},$$

其中 A 為常數。已知 $t=0$ 時 $P=\frac{1}{2}A$, 求以 t 的函數表 P 。

21. 求曲線 $y = \sin x \cos x$ 下從 $x=0$ 到 $x=\pi/2$ 的面積。
22. 若一物體的速度 $v(\text{cm/sec})$ 為時間的函數, $v = e^t / \sqrt{3+e^t}$ 。求此物體最初二秒的速度之平均值。

8-2 基本對數式

積分法的一般幕公式 (8-1) 式, 對於 $n \neq -1$ 以外的所有 n 值皆合。若 n 等於 -1 , 則結果為無意義。當求對數函數的導數時, 得

$$\frac{d(\ln u)}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx},$$

對數式的微分為 $d(\ln u) = du/u$ 。故知 $\int du/u = \ln u + C$ 。換言之, 當

被積式之幕爲 -1 時則爲一對數式。

對數只定義於正值。因之，若 $u > 0$ 時 $\int du/u = \ln u + C$ 。若 $u < 0$ ，則 $-u > 0$ ，在此情形 $d(-u) = -du$ ， $\int (-du)/(-u) = \ln(-u) + C$ 。但 $\int du/u = \int (-du)/(-u)$ 。此二結果可合併爲一個式

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$$

例 A. 積分 $\int \frac{dx}{x+1}$ 。

$$u = x + 1, \quad du = dx.$$

$$\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C.$$

例 B. 積分 $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$ 。

$$u = \sin x, \quad du = \cos x dx.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C.$$

例 C. 積分 $\int \frac{x dx}{4-x^2}$ 。

$$u = 4 - x^2, \quad du = -2x dx.$$

$$\int \frac{x dx}{4-x^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x dx}{4-x^2} = -\frac{1}{2} \ln|4-x^2| + C.$$

應注意者若 $4-x^2$ 的次數不是本例中的情形，則必須用一般幕公式。例如，

$$\int \frac{x dx}{(4-x^2)^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x dx}{(4-x^2)^2} = -\frac{1}{2} \frac{(4-x^2)^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{2(4-x^2)} + C.$$

例 D. 積分 $\int \frac{e^{4x} dx}{1+3e^{4x}}$

$$u=1+3e^{4x}, \quad du=12e^{4x} dx.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{4x} dx}{1+3e^{4x}} &= \frac{1}{12} \int \frac{12e^{4x} dx}{1+3e^{4x}} = \frac{1}{12} \ln|1+3e^{4x}| + C \\ &= \frac{1}{12} \ln(1+3e^{4x}) + C \quad (\text{因 } 1+3e^{4x} > 0). \end{aligned}$$

例 E. 計算 $\int_0^{\pi/8} \frac{\sec^2 2x}{1+\tan 2x} dx.$

$$u=1+\tan 2x, \quad du=2 \sec^2 2x dx.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/8} \frac{\sec^2 2x}{1+\tan 2x} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/8} \frac{2 \sec^2 2x dx}{1+\tan 2x} \\ &= \frac{1}{2} \ln|1+\tan 2x| \Big|_0^{\pi/8} = \frac{1}{2} \ln|2| - \frac{1}{2} \ln|1| \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 = \frac{1}{2} \ln 2 - 0 = \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

習題

在 1 至 18 各題中, 求各函數之積分。

1. $\int \frac{dx}{1+4x}$

2. $\int \frac{dx}{1-4x}$

3. $\int \frac{x dx}{4-3x^2}$

4. $\int \frac{x^2 dx}{1-x^3}$

5. $\int \frac{\csc^2 2x}{\cot 2x} dx$

6. $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

7. $\int \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} dx$

8. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

9. $\int \frac{1+x}{4x+2x^2} dx$

10. $\int \frac{4x+6x^2}{x^2+x^3} dx$

11. $\int \frac{\sec x \tan x dx}{1+4 \sec x}$

12. $\int \frac{\sin 2x}{1-\cos^2 x} dx$

$$13. \int \frac{2 + \sec^2 x}{2x + \tan x} dx$$

$$14. \int \frac{x + \cos 2x}{x^2 + \sin 2x} dx$$

$$15. \int \frac{dx}{x \ln x}$$

$$16. \int \frac{dx}{x(1 + 2 \ln x)}$$

$$17. \int_0^{\pi/12} \frac{\sec^2 3x}{4 + \tan 3x} dx$$

$$18. \int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x} dx$$

19. 求界於 $y(x+1)=1$, $x=0$, $y=0$, 與 $x=2$ 間的面積。
20. 求界於 $xy=1$, $x=1$, $x=2$, 與 $y=0$ 間的面積。
21. 求由 $y=1/(x^2+1)$, $x=0$, $x=1$, $y=0$ 所界的面積繞 y 軸旋轉所產生的體積。(用圓柱壳)
22. 求函數 $y=4/x$ 從 $x=1$ 到 $x=2$ 的平均值。
23. 在特殊情況下人口 P 的增率為 $dP/(2P_0 - P) = a dt$, 其中 P_0 為開始的人口數, a 為常數。求以 t 的函數表 P 。
24. 在某些條件下一物體的冷卻率為 $dT(T-50) = -0.04 dt$, 其中 T 為溫度, t 為物體冷卻的時間。若當 $t=0$ 時 $T=100^\circ$, 求以 t 的函數表 T 。
25. 物體運動時常受一與其速度成正比之阻力。在此情形下, 一物體沿一斜面向下運動之加速度為 $20-v$ 。由此可得方程式 $dv/(20-v) = dt$ 。若此物體自靜止開始運動, 求表速度為時間的函數之式。

8-3 指數式

在求指數函數的導數時得 $de^u/dx = e^u (du/dx)$ 。而知指數式的微分為 $d(e^u) = e^u du$ 。故知

$$\int e^u du = e^u + C. \quad (8-3)$$

例 A. 積分 $\int e^{5x} dx$.

$$u = 5x, \quad du = 5 dx.$$

$$\int e^{5x} dx = \frac{1}{5} \int e^{5x} (5 dx) = \frac{1}{5} e^{5x} + C.$$

例 B. 積分 $\int x e^{x^2} dx$.

$$u = x^2, \quad du = 2x dx.$$

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} (2x dx) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

例 C. 積分 $\int \frac{dx}{e^{3x}}$.

此一積分可寫為 $\int e^{-3x} dx$ 。在此式中 $u = -3x$, $du = -3dx$ 。因之

$$\int \frac{dx}{e^{3x}} = \int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} \int e^{-3x} (-3dx) = -\frac{1}{3} e^{-3x} + C.$$

例 D. 計算 $\int_0^{\pi/2} (\sin 2x) (e^{\cos 2x}) dx$.

$$u = \cos 2x, \quad du = -2 \sin 2x dx.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (\sin 2x) (e^{\cos 2x}) dx &= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (e^{\cos 2x}) (-2 \sin 2x dx) \\ &= -\frac{1}{2} e^{\cos 2x} \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} - e \right) = 1.175. \end{aligned}$$

例 E. 若一曲線通過 $(0, 1)$ 且 $dy/dx = e^{\sqrt{x+1}} / \sqrt{x+1}$ 。求此曲線的方程式。

解此問題需將已知函數積分並計算積分常數。

$$dy = \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx, \quad \int dy = \int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx.$$

欲求右邊的積分,

$$u = \sqrt{x+1} \quad \text{及} \quad du = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx,$$

$$y = 2 \int e^{\sqrt{x+1}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx \right) = 2e^{\sqrt{x+1}} + C.$$

令 $x=0, y=1$, 得 $1=2e+C, C=1-2e$ 。故所求方程式為

$$y = 2e^{\sqrt{x+1}} + 1 - 2e.$$

習題

在 1 至 16 各題中, 積分各函數。

1. $\int e^{2x+5} dx$
2. $\int e^{-4x} dx$
3. $\int e^{x/2} dx$
4. $\int 3e^{4x} dx$
5. $\int x^2 e^{x^3} dx$
6. $\int x e^{-x^2} dx$
7. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
8. $\int 4x^3 e^{2x^2} dx$
9. $\int \sec x \tan x e^{2 \sec x} dx$
10. $\int (\sec^2 x) e^{\tan x} dx$
11. $\int \frac{(3-e^x) dx}{e^{2x}}$
12. $\int (e^x - e^{-x})^2 dx$
13. $\int \frac{e^{\operatorname{Arctan} x}}{x^2+1} dx$
14. $\int \frac{e^{2/x} dx}{x^2}$
15. $\int_0^x (\sin 2x) (e^{\cos^2 x}) (dx)$
16. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{e^{2-3x}}$
17. 求界於 $y=e^x, x=0, y=0$, 與 $x=2$ 間的面積。
18. 證明界於 $x=a, x=b, y=0$ 與 $y=e^x$ 間的面積等於在 $x=b$ 與 $x=a$ 處縱坐標之差。
19. 求界於 $y=e^{x^2}, x=1, y=0$ 與 $x=2$ 間的面積繞 y 軸旋轉所產生的體積。
20. 求函數 $y=e^{2x}$ 從 $x=0$ 到 $x=4$ 的平均值。

21. 若一曲線通過 $(1, 0)$ 及 $\frac{dy}{dx} = \sqrt{e^{x+3}}$, 求此曲線的方程式。
22. 在某些情形下一物體的速度為 $v = 64(1 - e^{-t/2})$ 。若 $t = 0$ (秒) 時, $s = 0$ (呎)。求以時間表距離之式。
23. 在總銷售中商業成長率為 $dS/dt = 1000e^{0.1t}$, 其中 t 為此成長率開始後的月數。若當 $t = 0$ 時 $S = \$30000$, 求表 S 為 t 的函數。

8-4 基本三角式

本節中將討論六個三角函數的積分式, 皆直接由微分式還原而得。其他三角式以後再討論。

由微分公式直接可得下列各積分公式:

$$\int \sin u \, du = -\cos u + C \quad (8-4)$$

$$\int \cos u \, du = \sin u + C, \quad (8-5)$$

$$\int \sec^2 u \, du = \tan u + C, \quad (8-6)$$

$$\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C, \quad (8-7)$$

$$\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C, \quad (8-8)$$

$$\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C. \quad (8-9)$$

例 A. 積分 $\int \sin 3x \, dx$.

$$u = 3x, \quad du = 3 \, dx$$

$$\int \sin 3x \, dx = \frac{1}{3} \int \sin 3x (3 \, dx) = -\frac{1}{3} \cos 3x + C.$$

例 B. 積分 $\int x \sec^2(x^2) \, dx$.

$$u = x^2, \quad du = 2x dx.$$

$$\int x \sec^2(x^2) dx = \frac{1}{2} \int \sec^2(x^2) \cdot (2x dx) = \frac{1}{2} \tan(x^2) + C.$$

例 C. 積分 $\int \frac{\tan 2x}{\cos 2x} dx$.

$\sec x = 1/\cos x$; 此積分即為 $\int \sec 2x \tan 2x dx$.

此式中 $u = 2x$, $dx = \frac{1}{2} du$. 因之

$$\begin{aligned} \int \frac{\tan 2x}{\cos 2x} dx &= \int \sec 2x \tan 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sec 2x \tan 2x (2 dx) = \frac{1}{2} \sec 2x + C. \end{aligned}$$

欲求其他三角函數的積分，必須將原式改變形式使之用前所討論方法可求出其積分，此事可用基本三角關係完成。

欲求 $\int \tan u du$ 之公式，將積分式化為

$$\int \frac{\sin u}{\cos u} du.$$

可認出此式為一對數式，此處對數式之 u 為積分式中的 $\cos u$, $\cos u$ 的微分為 $-\sin u du$ 。因此得

$$\int \tan u du = \int \frac{\sin u}{\cos u} du = - \int \frac{-\sin u du}{\cos u} = -\ln |\cos u| + C.$$

欲求 $\int \cot u du$ 之公式，將積分式化為

$$\int \frac{\cos u}{\sin u} du.$$

而得

$$\int \cot u du = \int \frac{\cos u}{\sin u} du = \int \frac{\cos u du}{\sin u} = \ln |\sin u| + C.$$

欲求 $\int \sec u \, du$ 之公式, 將原式寫為

$$\int \frac{\sec u (\sec u + \tan u)}{\sec u + \tan u} \, du.$$

亦可認出此為一對數式, 因為

$$d(\sec u + \tan u) = (\sec u \tan u + \sec^2 u) \, du.$$

此式右邊為積分式的分子。因之

$$\begin{aligned} \int \sec u \, du &= \int \frac{\sec u (\sec u + \tan u)}{\sec u + \tan u} \, du = \int \frac{\sec u \tan u + \sec^2 u}{\sec u + \tan u} \, du \\ &= \ln |\sec u + \tan u| + C. \end{aligned}$$

欲求 $\int \csc u \, du$ 之公式, 將原式寫為

$$\int \frac{\csc u (\csc u - \cot u)}{\csc u - \cot u} \, du.$$

故

$$\begin{aligned} \int \csc u \, du &= \int \frac{\csc u (\csc u - \cot u)}{\csc u - \cot u} \, du \\ &= \int \frac{(-\csc u \cot u + \csc^2 u)}{\csc u - \cot u} \, du \\ &= \ln |\csc u - \cot u| + C. \end{aligned}$$

現綜述以上各結果於下:

$$\int \tan u \, du = -\ln |\cos u| + C, \quad (8-10)$$

$$\int \cot u \, du = \ln |\sin u| + C, \quad (8-11)$$

$$\int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + C, \quad (8-12)$$

$$\int \csc u \, du = \ln |\csc u - \cot u| + C. \quad (8-13)$$

例 D. 積分 $\int \tan 4x \, dx$.

$$u = 4x, \quad du = 4 \, dx.$$

$$\int \tan 4x \, dx = \frac{1}{4} \int \tan 4x (4 \, dx) = -\frac{1}{4} \ln |\cos 4x| + C.$$

例 E. 積分 $\int \frac{\sec e^{-x} \, dx}{e^x}$.

$$u = e^{-x}, \quad du = -e^{-x} \, dx.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sec e^{-x} \, dx}{e^x} &= - \int (\sec e^{-x} \, dx) (-e^{-x} \, dx) \\ &= -\ln |\sec e^{-x} + \tan e^{-x}| + C. \end{aligned}$$

例 F. 計算 $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1 + \cos x}{\sin x} \, dx$.

$$\begin{aligned} \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1 + \cos x}{\sin x} \, dx &= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \csc x \, dx + \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cot x \, dx \\ &= \ln |\csc x - \cot x| \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} + \ln |\sin x| \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} \\ &= \ln |\sqrt{2} - 1| - \ln |2 - \sqrt{3}| + \ln |\sqrt{2}/2| - \ln |1/2| \\ &= \ln \frac{(\sqrt{2}/2)(\sqrt{2}-1)}{(\frac{1}{2})(2-\sqrt{3})} = \ln \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}} = \ln \frac{0.586}{0.268} \\ &= \ln 2.19 = 0.784. \end{aligned}$$

習題

在 1 至 20 各題中, 積分各函數。

1. $\int \cos 2x \, dx$

2. $\int \sin (2-x) \, dx$

3. $\int \sec^2 3x \, dx$

4. $\int \csc 2x \cot 2x \, dx$

5. $\int \sec \frac{1}{2}x \tan \frac{1}{2}x \, dx$
6. $\int e^x \csc^2(e^x) \, dx$
7. $\int x^2 \cot x^3 \, dx$
8. $\int \tan \frac{1}{2}x \, dx$
9. $\int x \sec x^2 \, dx$
10. $\int 2 \csc 3x \, dx$
11. $\int \frac{\sin(1/x)}{x^2} \, dx$
12. $\int \frac{dx}{\sin 4x}$
13. $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^2 2x}$
14. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} (1 + \sec x)^2 \, dx$
15. $\int \frac{\sec 5x}{\cot 5x} \, dx$
16. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} \, dx$
17. $\int \frac{1 + \sin 2x}{\tan 2x} \, dx$
18. $\int (1 + \cot x)^2 \, dx$
19. $\int \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x} \, dx$
20. $\int \frac{1 - \cot^2 x}{\cos^2 x} \, dx$

21. 求界於 $y = \tan x$, $x = \pi/4$, 與 $y = 0$ 間之面積。

22. 求曲線 $y = \sin x$ 下從 $x = 0$ 到 $x = \pi$ 間之面積。

23. 求界於 $y = \sec x$, $x = 0$, $x = \pi/3$, $y = 0$ 間之面積繞 x 軸旋轉所生的體積。

24. 求界於 $y = \cos x^2$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$ 間之面積繞 y 軸旋轉所生的體積。

25. 在某些情形下, 一質點的速度為時間的函數

$$v = 4 \cos 3t.$$

若 $t = 0$ 時, $s = 0$ 。求表距離為時間的函數。

26. 在一交流電路中電流 i 的時間變率為 $di/dt = -3000 \sin 30t$ 。若 $t = 0$ (秒)時, $i = 100$ (milliamps)。求表電流為時間的函數。

27. 一力為自原點之距離的函數

$$F = \frac{\sin x}{2 + \cos x}.$$

當 $x = 0$ 時, 功 $W = 0$ 。求表由此力所作之功為 x 的函數。

8-5 微分方程式；變數分離法

在第五章中介紹過微分方程式，並解了一些簡單型式的方程式。但，所解的每一個微分方程式都是其每項可以立即積分的形式。在多數微分方程式的解法中，必須先做一些運算使所包含的微分式個別分離。當做成此事後，求通解所必須的積分法就可完成。在本節中將述用來解一些基本的微分方程式的非常基本的方法，變數分離法。

若欲解一個包含一級導數的一級微分方程式，此類方程式型為 $dy/dx = f(x, y)$ 。此處 $f(x, y)$ 為 x 與 y 的函數。亦即其中包含 x 與 y 二者的因子及項。若右邊的函數只含 x 與常數，即為前已習的形式。但若含有 y 的因子或項就不能把方程式寫為 $dy = f(x, y) dx$ 而直接積分，下例中加以說明。

例 A。設有微分方程式 $dy/dx = 2xy^2$ 。若把此方程式寫為 $dy = 2xy^2 dx$ ，由於右邊有因子 y 而不能積分右邊。 $2x dx$ 可以積分，但因 y 是變數，在積分法中不能不顧。同樣，若把方程式寫為 $dy/2x^2y = dx$ 。也因在左邊的分母中含有 x 因子而不能積分。

由以上的討論，可知若微分方程式的每一項為 x 與 dx 的函數或 y 與 dy 的函數則就可解。現在尚無法從事與 dx 相乘的函數中含有 y 的情形。若能有代數方法重新安排方程式使成為以下形式

$$A(x)dx + B(y)dy = 0 \quad (8-14)$$

每一項可以積分，通解因此而獲得。（若做了除法必須記住求得之解對於使除式為零之值不能適合。）許多基本微分方程式可寫成此型式而求解。以下各例說明此方法。

例 B。解例 A 中的微分方程式 $dy/dx = 2xy^2$ 。

先把方程式寫為 $dy = 2xy^2 dx$ ，全式以 y^2 除之得

$$\frac{dy}{y^2} - 2x dx = 0.$$

此爲 (8-14) 的形式，第一項含 y 的函數與 dy ，第二項含 x 的函數與 dx 。因之，由積分並化簡求得其解：

$$\frac{-1}{y} - x^2 + C = 0,$$

$$\frac{1}{y} = C - x^2,$$

$$y = \frac{1}{C - x^2}.$$

雖然以上各式都可作爲其解，最後一式是解的最佳形式。

例 C. 解微分方程式 $xy dx + (x^2 + 1) dy = 0$ 。

爲了積分每一項，必須各項同以 $y(x^2 + 1)$ 除之，

$$\frac{x dx}{x^2 + 1} + \frac{dy}{y} = 0,$$

積分得 $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \ln y = C$ 。此爲所求之解。

利用對數的性質可使此一答案較爲精簡。若把積分常數 C 寫爲 $\ln C_1$ ，則得 $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \ln y = \ln C_1$ ，兩邊乘 2 並用 (7-9) 式的對數性質，得 $\ln(x^2 + 1) + \ln y^2 = \ln C_1^2$ 。再用 (7-7) 式的對數性質，得 $\ln(x^2 + 1)y^2 = \ln C_1^2$ ，即 $(x^2 + 1)y^2 = C_1^2$ 。此形式簡潔而清楚，一般皆採用。但，必須指出 用任何形式來表常數都可選作積分常數以求達到合宜的結果。核驗答案時必須記住由於選擇不同的常數，答案的形式也不同。因之，兩種不同形式的答案皆爲正確。一常數可有一個以上的合理選擇，而可得不同形式的答案。

例 D. 解微分方程式

$$2e^{x^2} \csc y dx - \frac{1}{x} dy = 0.$$

兩邊乘以 $x \sin y$ ，得

$$2x e^{x^2} - \sin y dy = 0.$$

積分得 $e^{z^2} + \cos y = C$ 。

此亦可對 y 解出，但上式比較合宜。

例 E. 解微分方程式 $3x^2 y^2 dx + y^2 dx + dy = 0$ ，並已知 $y=1$ 時 $x=2$ 。

全式除以 y^2 並併項，得

$$(3x^2 + 1) dx + \frac{dy}{y^2} = 0,$$

積分得 $x^3 + x - \frac{1}{y} = C$ 。

因已知一組特殊值，可計算得積分常數。用此組值得 $8 + 2 - 1 = C$ ， $C = 9$ 。因之，此解為

$$x^3 + x - \frac{1}{y} = 9, \quad \text{或} \quad y = \frac{1}{x^3 + x - 9}.$$

例 F. 若例 C 中的函數再附條件為 $y=e$ 時 $x=0$ 。則得

$$\frac{1}{2} \ln(0+1) + \ln e = C, \quad \frac{1}{2} \ln 1 + 1 = C, \quad C = 1,$$

解為 $\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \ln y = 1, \quad \ln(x^2+1) + 2 \ln y = 2,$

$$\ln y^2(x^2+1) = 2, \quad y^2(x^2+1) = e^2.$$

若用含 C_1 的解，則 $(0+1)e^2 = C_1^2$ ，解為 $y^2(x^2+1) = e^2$ 。故可知不同積分常數並不影響最後結果，而可以是任意的。

習題

在 1 至 16 各題中，解各微分方程式。

1. $2x dx + dy = 0$

2. $y^2 dy + x^3 dx = 0$

3. $y^2 dx + dy = 0$

4. $y dx + x dy = 0$

5. $x^2 dx + (x^3 + 5) dy = 0$
6. $(x^3 + x^2) dx + (x + 1)y dy = 0$
7. $e^{x+y} dx + dy = 0$
8. $e^{2x} dy + e^x dx = 0$
9. $y \tan x dx + \cos^2 x dy = 0$
10. $\sin x \sec y dx - dy = 0$
11. $yx^2 dx - y dx = x^2 dy$
12. $2y(x^3 + 1) dy + 3x^2(y^2 - 1) dx = 0$
13. $y\sqrt{1-x^2} dy + 2x dx = 0$
14. $\sqrt{1+4x^2} dy - y^3 x dx = 0$
15. $2 \ln x dx + x dy = 0$
16. $e^{\sin x} dx + \sec x dy = 0$

在 17 至 20 各題中, 求各微分方程式對指定條件的特解。

17. $\frac{dy}{dx} + yx^2 = 0$, 當 $y=1$ 時 $x=0$ 。
18. $y' = \sec y$, 當 $y=0$ 時 $x=0$ 。
19. $y' = (1-y) \cos x$, 當 $y=0$ 時 $x=\pi/6$ 。
20. $2y \cos y dy - \sin y dy = y \sin y dx$, 當 $y=\pi/2$ 時 $x=0$ 。

在 21 至 28 各題中, 作出各微分方程式並解之。

21. 一曲線, 斜率為 $2x/y$, 並通過 $(2, 3)$, 求其方程式。
22. 一曲線, 斜率為 $2ye^x$, 並通過 $(0, e)$, 求其方程式。
23. 一落下的物體其加速度為 $32-v$, 其中 v 表速度。若此物體由靜止開始求以時間表速度之式。並求速度的極限值 (即 $\lim_{t \rightarrow \infty} v$)。
24. 在某些條件下, 一物體的速度係由下式獲得

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{gR^2}{r^2},$$

其中 r 為與地球中心的距離, g 為重力加速度 (常數), R 為地球的半徑。若當 $r=R$ 時 $v=v_0$, 求表 v 為 r 的函數。

25. 一公司求得其邊際獲益函數為 $3x^2 - e^{0.1x}$, 若當 $x=0$ 時總獲益為 -10 , 求其總獲益函數。
26. 當一氣體經歷絕熱變化 (熱量不增不減) 時, 其壓力對體積之變率與壓力成正比與體積成反比。求以體積表壓力。
27. 新鮮空氣送進一個 4000 立方呎的房中。在其他一些特殊情形下在任何時間 t 二氧化碳的立方呎數由解微分方程式 $dx = dt - 0.25x dt$ 而得。

若當 $t=0$ 時 $x=12$ (立方呎), 求表 x 爲 t 的函數。

28. 在某些情形下, 電流的時間變率由下列微分方程得之

$$\frac{di}{dt} + 10i = 6.$$

若於 $t=0$, $i=0$ 。求表電流 i 爲 t 之函數。

8-6 指數成長率與衰退率

有一類微分方程式在生物、經濟、物理、化學等各方面有許多重要的應用。本節的各例中將說明這些微分方程式及其若干應用。

以下所述每一型的問題都是某量的變率與該量成正比。所以, 每種情形中的解皆爲相同的普遍形式, 指數式。

例 A. 在理想情形下, 人口變更的自然律爲在任何時間人口增長率與人口數成正比。這些情形下, 若一城市人口在 1960 年爲 10000 在 1970 年爲 12000。求 1980 年的人口數。

若 P 表任何時間 t 的人口數。由上所述, 人口增加率與人口數成正比。

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

其中 k 爲比例常數。分離變數, 得

$$\frac{dP}{P} = k dt.$$

求此微分方程式的通解

$$\ln P = kt + \ln P_0,$$

$$\ln P - \ln P_0 = kt,$$

$$\ln \frac{P}{P_0} = kt, \quad P = P_0 e^{kt}.$$

此處是以 $\ln P_0$ 為積分常數, P_0 為 $t=0$ 時的人口數。

因在 1960 年的人口是第一個數目, 令 1960 年為 $t=0$ 。以 $t=0$, $P=10000$ 代入此解, 得 $10000=P_0 e^0$, $P_0=10000$ 。所以表人口數的方程式為

$$P = 10000 e^{kt}$$

又已知在 1970 年 $t=10$ 時 $P=12000$ 。因之

$$12000 = 10000 e^{10k}, \quad e^{10k} = 1.2,$$

並不必須計算 k , 因可直接用 e^{10k} 。

因需要在 1980 年 $t=20$ 時的 P ,

$$\begin{aligned} P &= 10000 e^{20k} = 10000 (e^{10k})^2 \\ &= 10000 (1.2)^2 = 14400. \end{aligned}$$

因之, 在 1980 年中此城市的人數約為 14400。

例 B. 銀行存款的利息按連續複利計算, 款額增加率與款額成正比。“存入日至支取日”帳戶與此情況非常近似。設年利率 4%, 連續複利, 求 \$1000 在一年後之值。

令 A 表在帳戶中的款額, 由以上所述 $dA/dt = kA$ 。分離變數, 並如同例 A 中方式解此方程式, 得

$$A = A_0 e^{kt},$$

其中以 $\ln A_0$ 為積分常數。

由問題中的敘述, $t=0$ 時 $A=\$1000$ 。由此得 $A_0=1000$ 。

$$A = 1000 e^{kt}.$$

欲求 k , 再看原來的兩個敘述。其一是說款額增加率與款額成正比。另一敘述說年利率為 4%, 連續複利計算。因之, 款額增加率為款額的 4%, 意即 $k=0.04$ 。因之

$$A = 1000 e^{0.04t}$$

於 $t=1$ 得 $A = 1000 e^{0.04}$ 。由附錄中第 5 表 $e^{0.04} = 1.0408$ 。因之 $A = \$1040.8$ 。可知 4% 連續複利一年總數約為 4.08% 的單利。

例 C. 在常溫下，大氣壓力 p 對高度 h 的變率與該高度處的壓力成正比。在 $h=0$ 處壓力為 p_0 ，求壓力與高度的關係式。

由壓力對於高度之變率的敘述，可知 $dp/dh = kp$ 。分離變數並解微分方程式如例 A 所做者，得

$$p = p_0 e^{kh},$$

其中選 $\ln p_0$ 為積分常數，此式滿足 $h=0$ 時 $p=p_0$ 的條件。因為 h 增加時壓力減少， k 應是負值。

例 D. 放射性元素的衰變率與其總量成正比。鈾的某一同位素在 20 天中消失原量之半。求以時間表其量的關係式。

令 N_0 為原量， N 為在時間 t (日) 之量。則 $dN/dt = kN$ 為其微分方程式。解此方程式如例 A 中所做者，得

$$N = N_0 e^{kt}.$$

現用已知條件，此同位素在 20 天中衰變一半，當 $t=20$ 時 $N = \frac{N_0}{2}$ ，而得

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{20k}, \quad \frac{1}{2} = (e^k)^{20}, \quad e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/20}$$

其解為
$$N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$$

例 E. 依牛頓冷却率，一物體的冷却率與溫度差(自身的溫度減以周圍介質的溫度)成正比。若一杯熱水初溫為 200°F ，在五分鐘中冷却到 140°F 。房間的溫度為 80°F 。這杯水冷却到 100°F 要經幾分鐘？

依牛頓冷却率的敘述

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_R).$$

其中 T 爲水在時間 t 的溫度, T_R 爲房間內的溫度。因這方程式與前例中稍有不同, 現詳述其解法。分離變數, 得

$$\frac{dT}{T - T_R} = k dt.$$

積分 $\ln|T - T_R| = kt + \ln(T_0 - T_R),$

其中 $T_0 - T_R$ 爲 $t=0$ 時的溫度差。因之

$$\begin{aligned} \ln|T - T_R| - \ln|T_0 - T_R| &= kt, \\ \ln\left|\frac{T - T_R}{T_0 - T_R}\right| &= kt, \quad T - T_R = (T_0 - T_R)e^{kt}. \end{aligned}$$

以 $T_R = 80^\circ\text{F}$, $T_0 = 200^\circ\text{F}$ 代入,

$$T = 80 + 120 e^{kt}.$$

已知對 $t=5$, $T=140^\circ\text{F}$ 因之

$$\begin{aligned} 140 &= 80 + 120 e^{5k}, \\ e^{5k} &= \frac{1}{2}, \quad e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/5}. \end{aligned}$$

因之,
$$T = 80 + 120\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5}.$$

對 $T = 100^\circ\text{F}$, $100 = 80 + 120\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5} = \frac{1}{6}$

用對數, $\frac{t}{5} = \frac{\log(1/6)}{\log(1/2)} = \frac{-\log 6}{-\log 2} = \frac{\log 6}{\log 2} = \frac{0.7782}{0.3010} = 2.585.$

所以 $t = 12.9$ (分)。

在本節中討論了一些來自不同範圍的不同問題, 但都是同樣的數學公式。正因如此, 在每一情形中數學解法是相同的。

習題

在以下各題中，假設各量的變率皆與本節中各例相同。

1. 某鎮的人口數在 1950 年是 2000，在 1960 年是 2600，求在 1970 年的人口數。
2. 美國的人口數在 1900 年約為 76 百萬，在 1960 年約為 179 百萬。由這些數字，在 1970 年的人口數應如何？
3. 世界的人口數在 1930 年約為 20 億，在 1960 年約為 30 億。當這些數字，2000 年時的人口數應如何？
4. 用上題中資料，那一年的口數為 100 億？
5. 在適當的條件下，細菌成長率與其總數成正比，某次培養中在某一時間其總數為 10^5 ，而在十小時後為 3.0×10^5 。在五小時後是多少？
6. 在上題中細菌數目何時增為二倍？
7. 若利息為連續複利，年利率為 5%，何時本利和為本金的二倍。
8. 若利息為連續複利，年利率為 6%，求存款 \$1000 在三年後的本利和。
9. 若大氣壓力在 $h=0$ 處為 30 吋（水銀柱），在 3000 呎高度處為 29 吋。求壓力與高度的關係式。
10. 用上題中的資料，求在 5000 呎高度處的壓力。
11. 某放射性同位素其總量在二小時中消失一半，三小時後剩下多少？
12. 經一千八百年，鐳消失一半，在一百年中消失多少？
13. 一物體的溫度為 100°C ，放在溫度為 20°C 的介質中。在十分鐘內此物體的溫度降到 50°C 。表此物體的溫度 T 為時間的函數。
14. 一杯咖啡原為 210°F ，在 70°F 的房中其溫度在六分鐘內降到 160°F 。要經多久其溫度降到 120°F ？
15. 在某種化學反應中，反應的速度與未變的量的 $k(x_0 - x)$ ，其中 x 為在時間 t 中變化之量而 x_0 為原量。求表 x 為 t 的函

數之式。

16. 在上題中, 若 $x_0 = 100$ 公克而在十分鐘內變化 20 公克。求變化 50 公克的時間。
17. 假設物件在任何時間的貶值率與其值成正比。新車值為 \$4000, 三年後其值為 \$2000。五年後值多少?
18. 如上題, 若一物在全新時值 \$1000, 一年中貶值到 \$600, 要多久它只值 \$100?

8-7 其他積分型式

本節中將簡述如何把其他的積分寫成能積分的形式。有為數甚多的方法可把一些積分求得。此處僅講述若干基本方法, 並指示如何使用積分表。

在 8-4 節中所述的三角式為基本三角函數的積分, 且都是直接由微分式而得的結果。有許多其他的三角形式, 有些是包含正弦及餘弦的乘幂。下例中指出此類型式的一個基本式的求法。

例 A. 積分 $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

積分此三角函數, 正弦或餘弦必須要有一個是一次的。這個一次幂作為 du 的一部份。所以必須設法把積分變為此種形式。用基本三角關係 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 。因之, 把 $\sin^3 x$ 寫為 $\sin^2 x \sin x = (1 - \cos^2 x) \sin x$, 此積分寫為兩項, 每一項都是 $\cos x$ 的乘幂與 $\sin x$ 的一次幂。而得

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^2 x dx &= \int (1 - \cos^2 x) (\sin x) (\cos^2 x) dx \\ &= \int (\cos^2 x - \cos^4 x) (\sin x dx) \\ &= \int \cos^2 x (\sin x dx) - \int \cos^4 x (\sin x dx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int \cos^2 x (-\sin x dx) + \int \cos^4 x (-\sin x dx) \\
&= -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + C.
\end{aligned}$$

有兩個基本代數式的積分可由反三角函數的微分式而得。參照 (6-37) 式，可求得 $\text{Arcsin}(u/a)$ 的微分。其中 a 為常數。

$$d\left(\text{Arcsin} \frac{u}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-(u/a)^2}} \frac{du}{a} = \frac{a}{\sqrt{a^2-u^2}} \frac{du}{a} = \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}.$$

由此可得下列重要積分公式：

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{Arcsin} \frac{u}{a} + C. \quad (8-15)$$

由求 $\text{Arctan}(u/a)$ 的微分，可導得另一重要積分公式：

$$d\left(\text{Arctan} \frac{u}{a}\right) = \frac{1}{1+(u/a)^2} \frac{du}{a} = \frac{a^2}{a^2+u^2} \frac{du}{a} = \frac{a du}{a^2+u^2}.$$

因之
$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \text{Arctan} \frac{u}{a} + C. \quad (8-16)$$

由此而知反三角函數的一主要用途。亦即，可為重要代數函數積分法之解。

例 B. 積分 $\int \frac{dx}{4x^2+25}.$

$$= 2x, \quad du = 2 dx, \quad a = 5.$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{4x^2+25} &= \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{(2x)^2+(5)^2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \text{Arctan} \frac{2x}{5} + C = \frac{1}{10} \text{Arctan} \frac{2x}{5} + C.
\end{aligned}$$

另一基本積分方法是基於兩函數之乘積的導數而得，因為求兩函數乘積之導數公式為

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

兩函數乘積之微分爲 $d(uv) = u dv + v du$, 此式兩邊積分得

$$u v = \int u dv + \int v du.$$

故
$$\int u dv = u v - \int v du. \quad (8-17)$$

用 (8-17) 式的積分法稱爲分部積分法。

例 C. 積分 $\int x \sin x dx$.

此一積分式與前所論的任一公式皆不符合, 因 x 或 $\sin x$ 都不能作爲一恰當的 du 的因子。但, 選 $u = x$, $dv = \sin x dx$, 以上的公式便可引用。

$$\begin{aligned} u &= x, & dv &= \sin x dx, \\ du &= dx, & v &= -\cos x. \end{aligned}$$

(積分常數可包含於最後的結果中), 所以

$$\begin{aligned} \int (x) (\sin x dx) &= -x \cos x - \int (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

三角關係式不但提供變換三角積分式的方法, 而且可用於變換代數積分式。代入法係依據 (6-7), (6-8), (6-9) 各式。對含根號之積分特別有用。此法稱爲三角代替法, 在下例中說明。

例 D. 積分 $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$.

若令 $x = \sin \theta$, 根式變爲 $\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \cos \theta$ 。用此代入法, 原積分變換爲三角積分。注意必須把所有因子都化爲 θ 之式;

$$x = \sin \theta, \quad dx = \cos \theta d\theta.$$

故得

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{1-\sin^2 \theta}} \\ &= \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sin^2 \theta \cos \theta} = \int \csc^2 \theta d\theta = -\cot \theta + C.\end{aligned}$$

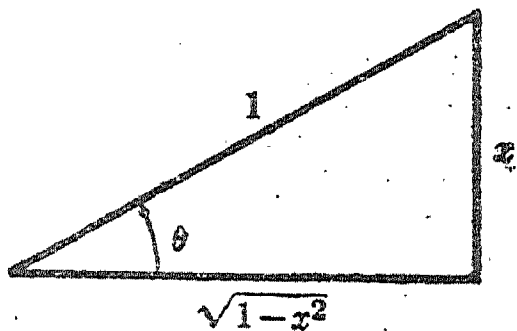


圖 8-1

現已做完積分法演算，但此答案是用與原積分式不同的變數表示。必須把此結果化爲 x 之式。作一含 θ 角的直角三角形使 $\sin \theta = x/1$ (圖 8-1)，可將任何三角函數化爲 x 之式。(此爲反三角函數的用法。)因之

$$\cot \theta = \sqrt{1-x^2}/x.$$

積分之結果成爲

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}} = -\cot \theta + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$$

用本節的方法以及前所述的其他方法，基本形式的積分已做成一表，對基本形式及若干基本方法之了解於由積分表求積分非常有用，這些了解爲辨認積分表中所用形式之基礎以及預期其結果之形式。因此，積分表之應用有賴於辨認其形式及積分中的變數與常數。以下各例，說明列於附錄中的積分表之應用。

例 E. 積分 $\int \frac{\sqrt{4-9x^2}}{x} dx.$

此與公式 18 符合，正確認定常數； $u=3x$, $du=3 dx$, $a=2$

$$\int \frac{\sqrt{4-9x^2}}{x} dx = \int \frac{\sqrt{4-9x^2}}{3x} 3 dx$$

$$= \sqrt{4-9x^2} - 2 \ln \left(\frac{2 + \sqrt{4-9x^2}}{3x} \right) + C.$$

例 F. 積分 $\int \sec^3 2x dx$.

此與公式 37 符合, $n=3$, $u=2x$, $du=2 dx$.

$$\begin{aligned} \int \sec^3 2x dx &= \frac{1}{2} \int \sec^3 2x (2 dx) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sec 2x \tan 2x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \sec 2x (2 dx). \end{aligned}$$

[欲做完此積分必須用 (8-12) 式的基本形式]。而得

$$\int \sec^3 2x dx = \frac{\sec 2x \tan 2x}{4} + \frac{1}{4} \ln |\sec 2x + \tan 2x| + C.$$

習題

在 1 至 4 各題中, 積分各函數。用 $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ 及適當的代換把每一式化為可積分的形式。

1. $\int \sin^3 2x dx$

2. $\int \cos^3 x dx$

3. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$

4. $\int \sin^3 x \cos^6 x dx$

在 5 至 8 各題中, 積分各函數。每一題的結果都包含反三角函數。(看 (8-15) 及 (8-16) 式。)

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

6. $\int \frac{dx}{4+x^2}$

7. $\int \frac{dx}{9x^2+16}$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

在 9 至 12 各題中, 積分各函數。每題皆可用分部積分法求之。用如第 9 題及第 10 題中所示的替代法。

9. $\int x \cos x \, dx$ (令 $u=x$ 及 $dv=\cos x \, dx$)

10. $\int x e^x \, dx$ (令 $u=x$ 及 $dv=e^x \, dx$)

11. $\int x e^{2x} \, dx$

12. $\int x \sec^2 x \, dx$

在 13 至 16 各題中, 積分各函數。每題皆用三角代替法。

13. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} \, dx$ (令 $x=\sin \theta$)

14. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^{3/2}}$ (令 $x=3 \tan \theta$)

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$ (令 $x=2 \sec \theta$)

16. $\int \frac{dx}{x \sqrt{4-x^2}}$ (令 $x=2 \sin \theta$)

在 17 至 30 各題中, 用附錄中的積分表積分各函數。

17. $\int \frac{3x \, dx}{2+5x}$

18. $\int 5x \sqrt{2+3x} \, dx$

19. $\int \frac{dx}{x^2-4}$

20. $\int \sqrt{4-x^2} \, dx$

21. $\int \sin 2x \sin 3x \, dx$

22. $\int \sin x \cos 5x \, dx$

23. $\int \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x} \, dx$

24. $\int \tan^2 x \, dx$

25. $\int \frac{dx}{x \sqrt{4x^2+1}}$

26. $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x} \, dx$

27. $\int \operatorname{Arcsin} 3x \, dx$

28. $\int \operatorname{Arctan} x^2 (x \, dx)$

29. $\int x^2 e^{3x} \, dx$

30. $\int x^3 \ln x^2 \, dx$

在 31 至 36 各題中, 用積分法解各問題。

31. 求界於 $y(1+x^2)=1$, $x=0$, $y=0$, 與 $x=2$ 間的面積。

32. 求界於 $y=x e^{-x}$, $y=0$, 與 $x=2$ 間的面積。

33. 求由 $y=\sqrt{x^2-16}/x^2$, $y=0$, 與 $x=5$ 所界面積繞 y 軸旋轉所生的體積。

34. 求曲線 $y=x^2$ 從 $x=0$ 到 $x=1$ 的弧長。(看 5-5 節的第 15 題。)

35. 在某些條件下一質點的速度為時間的函數式為 $v = t/\sqrt{1+2t}$ 。若 $t=0$ 時 $s=6$, 求距離為時間的函數之式。
36. 在一特殊電路中電流的時間變率為 $di/dt = e^{-2t} \cos t$ 。若 $i_0=0$, 求電流為時間的函數之式。

8-8 雜 題

在 1 至 24 各題中, 不用積分表積分各函數。

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 1. $\int e^{-2x} dx$ | 2. $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$ |
| 3. $\int \frac{dx}{x(\ln 2x)^2}$ | 4. $\int x^{1/3} \sqrt{x^{4/3}+1} dx$ |
| 5. $\int \frac{2 dx}{1-6x}$ | 6. $\int \frac{x^2 dx}{1+2x^3}$ |
| 7. $\int \csc 3x \cot 3x dx$ | 8. $\int 6 \sec^2 2x dx$ |
| 9. $\int \frac{\cos x dx}{1+\sin x}$ | 10. $\int \frac{\sec^2 x dx}{2+\tan x}$ |
| 11. $\int \frac{dx}{e^x-1}$ | 12. $\int x e^{2x^2} dx$ |
| 13. $\int_0^2 \frac{x dx}{4+x^2}$ | 14. $\int_1^e \frac{\ln x^2 dx}{x}$ |
| 15. $\int \cos^5 x \sin x dx$ | 16. $\int x \csc^2(x^2) dx$ |
| 17. $\int \tan 3x dx$ | 18. $\int 4 \sec 2x dx$ |
| 19. $\int e^x \sin(e^x) dx$ | 20. $\int [\cos(\ln x)] \frac{dx}{x}$ |
| 21. $\int \cos^3 2x dx$ | 22. $\int \frac{2 dx}{25+49x^2}$ |
| 23. $\int x \csc^2 2x dx$ | 24. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$ |

在 25 至 37 各題中, 用積分法解各問題。

25. 求界於 $y = 3 \sin x + \cos 2x$ 與 x 軸間從 $x=0$ 到 $x=\pi$ 的面積。
26. 求界於 $xy=1$, $x^2y=1$ 與 $x=3$ 間的面積。
27. 求由坐標軸, $x=e^{-x}$, 與 $x=3$ 所界面積繞 x 軸旋轉所生的體積。
28. 求由 $y = \sin x \sqrt{\cos x}$ 與 x 軸間從 $x=0$ 到 $x=\pi/2$ 的面積繞 x 軸旋轉所生的體積。
29. 假設人口增加率與當時的人口數成正比。某省在 1901 年時人口為 218 萬及在 1931 年為 343 萬。求在 1951 年的人口數。
30. 假設細菌數目增加率與當時的總數成正比。某次培養在四小時中細菌增加到原數目的二倍。求到達原數目的三倍所需時間。
31. 若利息為連續複利, 銀行年利率為 7%, 求 \$10000 在十年後的總值。
32. 用 8-6 節的第 9 題的數字, 求大氣壓力為 28 吋處的高度。
33. 碳 14 的半生期約為 5600 年 (在 5600 年中蛻變至原有濃度的一半)。分析史前之一木材知其含碳 14 的濃度為 60%。求此木材在史前有多大年歲? (這種方法稱為碳的算日法, 用以推算史前事物的日期。)
34. 一物於 20 分鐘內在 80° 的空氣中從 500° 冷卻到 200° 。求其從 500° 開始冷卻一小時後的溫度。
35. 一物的貶值率與當時的價值成正比。若一機器全新時值 \$10000, 五年後值 \$6000, 求其在出廠 20 年後的價值。

36. 由二次幂化學反應得一微分方程式

$$dt = \frac{k_1 dx}{a-x} + \frac{k_2 dx}{b-x}$$

其中 k_1 與 k_2 為常數, a 與 b 為最初濃度, t 為時間, x 為所減少之濃度。解出 t 為 x 之函數。

37. 假設有一阻力, 下落物體的速度 $v(\text{ft/sec})$ 以時間 $t(\text{sec})$ 表之為

$$\frac{dv}{32-0.1v} = dt.$$

當 $t=0$ 時 $v=0$, 求表 v 為 t 的函數。

第九章 偏導數與重積分

9-1 兩個變數的函數

在此以前已述一個自變數的函數的問題。但，在科學、商業、及其他方面的許多情況要用到一個以上之自變數的函數。雖然有些應用包含三個或更多自變數，但許多情況只含兩個，而我們主要的是要討論這些。故在本節中將述兩個自變數的函數的意義，並在本章的以下數節中示明如何將前幾章的方法用於這種函數。

例 A. 直圓柱體的全面積為圓柱的半徑與高之函數。亦即，若其中之一或兩者均變時面積隨之變化。全面積的公式為

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

稱 A 為 r 與 h 的函數。

茲定義兩變數的函數如下。若 z 為 x 與 y 的已知值所唯一決定，則 z 為 x 與 y 的函數。所用的記號與用於一個自變數者相似。其記號為 $z = f(x, y)$ ，其中 x 與 y 皆為自變數。此即兩個變數的函數之意義。

與一個自變數的情況相似， $f(a, b)$ 意為“當 $x = a$ 及 $y = b$ 時函數之值。”

例 B. 若 $f(x, y) = 3x^2 + 2xy - y^3$ ，求 $f(-1, 2)$ 。

代入，得

$$f(-1, 2) = 3(-1)^2 + 2(-1)2 - (2)^3 = 3 - 4 - 8 = -9.$$

函數之值限為實數，意即某些限制可加於自變數。 x 或 y 或兩者之值使發生被零除或使 z 之值為虛數都不能要。下例說明此事。

例 C. 若 $f(x, y) = \frac{3xy}{(x-y)(x+3)}$, 除 $x=y$ 及 $x=-3$ (此二者會發生被零除) 外, 所有其他 x 與 y 之值皆可用。

若 $f(x, y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$, x 與 y 的絕對值都不能大於 2, 且其平方和不超過 4。否則, 函數之值為虛數。

學生對於函數的主要困難之一為如何根據敘述條件而做出函數。雖然以前也曾做過許多這種例題, 舉例以說明做出兩個變數的函數會對學生有幫助。雖沒有普遍的規律可循, 對敘述的仔細分析必能引得所求的函數。下例說明如何做出此類函數。

例 D. 欲製一個無蓋的長方體金屬箱使容積為 2 立方呎。材料的價錢為每平方呎 c 元。將所需材料的價錢表為箱的長度與寬度的函數。

題中所述價錢決定於箱之各面的表面積。無蓋箱子的表面積為

$$S = lw + 2lh + 2hw,$$

其中 l 為長度, w 為寬度, h 為高度。但, 此式含有三個自變數。用箱的容積為 2 立方呎之條件, 得 $lwh=2$ 。因希望只含有 l 及 w , 解此式得 $h=2/lw$ 。代入上述表面積的式中得

$$\begin{aligned} S &= lw + 2l\left(\frac{2}{lw}\right) + 2\left(\frac{2}{lw}\right)w \\ &= lw + \frac{4}{w} + \frac{4}{l}. \end{aligned}$$

因總價 C 為 cS , 故表總價之式為

$$C = c\left(lw + \frac{4}{w} + \frac{4}{l}\right).$$

習題

1. 表直圓柱體之體積為半徑與高的函數。

2. 表直圓錐體之體積為底半徑與高的函數。
3. 表三角形面積為底與高的函數。
4. 表矩形對角線的長度為長與寬的函數。

在 5 至 16 各題中, 對自變數之已知值計算各函數之值。

5. $f(x, y) = 2x - 6y$, 求 $f(0, -4)$.
6. $h(u, v) = -3u - 6v$, 求 $h(-1, 12)$.
7. $F(x, y) = x^2 - 5y + y^2$, 求 $F(2, -2)$.
8. $g(r, s) = r - 2rs - r^2s$, 求 $g(-2, 1)$.
9. $\phi(x, t) = 2x^3 - x^2t - 2t^2$, 求 $\phi(-3, -1)$.
10. $f(r, t) = r^3 - 3r^2t + 3rt^2 - t^3$, 求 $f(3, t)$.
11. $Y(y, t) = \frac{2-3y}{t-1} + 2y^2t$, 求 $Y(y, 2)$.
12. $F(s, t) = \frac{2s^2 - st + 1}{2st - 3}$, 求 $F(s, -2t)$.
13. $X(x, t) = -6xt + xt^2 - t^3$, 求 $X(x, -t)$.
14. $H(p, q) = p - \frac{p - 2q^2 - 5q}{p + q}$, 求 $H(p, q + k)$.
15. $f(x, y) = x^2 - 2xy - 4x$, 求 $f(x + h, y + k) - f(x, y)$.
16. $\phi(x, y) = \frac{3-x}{y-x} - xy - xy^2$, 求 $\phi(x + h, -1)$.

在 17, 18 二題中決定自變數可能存在的限制。

$$17. f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - x^2y - y^3} \quad 18. f(x, y) = \frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 9}$$

19. 一工廠生產兩種型式的某一產品。生產其中一種需要 3 個工時 (man-hours) 而另一種需 5 個工時。因之, 生產第一種型式 x 件第二種型式 y 件的總工時數為 $h = 3x + 5y$ 。生產第一種型式 10 件及第二種型式 8 件需多少個工時?
20. 一氣體的壓力為其體積與溫度的函數 $p = nRT/V$, 其中 n 與 R 為常數。若 $n = 3$ (moles), $R = 0.082$ (liter·atm/mole·°K), 對 $T = 300^\circ\text{K}$ 及 $V = 50$ liters 求壓力 (atm)。

21. 由研究而知在麻醉藥的作用下，對一特殊刺激有感應人數的百分數為

$$p = \frac{5st}{t^2 + 1},$$

其中 t 為用藥後的時間， s 為刺激的強度。求 3 分鐘後當刺激強度為 50 單位時人數的百分數。

22. 像與透鏡距離的倒數為物距 p 及稜鏡的焦距 f 之函數

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}.$$

一物體距透鏡為 20 公分，透鏡的焦距為 5 公分。求像距。

23. 在某些條件下細菌培養的總數 P 與所供給食物的總量 x 及時間 t 的平方成正比。若在兩小時中供給的食物為 3 單位，細菌數目加倍。求表 P 為 x 與 t 的函數，用 P_0 表原有的細菌數。
24. 柱子的承壓載荷 L 隨其半徑的四次方正變及隨其長度的平方反變。一柱高 20 呎直徑為 1 呎承壓載荷為 20 噸。求表 L 為 r (半徑) 與 l (長度) 的函數。
25. 一人買每股 \$50 的股票 x 股及每股 \$90 的股票 y 股。求其投資總數。
26. 一圓柱形罐其容積為 V 。表罐的全面積為 V 與 r (其半徑) 的函數。
27. 一直圓柱內接於半徑為 r 之球中。表圓柱之體積為其高 h 與 r 的函數。
28. 一建築物高 h 呎，地上一點距此建築物 x 呎而對此建築物所張之角為 θ ，表 θ 為 h 與 x 的函數。
29. 一三角形 a 與 b 兩邊所夾之角為 30° ，表三角形面積為此二邊的函數。

9-2 三維空間中的曲線與曲面

現將簡單說明兩變數函數的圖形表示法。首先指出在二維空間的直角坐標系中之表示法。下例說明此法。

例 A. 欲表示 $z = 2x^2 + y^2$ ，設定各個不同的 z 值，並在 xy 平面中作出所得方程式之圖。例如若 $z = 2$ ，得

$$2x^2 + y^2 = 2.$$

此爲一橢圓其長軸沿 y 軸而頂點爲 $(0, \sqrt{2})$ 與 $(0, -\sqrt{2})$ 。短軸的兩端爲 $(1, 0)$ 與 $(-1, 0)$ 。(看圖 9-1) 但, 橢圓 $2x^2 + y^2 = 2$ 只在 $z=2$ 時代表函數 $z=2x^2 + y^2$ 。若 $z=4$, 則得 $2x^2 + y^2 = 4$ 爲另一橢圓。事實上, 對 z 的所有正值, 其結果皆爲橢圓。 z 不可能爲負值, 因 x^2 或 y^2 皆不爲負值。圖 9-2 中爲用所指出的 z 值而得的各橢圓。

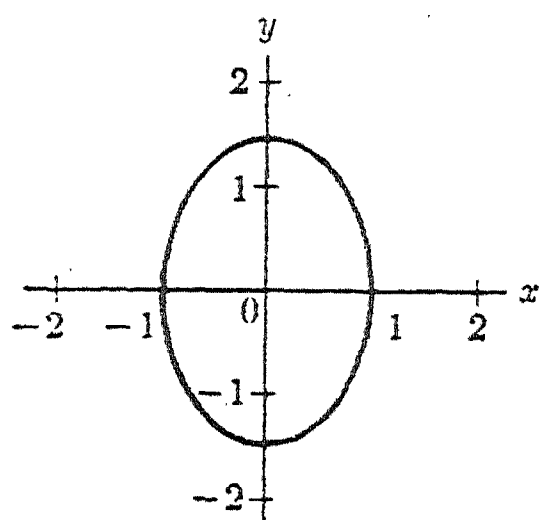


圖 9-1

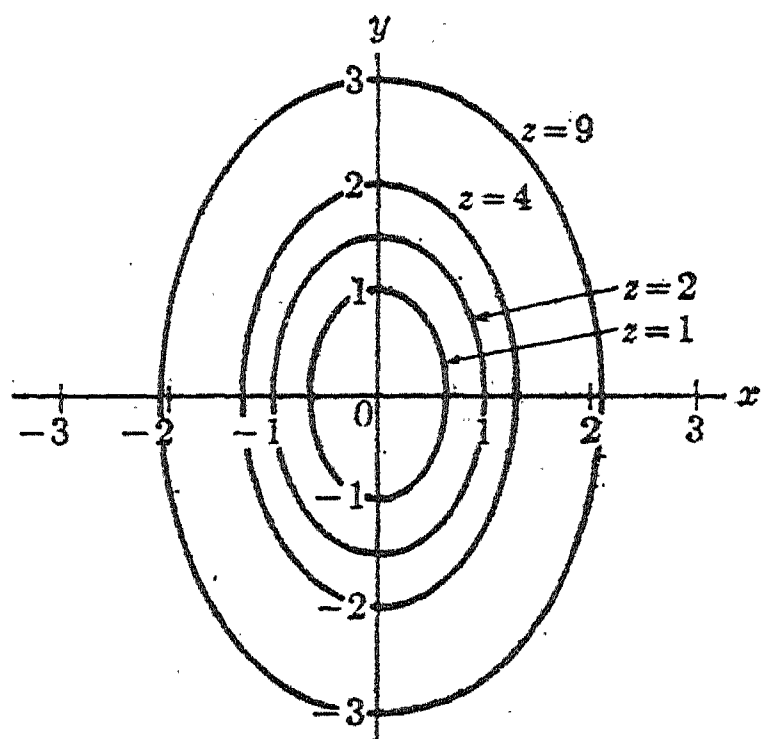


圖 9-2

若只用到 z 的少數一些值, 或至少若各不同曲線不相交而能區別時, 可用例 A 中所說明的表示方法。若需 z 爲 x 與 y 的函數之普遍表示法, 必須用三個坐標軸各表 x 、 y 、及 z 。最廣泛應用的坐標系爲加一個第三坐標軸與 x 軸及 y 軸皆成直角。在此方式中是用三維作爲表示方法。

三個互相垂直的軸, x 軸、 y 軸、 z 軸, 爲三維中直角坐標系之基本。合起來形成空間中三個互相垂直的平面, xy 平面、 yz 平面、 xz 平面。坐標系的空間中每一點均與一組數 (x, y, z) 相對應。三軸的交點爲原點。圖 9-3 與 9-4 中只指出各軸的正方向; 圖 9-5 與 9-6 中並含有各軸的負方向。空間中各坐標之值皆爲正的部分稱爲第一卦限。其他七個卦限則未指定數目。

例 B. 在直角坐標中表出 $(2, 4, 3)$ 點。

首須注意者欲合理的表示 x 值必須要作一個改變，因 x 軸是由紙的平面“向外”。由其他軸上單位的 $\sqrt{2}/2 (=0.7)$ 作為 x 軸上的單位是個好的表示法。據此，從 xy 平面中 x 軸上的 $(2, 0, 0)$ 點作一直線平行於 y 軸在其右取 4 個單位長。即得 $(2, 4, 0)$ 點。由此點垂直向上作直線取 3 個單位長。即得所求點 $(2, 4, 3)$ 。亦可從 $(0, 4, 0)$ 點開始，平行於 x 軸向前兩個單位到 $(2, 4, 0)$ 然後垂直向上三個單位到 $(2, 4, 3)$ 。並可從 $(0, 0, 3)$ 開始。看圖 9-3。

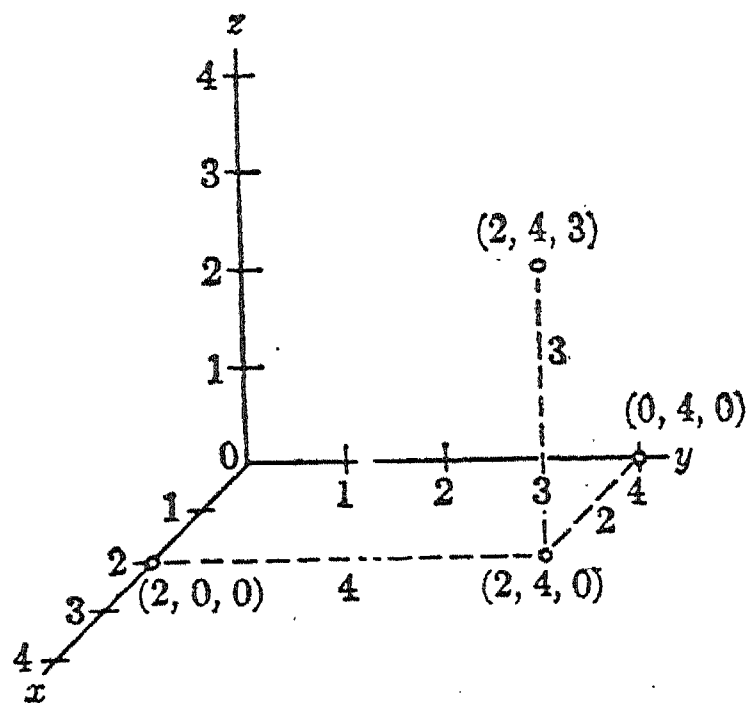


圖 9-3

本節其餘部份在說明作三維空間圖形的一些基本技巧。先述平面的一般方程式。

第一章中曾證明方程式 $Ax + By + C = 0$ 在二維空間中的圖形為一直線。由下例，將證明方程式

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (9-1)$$

在三維空間中的圖形為一平面。

例 C. 證明方程式 $2x + 3y + z - 6 = 0$ 在三維空間中的圖形為一平面。

若令三個變數的任一個取一特別值，即得其他二變數的線性方程

式。例如， $(\frac{1}{2}, 1, 2)$ 點滿足此方程式故在此方程式的圖形上。對 $x = \frac{1}{2}$ ，得

$$3y + z - 5 = 0.$$

此爲一直線的方程式。意即所有各對滿足此方程式的 y 與 z 值，在 $x = \frac{1}{2}$ 時，滿足已知方程式。因之，對 $x = \frac{1}{2}$ ，直線 $3y + z - 5 = 0$ 在方程式的圖形上。

對 $z = 2$ ，得

$$2x + 3y - 4 = 0.$$

此亦爲一直線。由同樣理由，此直線在方程式的圖形上。因交於一點的二直線決定一平面，過 $(\frac{1}{2}, 1, 2)$ 之二直線決定一平面。此平面即爲此方程式之圖形。看圖 9-4。

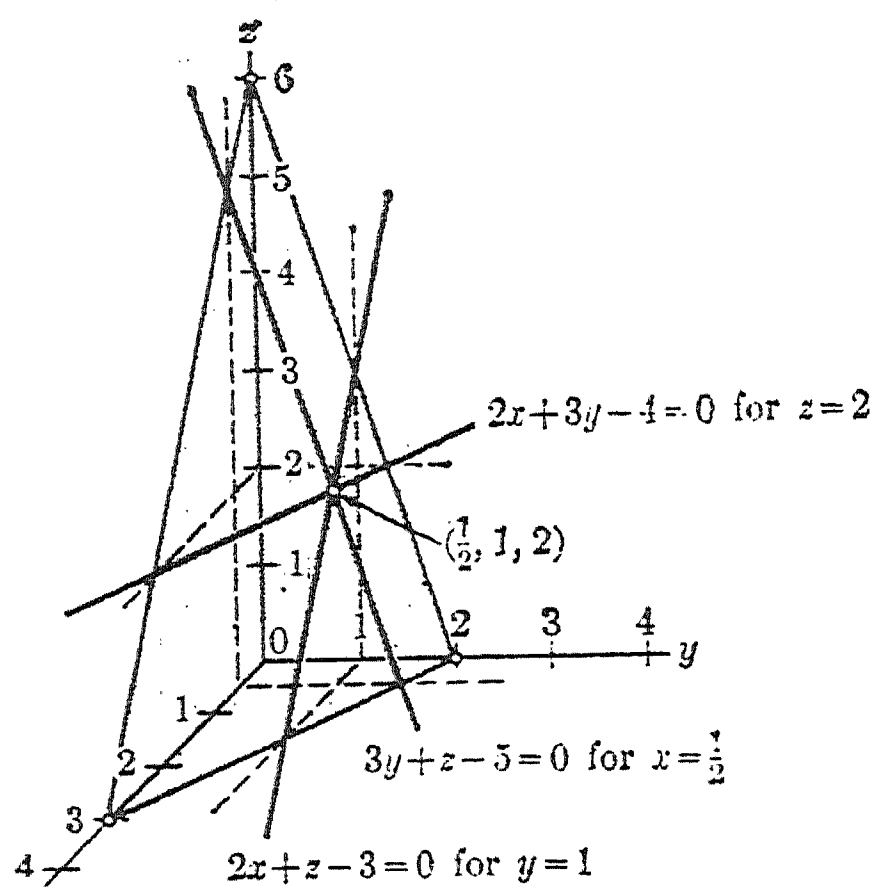


圖 9-4

欲完成其證明，在圖形上的任一點皆有在圖形上的一直線與一坐標平面平行。因之，不論選取之點如何，通過此點且在此圖形上的二相交直線必存在。因之，此圖形爲一平面。對任何相同形式的方程式亦可做類似的分析。

因為知道 (9-1) 式形式的方程式之圖形為一平面，其圖形可由求其三截距而得，在這些截距間連線即可表出此平面。若平面通過原點，依次令其中兩個變數之一為零，即求得決定平面的二直線。

例 D. 作 $3x - y + 2z - 4 = 0$ 之圖。

一方程式圖形之截距即為其各坐標軸的交點。因之，令其中兩個變數同等於零即得各截距。對此已知方程式其各截距為 $(\frac{4}{3}, 0, 0)$, $(0, -4, 0)$, $(0, 0, 2)$ 。標出此各點的位置 (看圖 9-5) 並在此各點間畫線以代表此平面。

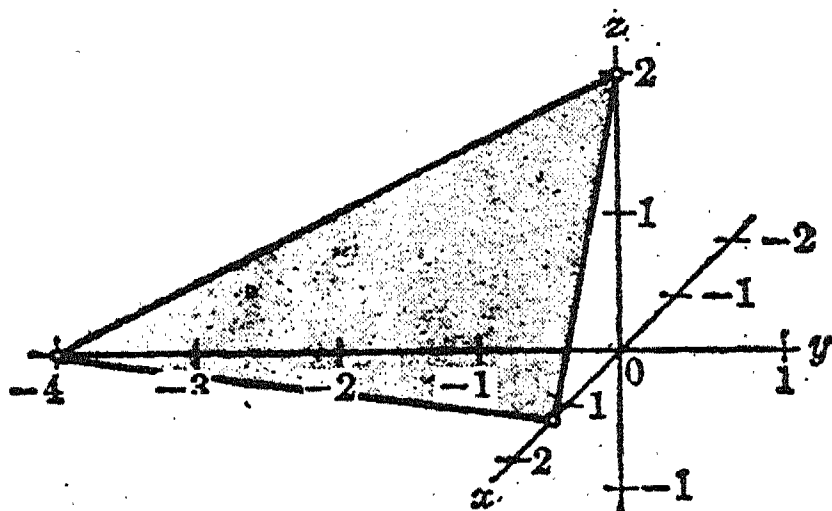


圖 9-5

三變數方程式之圖形，與兩自變數的函數相同，普通都是空間中的曲面。這已見於在平面的情形中，再在以下各例中驗證其他情形。

兩曲面相交處為空間中曲線。已在例 C 及例 D 中見到，因平面與坐標平面相交處為直線 (曲線的特殊情形)。茲定義曲面的跡線為曲面與坐標平面相交的曲線。平面的跡線即為用來表示平面的各截距間所連的各直線。許多曲面可由求其跡線與截距作其圖。

例 E. 求方程式 $z = 4 - x^2 - y^2$ 的截距與跡線並作其圖。

方程式圖形之截距為 $(2, 0, 0)$, $(-2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, -2, 0)$ 及 $(0, 0, 4)$ 。

因曲面的跡線是在坐標平面內，對每一跡線變數之一為零。因之，依次令每一變數為零，可求得此曲面在其他二變數平面中的跡線。故

此曲線的各跡線

在 yz 平面中爲 $z = 4 - y^2$ (拋物線),

在 xz 平面中爲 $z = 4 - x^2$ (拋物線),

在 xy 平面中爲 $x^2 + y^2 = 4$ (圓)。

利用截距並作各跡線 (看圖 9-6), 得方程式之曲面。此圖形稱爲圓拋物面。

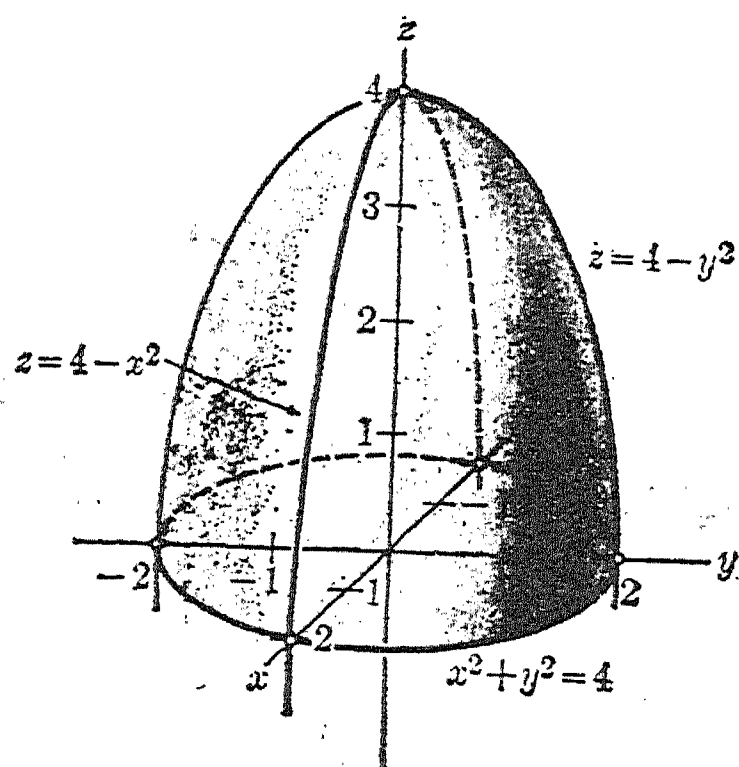


圖 9-6

爲獲得曲面之圖形, 有若干技巧以分析其方程式。此處將討論的另一個爲截線, 與跡線密切相關。由假設其中之一變數以特殊值, 得一含兩個變數的方程式, 其圖形在與此兩個變數的坐標平面平行的平面中。下例說明由應用截距、跡線、截線, 以作一曲面。

例 F. 作 $4x^2 + y^2 - z^2 = 4$ 之圖。

截距爲 $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, -2, 0)$ 。 z 軸上無截距, 因 $x=y=0$ 使 $z^2 = -4$ 。

其各跡線

在 yz 平面中爲 $y^2 - z^2 = 4$ (雙曲線),

在 xz 平面中爲 $4x^2 - z^2 = 4$ (雙曲線),

在 xy 平面中爲 $4x^2 + y^2 = 4$ (橢圓)。

曲面已可正確的由這些曲線決定，但，由假定 z 之適當值，更能指明其形狀。例如，若 $z=3$ ，得 $4x^2+y^2=13$ ，為一橢圓。用此橢圓時必須記住其適合於 $z=3$ 。故應在 xy 平面上方三個單位處作出。若 $z=-2$ ，得 $4x^2+y^2=8$ ，亦為一橢圓。因之得截線

在 $z=3$ 為 $4x^2+y^2=13$ (橢圓)，

在 $z=-2$ 為 $4x^2+y^2=8$ (橢圓)。

亦可再求其他截線，但這些已足能作出所求圖形。其圖，示於圖 9-7，稱為橢圓雙曲面。

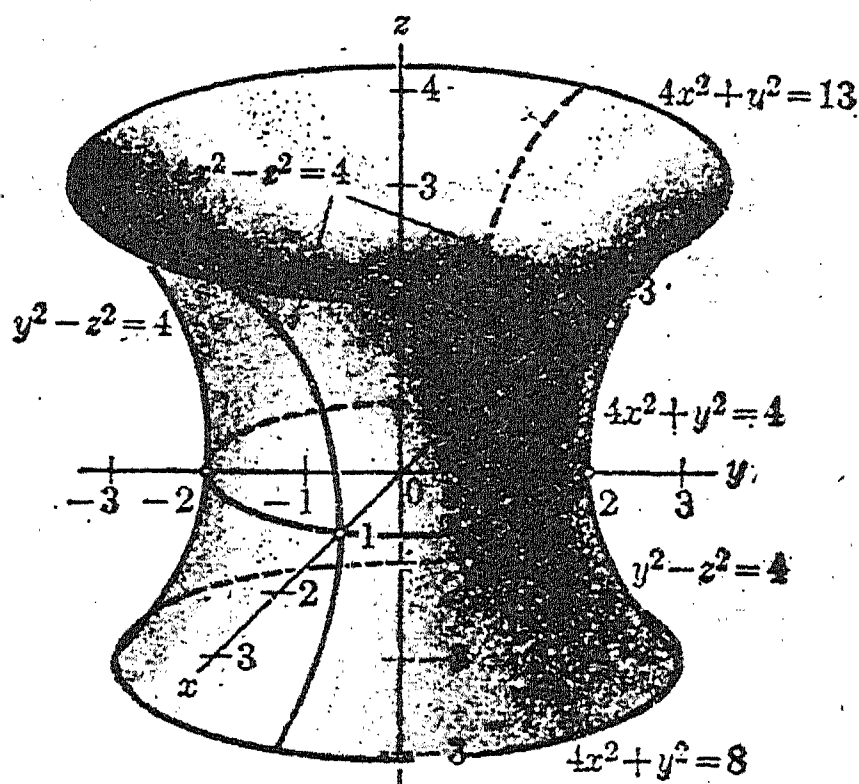


圖 9-7

僅含兩個變數的方程式可表空間中一曲面。由於方程式只有兩個變數，曲面與另一變數無關。另一解釋為：對未包含的變數的所有值其截線皆相同。亦即，平行於所含變數之坐標平面的所有截線與此坐標平面內的跡線相同。下例說明這類圖形，通稱為柱面。

例 G. 方程式 $x^2 + 4y^2 = 4$ 在三維空間中的圖形為柱面，對 z 的所有值其截線為橢圓 $x^2 + 4y^2 = 4$ 。看圖 9-8。

方程式 $z = 4 - x^2$ 在三維空間中的圖形為柱面，對 y 的所有值其截線為拋物線 $z = 4 - x^2$ 。看圖 9-9。

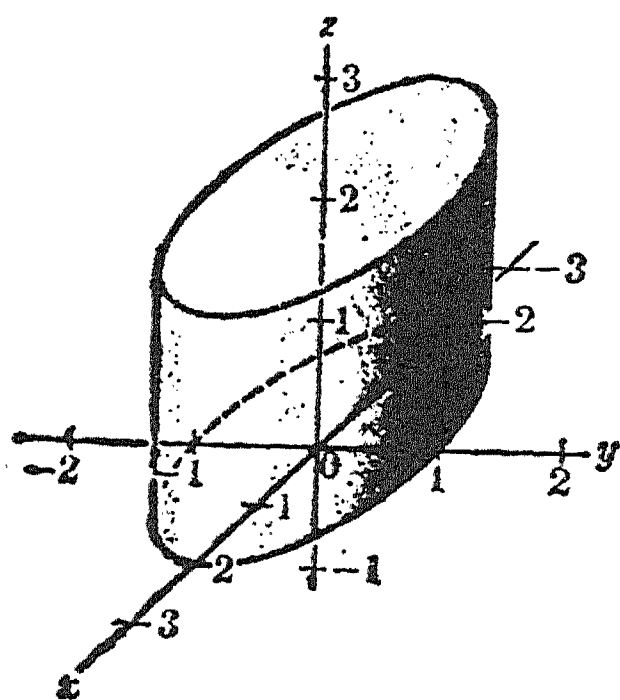


圖 9-8

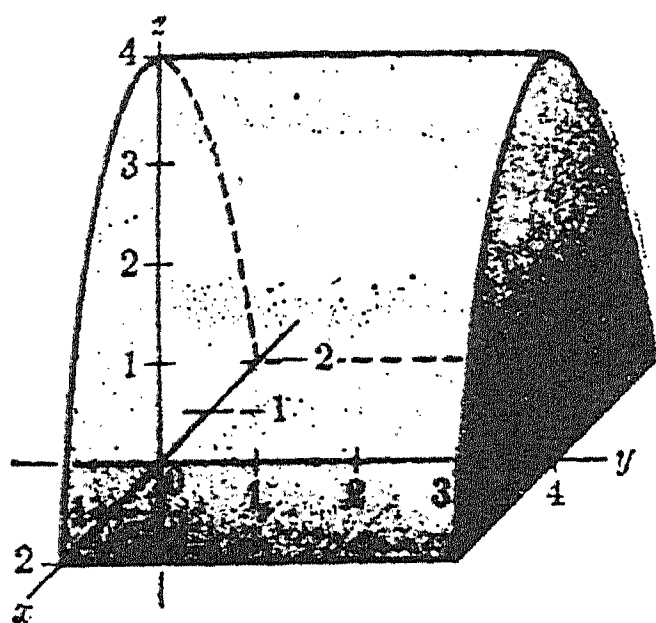


圖 9-9

必須瞭解所作出的圖形大多數都要伸展到跡線與截線所指出的範圍以外。但, 這些線是爲便於表示並認清各曲面。

習題

在 1 至 4 各題中, 用例 A 的方法並對 z 之已知值作所示各方程式之圖。

1. $z = x^2 + y^2$, $z = 1$, $z = 4$, $z = 9$
2. $z = x - 2y$, $z = -2$, $z = 2$, $z = 5$
3. $z = y - x^2$, $z = 0$, $z = 2$, $z = 4$
4. $z = x^2 - 4y^2$, $z = -4$, $z = 1$, $z = 4$

在 5 至 22 各題中, 在三維空間的直角坐標系中作各方程式之圖。

- | | |
|---------------------------|-----------------------------|
| 5. $x + y + 2z - 4 = 0$ | 6. $2x - y - z + 6 = 0$ |
| 7. $4x - 2y + z - 8 = 0$ | 8. $3x + 3y - 2z - 6 = 0$ |
| 9. $z = y - 2x - 2$ | 10. $z = x - 4y$ |
| 11. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ | 12. $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 8$ |
| 13. $z = 4 - 4x^2 - y^2$ | 14. $z = x^2 + y^2$ |
| 15. $z = 2x^2 + y^2 + 2$ | 16. $x^2 + y^2 - 4z^2 = 4$ |
| 17. $x^2 - y^2 - z^2 = 9$ | 18. $z^2 = 9x^2 + 4y^2$ |
| 19. $x^2 + y^2 = 16$ | 20. $4z = x^2$ |

21. $y^2 + 9z^2 = 9$

22. $xy = 2$

23. 作由下列二平面相交所定的空間中直線之圖

$$x + 2y + 3z - 6 = 0 \quad \text{與} \quad 2x + y + z - 4 = 0.$$

24. 作由下列二曲面相交所定的空間中曲線之圖

$$x^2 + (z - 1)^2 = 1 \quad \text{與} \quad z = 4 - x^2 - y^2.$$

25. 電荷之分佈使在—想像的曲面上各點處電位皆相同。這一曲面稱為等位曲面。作方程式為 $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ 的等位曲面之圖。

26. 於某一氣體其壓力、體積、及溫度之關係式為 $p = T/2V$ ，其中 p 為大氣壓力、 T 以 $^{\circ}\text{K}$ 計、 V 以公升計。以 z 軸表 p ， x 軸表 V ，及 y 軸表 T ，作 p - V - T 曲面之圖。所用的單位， T 為 100°K 、 p 為 10 atm 、 V 為 10 公升。作此曲面(熱力曲面)之圖必須用截線，因變數中沒一個可以為零而不能有跡線。

9-3 偏導數

在第二章中闡述導數的觀念時，曾指出處理一變數對於另一變數之變率。但，只包含一個自變數。為將導數及其應用推展到二變數(或更多變數)的函數，求函數對於其中之一自變數的導數，其餘的視為常數。若 $z = f(x, y)$ ，上所述意即對於(例如) y 的一特別值求 z 對於 x 的導數。

故，若 $z = f(x, y)$ ，而 y 視為常數，則 z 變成只是 x 的函數。此函數對於 x 的導數稱為 z 對於 x 的偏導數。同理，若 $z = f(x, y)$ 而 x 視為常數，則此函數對於 y 的導數稱為 z 對於 y 的偏導數。

$\partial z / \partial x$ 為表示“ z 對於 x 的偏導數”最通用的記號，亦可用 z_x 或 $f_x(x, y)$ 。同理， $\partial z / \partial y$ 表示“ z 對於 y 的偏導數。”

例 A. 設 $z = 4x^2 + xy - y^2$ ，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 8x + y \quad \text{及} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x - 2y.$$

例 B. 設 $y = e^x \cos t - e^{-x} \sin t$, 求 $\frac{\partial y}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial y}{\partial t}$ 。

$$\frac{\partial y}{\partial x} = e^x \cos t + e^{-x} \sin t \quad \text{及} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -e^x \sin t - e^{-x} \cos t.$$

欲求偏導數的幾何意義, 假設 $z = f(x, y)$ 爲圖 9-10 中所示曲面。選曲面上一點 P , 過 P 作一平面平行於 xz 平面。在過 P 的此一平面上, y 值爲常數。此平面與曲面相交於圖中所示的曲線。 z 對於 x 的偏導數表切於此曲線的直線斜率。當將 P 的坐標值代入偏導數式 z 中, 則得在該點的切線斜率。同樣方法, y 對於 P 的偏導數在 P 點之值爲切於一曲線的直線斜率, 而此曲線係曲面與過 P 而平行於 yz 平面之平面相交而得的。

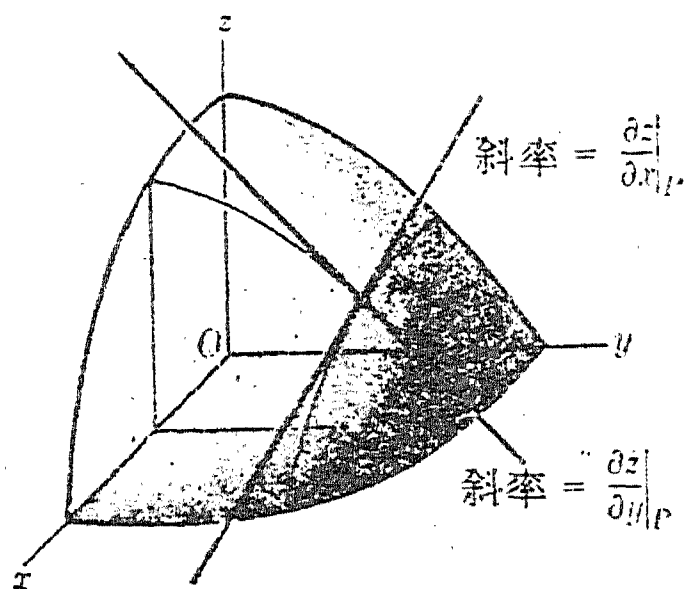


圖 9-10

例 C. 求在 $(2, 1, 3)$ 點與曲面 $2z = x^2 + 2y^2$ 相切且平行於 xz 平面的直線之斜率。再求在同一點與此曲面相切且平行於 yz 平面的直線之斜率。

求 z 對於 x 的偏導數, 得

$$2 \frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = x.$$

此導數在 $(2, 1, 3)$ 點之值即爲平行於 xz 平面的切線之斜率。因之, 第一個所求的斜率爲

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2,1,3)} = 2.$$

z 對於 y 的偏導數在 $(2, 1, 3)$ 點之值為第二個所求的斜率。因之

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(2,1,3)} = 2.$$

兩個斜率都是 2。看圖 9-11。

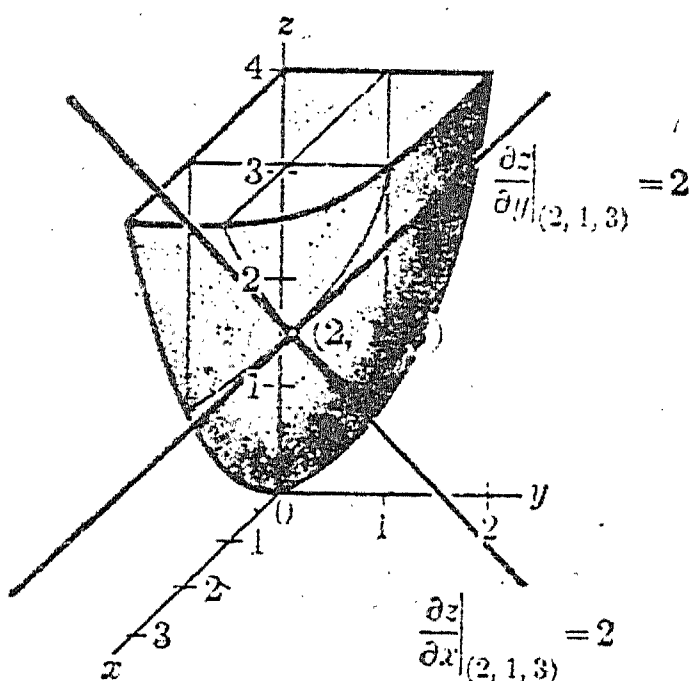


圖 9-11

在許多方面包含經濟學及工程方面都有偏導數的應用，以下列出在經濟學之應用，其他方面的應用列於習題中。

例 D. 若用 n 個工時 (man-hours) 及 t 噸原料可生產 x 單位產品係依據函數 $x = 1000nt - 50t^2 - 10n^2$ 。對勞力的邊際產量為 $\partial x / \partial n$ 。若 $t = 5$ (噸)，求對 $n = 20$ (工時) 的邊際產量。

求適當的偏導數，並對已知值計算其值，即得所求的邊際產量。因之，對勞力的邊際產量函數為

$$\frac{\partial x}{\partial n} = 1000t - 20n.$$

當對 $n = 20$ 及 $t = 5$ 計算，得

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial x}{\partial n} \right|_{(20,5)} &= (1000t - 20n) \Big|_{(20,5)} = 5000 - 400 \\ &= 4600 \text{ (單位/工時)}. \end{aligned}$$

習題

在 1 至 16 各題中, 求因變數或函數對於每一自變數的偏導數。

1. $z = 5x + 4x^2y$

2. $z = 7x^3y - 3xy^4$

3. $\phi = r\sqrt{1+2rs}$

4. $z = (x^2 + xy^3)^4$

5. $z = \frac{x^2}{y} - 2xy$

6. $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$

7. $u = s^2\sqrt{2st+1}$

8. $\phi = \frac{4pq-1}{\sqrt{p-2q}}$

9. $z = \sin xy$

10. $u = e^{x+2y}$

11. $y = \ln(r^2 + s)$

12. $y = \text{Arctan}\left(\frac{x}{t}\right)$

13. $z = e^{xy} \cos x + 3 \sin y$

14. $z = \sin x + \cos xy - \cos y$

15. $f(x, y) = e^x \cos xy + e^{-2x} \tan y$

16. $u = \ln \frac{y^2}{x-y} + e^{-x}(\sin y - \cos 2y)$

在 17 至 20 各題中, 計算在已知點處的各偏導數之值。

17. $z = 3xy - x^2 + y, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1, -2, -9)}$

18. $z = x\sqrt{x^2 - y^2}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(5, 3, 20)}$

19. $z = e^y \ln xy, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(e, 1, e)}$

20. $F(r, \phi) = r^2 \sin 4\phi, \quad F_\phi\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$

21. 一直線與曲面 $z = 9 - x^2 - y^2$ 相切, 平行於 yz 平面, 且過 $(1, 2, 4)$, 求其斜率。做與以上敘述相同的問題只把 $(1, 2, 4)$ 改為 $(2, 2, 1)$ 。作一適當圖形。

22. 對函數 $z = 4x^2 - 8$ 求 $\partial z / \partial y$ 。解釋所得的結果。作一適當圖形。

23. 一公司期望售貨 S 依其陳列面積 A 與投資所費 x 而定 $S = 2Ax + 50x - x^2$ 。當陳列面積為常數時, 求期望售貨對於投資所費的變率。

24. 對一氣體, 等溫體積彈性係數 B (壓縮係數的一度量) 為

$$B = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right).$$

若壓力、體積、及溫度間的關係爲 Van der Waals 方程式。

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT,$$

其中 a, b, R 爲常數, 求表 B 之式。

25. 一金屬纜之長度爲張力與溫度的函數, 其線膨脹係數 α 爲

$$\alpha = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right),$$

其中 L 表長度, T 表溫度, 若 L 是 T 和張力 F 的函數其關係式爲

$$L = L_0 + k_1 F + k_2 T + k_3 F T^2,$$

式中 k_1, k_2, k_3 及 L_0 爲常數, 求表 α 之式。

26. 一氣體的壓力、體積、與溫度間之關係爲

$$pV = nRT,$$

n 與 R 爲常數。求表 $\partial p / \partial V$ 之式, 此爲在等溫變化, 壓力對於體積的變率。

27. 一弦振動的基本頻率 f 隨張力 T 之平方根正變及隨長度 L 反變。若一弦長 60 公分在 6.5×10^6 達因的張力下其基本頻率爲每秒 30 週, 求 f 對於 T 的偏導數, 並就已知值計算其值。
28. 在某次實驗中被一放射線破壞的細胞數目 N 與放射線強度 S 成正比而與細胞距放射線源之距離 x 成反比。若在距離 4 吋處被 8 單位強度的放射線所破壞的細菌數目爲 10^4 , 求 $\partial N / \partial x$ 並在已知值處計算其值。

9-4 偏導數的應用

上節中曾提及偏導數應用的一些重要節目。但如同以前所知導數可應用於一些問題如相關變率、極大極小應用問題、及用微分計算誤差, 亦可用偏導數解答類似問題。本節中將說明如何計算兩變數函數之微分並用於某些應用情況。然後再討論兩變數函數的極大極小應用問題。

在 4-1 節中單變數函數之微分定義為

$$dy = f'(x)dx.$$

同樣方式, 定義函數 $z = f(x, y)$ 的全微分為

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \quad (9-2)$$

這一定義與原先微分的定義是相容的。若 y 為常數, $dz = (\partial z / \partial x)dx$; 若 x 為常數, $dz = (\partial z / \partial y)dy$ 。所以, 每一項皆為 z 對於自變數之一的微分, 而假設只一變數為常數。

例 A. 求函數 $z = x^3y + x^2y^2 - 3xy^3$ 的全微分之式。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y + 2xy^2 - 3y^3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 2x^2y - 9xy^2.$$

故 $dz = (3x^2y + 2xy^2 - 3y^3)dx + (x^3 + 2x^2y - 9xy^2)dy$ 。

前曾應用一個變數函數的微分對自變數有少量變化時求函數的變化值。在同樣方式中亦可應用兩變數函數的全微分。以下各例說明此法。

例 B. 一人在兩個項目中選取其中第一個特殊項目的機率為 $P = x/(x+y)$, 其中 x 為第一項目的件數, y 為第二項目的件數。若 x 由 40 變到 45 而 y 由 100 變到 90, 求此機率中的近似變化。

由求 dP 並對 $x=40$, $dx=5$, $y=100$, $dy=-10$ 計算其值, 即得所求的結果。

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy.$$

而 $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{(x+y)(1) - x(1)}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2}$

及
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x(x+y)^{-2} = \frac{-x}{(x+y)^2}.$$

故
$$dP = \frac{y}{(x+y)^2} dx + \frac{-x}{(x+y)^2} dy = \frac{ydx - xdy}{(x+y)^2}.$$

求其值得

$$dP = \frac{(100)(5) - (40)(-10)}{(100+40)^2} = \frac{500+400}{(140)^2} = \frac{900}{19600} = 0.046.$$

因之，選擇第一項目的機率增加 0.046。機率之值在 0（無機會）與 1（當然的事）之間。在此情形中其機率由大約 0.29 增至 0.33（大約）。此表示其另一項目仍比較容易被選取。

例 C. 欲做一圓錐形漏斗，其漏口很小，上端直徑為 10 公分及深度為 6 公分。但，製造時，直徑做成 10.2 公分而深為 6.2 公分。漏斗所能盛液體的容積百分誤差如何？

圓錐體體積為其半徑與高的函數

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

求 dV ，得

$$dV = \left(\frac{2}{3} \pi r h \right) dr + \left(\frac{1}{3} \pi r^2 \right) dh.$$

用 $r = 5.0$ (公分)、 $dr = 0.1$ (公分)、 $h = 6.0$ (公分)、 $dh = 0.2$ (公分)，

$$\begin{aligned} dV &= \frac{2}{3} \pi (5.0) (6.0) (0.1) + \frac{1}{3} \pi (25) (0.2) \\ &= 2\pi + \frac{5}{3} \pi = 11.5 \text{ (立方公分)}. \end{aligned}$$

計算原計劃的體積 V ，得

$$V = \frac{1}{3} \pi (25) (6) = 50\pi = 157 \text{ (立方公分)}$$

體積的百分誤差爲

$$100\left(\frac{dV}{V}\right) = 100\left(-\frac{2}{50} + \frac{5}{3}\right) = 4 + \frac{10}{3} = 7.33$$

百分誤差約爲 7.3%。

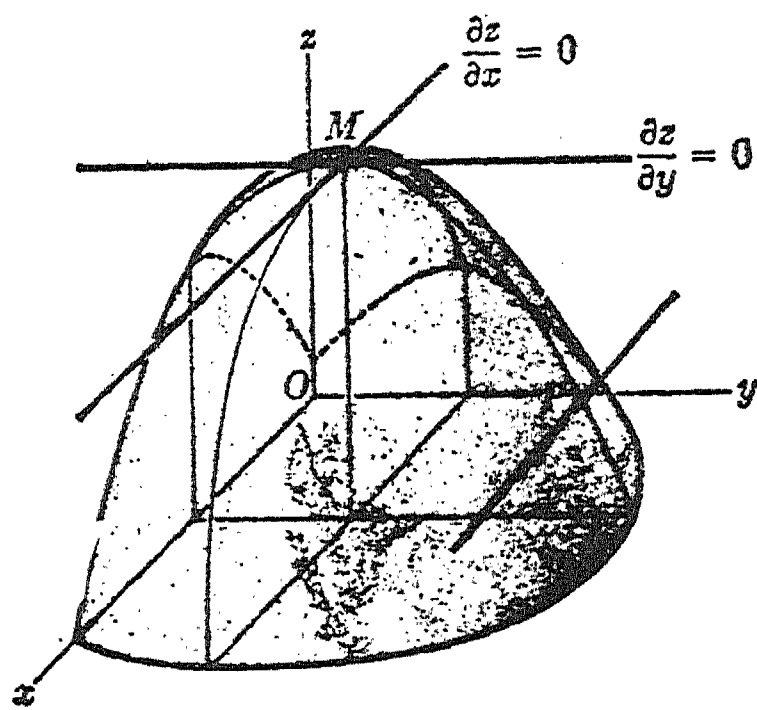


圖 9-12

現將討論求兩變數函數的極大值或極小值問題。兩變數函數的極大值之幾何意義，看圖 9-12 所示之曲面。

在極大點 M 處，在任何方向與此曲面相切的直線必是水平的。此意即

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{及} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (9-3)$$

僅僅此二偏導數爲零並不充分。看 P 點處也是 $\partial z / \partial x$ 等於零。實際上，完全的分析所需者比 (9-3) 式所示的要多，但因這是超過此處所能做得到的。我們將只討論有 (9-3) 式足能求出極大點與極小點的函數。

當然，對極大點及極小點 (9-3) 式成立。在包含此點的曲面之一截線中，用一級導數測定法，可決定此點爲一極大或爲一極小。下例說明 (9-3) 式的應用。

例 D. 求函數 $z = x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x$ 的極大點與極小點。

先求偏導數, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y - 4 \quad \text{及} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 4y.$$

令此二式等於零, 得方程式

$$2x + 2y - 4 = 0,$$

$$2x + 4y = 0.$$

因爲二方程式必須在同一點成立, 聯立解之。得 $x = 4$, $y = -2$ 。在 $y = -2$ 處之截線上

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 8.$$

當 $x < 4$ 時 $\partial z / \partial x < 0$, 而當 $x > 4$ 時 $\partial z / \partial x > 0$ 。意即 $(4, -2, -8)$ 點爲一極小點, 因爲當 x 增加時 $\partial z / \partial x$ 由負變正。

現舉一例說明含兩個變數的函數的極大與極小應用問題。

例 E. 製一長方體盒子, 所用材料的價格其底爲邊與頂的兩倍, 若欲此盒容納 324 立方吋, 求其各邊的大小。

假設此盒的長、寬、高分別爲 l, w, h 。可寫出以此各量表出容積與價格的方程式。容積爲

$$324 = lwh. \quad (1)$$

尙未知每平方吋的價格, 假定邊與頂材料的價格爲 a (每平方吋 a 元), 則底的材料價格爲 $2a$ 。因之, 總價格爲

$$\begin{aligned} C &= 2a(lw) + a(lw + 2wh + 2lh) \\ &= a(3lw + 2wh + 2lh) \end{aligned} \quad (2)$$

由(1)式解 h , 並代入(2)式中, 可表 C 爲 l 與 w 的函數:

$$C = a \left(3lw + \frac{648}{l} + \frac{648}{w} \right). \quad (3)$$

取 C 對 l 與 w 的偏導數, 可求使價格最低的 l 及 w 值。然後再求 h :

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial w} &= a \left(3l - \frac{648}{w^2} \right), \\ \frac{\partial C}{\partial l} &= a \left(3w - \frac{648}{l^2} \right).\end{aligned}\tag{4}$$

令此二式等於零, 得下列方程式:

$$l = \frac{216}{w^2}, \quad w = \frac{216}{l^2}.$$

把前一式代入後一式中, 得

$$w = \frac{216}{(216/w^2)^2} = \frac{w^4}{216}, \quad w^3 = 216, \quad w = 6 \text{ (吋)}$$

再由代入, 得 $l = 6$ (吋), 及 $h = 9$ (吋)。(3)式指出其最大價格是無限的, 因 l 與 w 皆在分母中。此意為所得之解必為一極小。在 (4) 式中任一式用一級導數測定法亦可說明此解答為一極小。

習 題

在 1 至 8 各題中, 求各函數的全微分。

1. $z = 2x^2 - y^2 + 3x$

2. $z = 3xy - 2x^2 + y$

3. $z = xy^3 + 3x^2y - x$

4. $z = xy - 3yx^2 + y^3$

5. $z = \sin xy - y \cos x$

6. $z = \frac{\sec x^2}{x-y}$

7. $z = y \operatorname{Arctan} \frac{y}{x^2}$

8. $z = e^{2xy} \ln(x^2 + y^2)$

在 9 至 12 各題中, 求各函數的極大點及極小點。

9. $z = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10$

10. $z = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 1$

11. $z = x^2 + xy + y^2 - 3y + 2$

12. $z = x^4 - 4x + y^2$

在 13 至 25 各題中, 由求適當的全微分或偏導數解各問題。

13. 某工廠使用兩種燃料。由此工廠所產生空氣污染的噸數為 $t = 0.08x + 0.002y$ ，其中 x 與 y 分別為甲、乙兩種燃料所耗的噸數。若甲燃料所耗每週由 10 噸減到 8 噸，而同時乙燃料每週由 15 噸增到 17 噸，此工廠所產生的空氣污染量的改變如何？
14. 一物體作圓周運動其向心加速度為 $a = r\omega^2$ ，其中 r 為圓的半徑而 ω 為角速度。若半徑由 10.0 公分增到 10.3 公分，而角速度由 400 rad/min (即每分鐘 400 弧度) 增到 406 rad/min，求向心加速度的近似變化。
15. 一介質的折射率為 $n = \sin i / \sin r$ ，其中 i 為光在此介質表面上的入射角及 r 為折射角。在一特殊實驗中， n 由 $i = 45^\circ$ 及 $r = 30^\circ$ 算得。隨後發現每一角均有高 1° 的誤差。在 n 的計算中其近似百分誤差如何？
16. 生產某一成品的成本 C 元為 $C = x^2 + y^2 - xy - 8x - 2y + 1000$ 其中 x 為工時數而 y 為所用原料的磅數。若 x 從 10 變到 11 及 y 從 8 變到 10，求 C 的變化。
17. 一三角形機件的兩邊及夾角經量得為 2.30 公分、2.10 公分、及 90° ，第三邊之長由這些值算出。隨後發現各邊多計了 0.10 公分，在第三邊的計算中之百分誤差如何？
18. 一直圓柱形容器之半徑與高量得為 3.00 呎與 5.00 呎，後又發現半徑為 3.10 呎、高為 5.20 呎，原計算容積值之誤差如何？
19. 求三個正數，其和為 120，使其積為極大。
20. 求使其和減以其平方和為最大的二數。
21. 一塊金屬平板加熱後在 (x, y) 點的溫度 T 為

$$T = x^2 + 2y^2 - x.$$
 求最冷點處之溫度。
22. 對一地區人口數的研究指出在一已知點五哩以內的入口密度 (每平方哩的人數) 為 $P = 2x + 4y - x^2 - y^2 + 100$ 。那一處入口密度最大？
23. 欲製一開口長方體盒使其容積為 500 立方吋。其各邊應如何使其材料最省？
24. 九吋寬的金屬長條將其兩邊 (相等寬度) 彎起並與底成等角，而製成一水

槽。欲使水槽的容積為極大，求底的寬度及底與邊間之角。

25. 若 x 、 y 、與 z 皆為時間 t 的函數，(9-2) 式的各項皆除以 t 的微分 dt 即得 z 對於 t 的全導數之式。因之，全導數為

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (9-4)$$

若一直圓柱之半徑與高分別以 0.05 ft/sec 及 0.20 ft/sec 之率增加，當 $r=6.00$ 呎及 $h=3.00$ 呎時用 (9-4) 式求體積增加之率。

9-5 重積分

現述兩個變數的函數之積分法。其分析與偏微分法相似，在運算時其中一個自變數視為常數。

若 $z=f(x, y)$ 欲對 x 及 y 積分，首先視 x 或 y 為常數，而對另一變數積分。計算此積分後，再對第一次視為常數的變數積分。現即定義此型積分，並作一適當的幾何解釋。

若 $z=f(x, y)$ ，此函數在 x 及 y 上的重積分定義為

$$\int_a^b \left[\int_{g(x)}^{G(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

內層積分的二限為 x 的函數而外層積分的二限為 x 之值。此積分法的運算中，求內層積分及計算時 x 視為常數。其結果為只含 x 的一函數。然後積分此函數並計算之。

重積分的表述中通常不用括弧而寫為

$$\int_a^b \left[\int_{g(x)}^{G(x)} f(x, y) dy \right] dx = \int_a^b \int_{g(x)}^{G(x)} f(x, y) dy dx. \quad (9-5)$$

例 A. 計算 $\int_0^1 \int_{x^2}^x xy dy dx$ 之值。

積分並計算內積分，得

$$\begin{aligned}\int_{x^2}^x xy \, dy &= \left(x \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^x = x \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (x^3 - x^5).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{故得 } \int_0^1 \int_{x^2}^x xy \, dy \, dx &= \int_0^1 \frac{1}{2} (x^3 - x^5) \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{2} (0) = \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

亦有先對 x 積分再對 y 積分的重積分。下例說明此一情形。

例 B. 計算 $\int_1^4 \int_0^{4y} \sqrt{2x+y} \, dx \, dy$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 \int_0^{4y} \sqrt{2x+y} \, dx \, dy &= \int_1^4 \left[\frac{1}{2} \int_0^{4y} (2x+y)^{1/2} 2 \, dx \right] dy \\ &= \int_1^4 \left[\frac{1}{3} (2x+y)^{3/2} \right]_0^{4y} dy \\ &= \frac{1}{3} \int_1^4 [(9y)^{3/2} - (y)^{3/2}] dy \\ &= \frac{1}{3} \int_1^4 (27y^{3/2} - y^{3/2}) dy = \frac{26}{3} \int_1^4 y^{3/2} dy \\ &= \frac{26}{3} \cdot \frac{2}{5} y^{5/2} \Big|_1^4 = \frac{52}{15} (32 - 1) = \frac{1612}{15}\end{aligned}$$

為瞭解重積分的幾何意義，設想圖 9-13(a) 中所示曲面。現看 xy 平面與曲面之間各邊為 dx 、 dy 、及 z 的體積元素(如圖)。現令 x 為常數並自左界 $y=g(x)$ 到右界 $y=G(x)$ 求這些體積元素之和(積分)。由此即得如圖 9-13(b) 所示垂直薄片的體積。今將這些薄片的體積由 $x=a$ (圖中為 $x=0$) 到 $x=b$ 求其和(積分)，即得如圖 9-13(c) 中所示的全部體積。

故，重積分可解釋為曲面下的體積，如同積分解釋為平面圖形的面積。這體積並不必須是如 5-4 節中所討論的迴轉體體積。意即可求

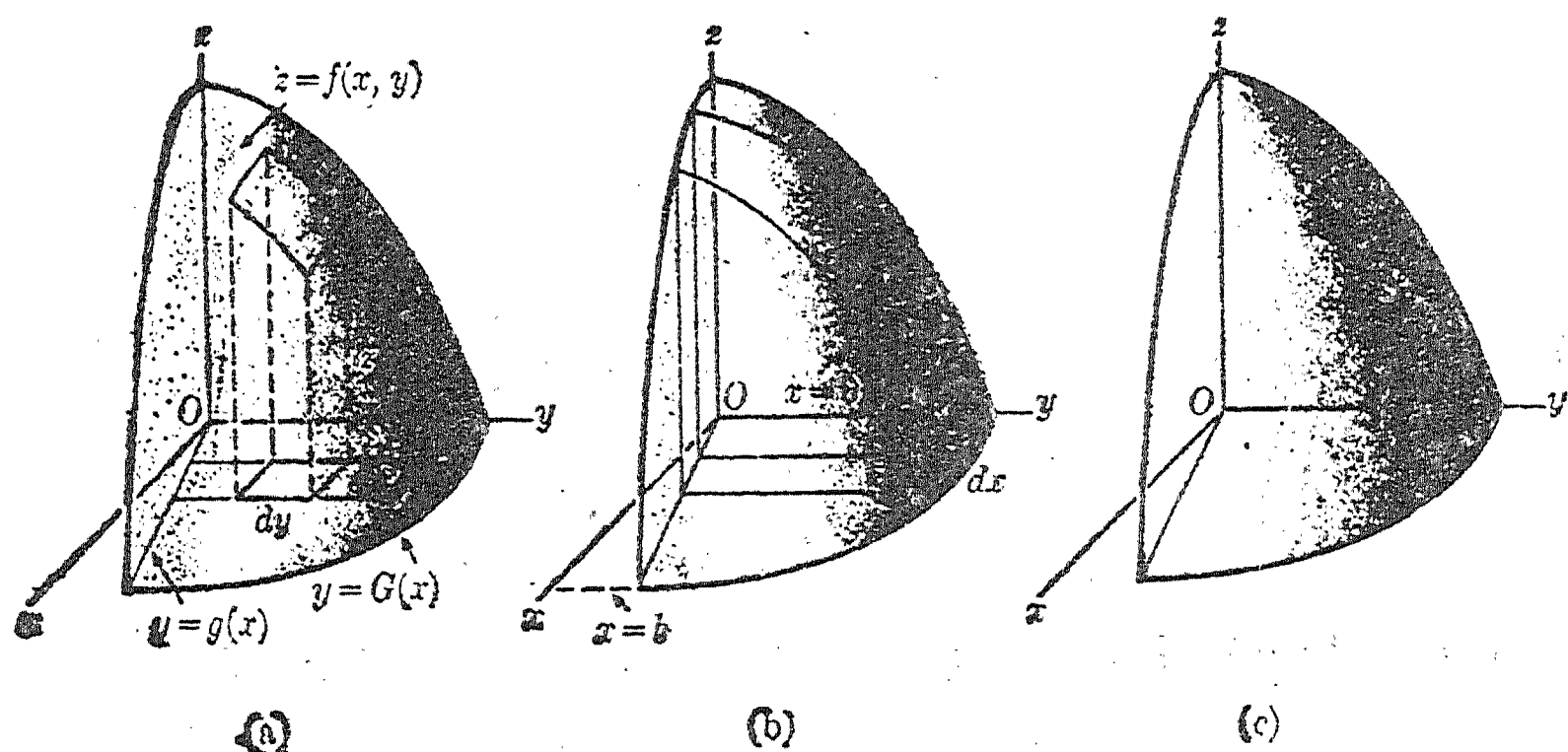


圖 9-13

比以前所能求的較普遍的圖形之體積。以下各例說明運用重積分以求體積。

例 C. 求平面 $x + 2y + 4z - 8 = 0$ 之下在第一卦限中的體積。(看圖 9-14。)

此圖形爲一四面體， $V = \frac{1}{3}Bh$ 。假設其底在 xy 平面內， $B = \frac{1}{2}(4)(8) = 16$ ， $h = 2$ ，故 $V = \frac{1}{3}(16)(2) = \frac{32}{3}$ (立方單位)。將用此值核驗用重積分法求得的值。

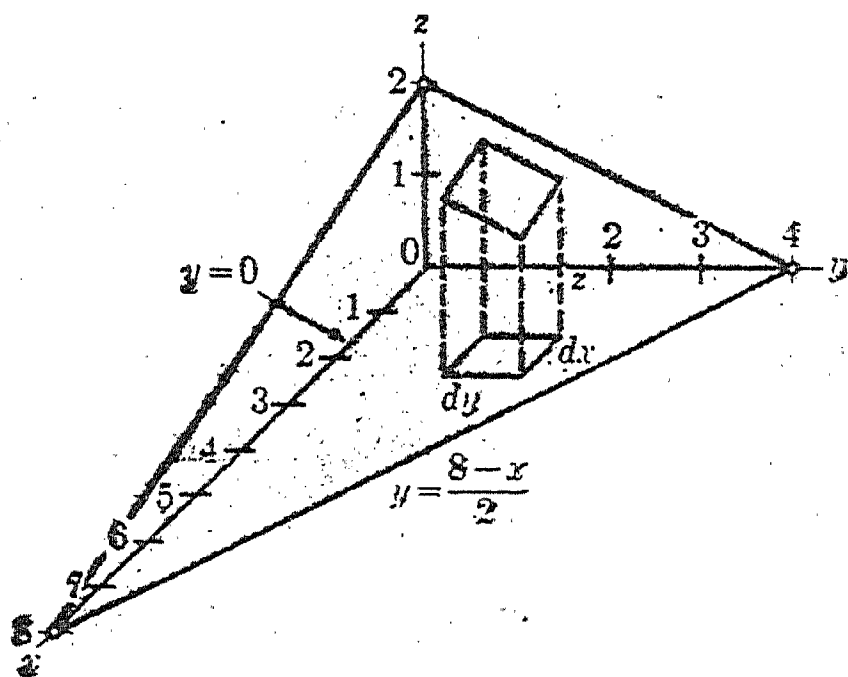


圖 9-14

欲求 $z = f(x, y)$ ，從已知方程式解 z 。

$$z = \frac{8-x-2y}{4}.$$

再，必須求在 y 與 x 上的二限。選擇先對 y 積分， y 係從 $y=0$ 到 $y=(8-x)/2$ 。此上限為曲面在 xy 平面中的跡線。 x 為從 $x=0$ 到 $x=8$ 。故建立並計算積分值如下：

$$\begin{aligned} V &= \int_0^8 \int_0^{(8-x)/2} \left(\frac{8-x-2y}{4} \right) dy dx \\ &= \int_0^8 \left[\frac{1}{4} (8y - xy - y^2) \right]_0^{(8-x)/2} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^8 \left[8 \left(\frac{8-x}{2} \right) - x \left(\frac{8-x}{2} \right) - \left(\frac{8-x}{2} \right)^2 \right] dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^8 \left(32 - 4x - 4x + \frac{x^2}{2} - 16 + 4x - \frac{x^2}{4} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^8 \left(16 - 4x + \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{1}{4} \left(16x - 2x^2 + \frac{x^3}{12} \right) \Big|_0^8 \\ &= \frac{1}{4} \left(128 - 128 + \frac{512}{12} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{128}{3} \right) = \frac{32}{3}. \quad (\text{立方單位}) \end{aligned}$$

由兩個不同方法所得之值相符合。

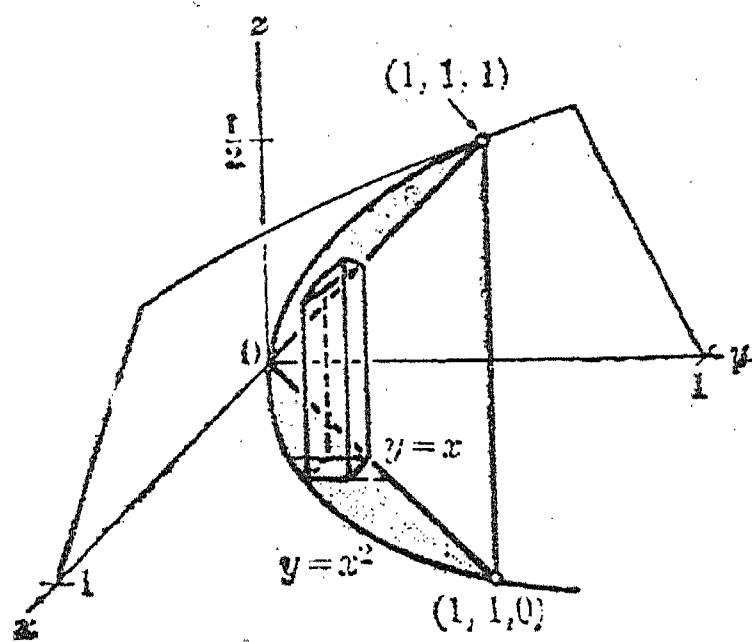


圖 9-15

例 D. 求 xy 平面以上, 曲面 $z=xy$ 之下, 並為柱面 $y=x^2$ 及平面 $y=x$ 所圍之體積。

作出圖形, 如圖 9-15 所示。 $z=xy$ 為積分中 x 與 y 的函數。先對 y 積分, y 的二限為 $y=x^2$ 到 $y=x$ 。 x 的二限為 $x=0$ 到 $x=1$ 。故, 重積分式為

$$V = \int_0^1 \int_{x^2}^x xy \, dx \, dy.$$

此積分之計算已在本節例 A 中完成。故可知此積分的幾何意義。即所求體積為 $1/24$ 立方單位。

例 E. 求曲面 $z=4-x^2-y^2$ 之下及柱面 $x^2=3y$ 與平面 $y=1$ 間在第一卦限中的體積。看圖 9-16。

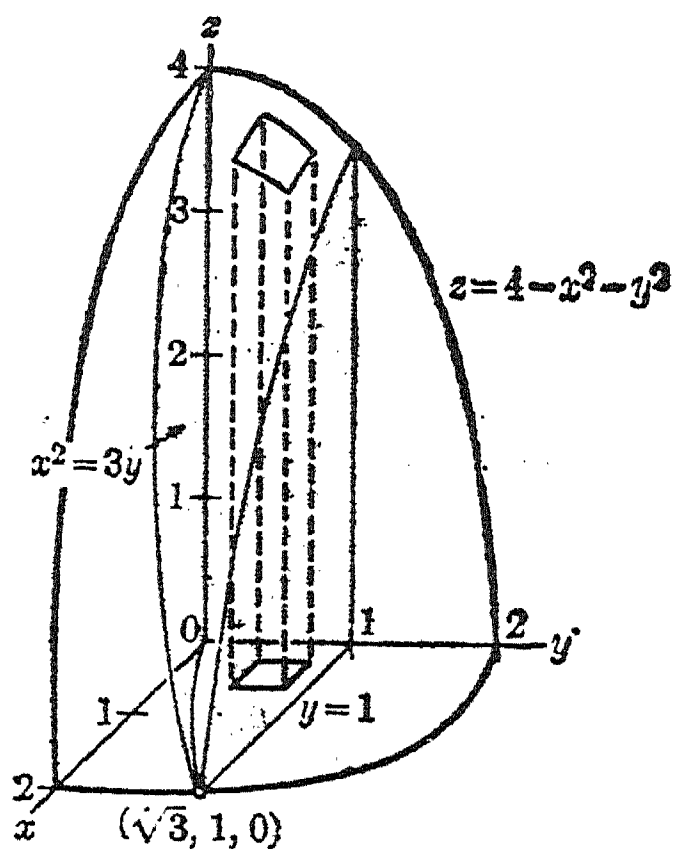


圖 9-16

建立積分式使之先對 x 積分,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{3y}} (4 - x^2 - y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \left[4x - \frac{x^3}{3} - y^2 x \right]_0^{\sqrt{3y}} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (4\sqrt{3}y - \sqrt{3}y^{3/2} - \sqrt{3}y^{5/2}) dy \\
&= \sqrt{3} \left[4\left(\frac{2}{3}\right)y^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2} - \frac{2}{7}y^{7/2} \right]_0^1 \\
&= \sqrt{3} \left(\frac{8}{3} - \frac{2}{5} - \frac{2}{7} \right) = \frac{208\sqrt{3}}{105} \text{ (立方單位)}.
\end{aligned}$$

若先對 y 積分, 此積分應為

$$V = \int_0^{\sqrt{3}} \int_{x^2/3}^1 (4 - x^2 - y^2) dy dx.$$

積分並計算之, 可得相同結果

$$V = \frac{208\sqrt{3}}{105} \text{ (立方單位)}.$$

習題

在 1 至 12 各題中, 計算各重積分之值。

- | | |
|---|---|
| 1. $\int_0^1 \int_0^x 2y dy dx$ | 2. $\int_0^2 \int_1^x 2x dy dx$ |
| 3. $\int_1^2 \int_0^{y^2} xy^2 dx dy$ | 4. $\int_0^4 \int_1^{\sqrt{y}} (x-y) dx dy$ |
| 5. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy dx$ | 6. $\int_4^9 \int_0^x \sqrt{x-y} dy dx$ |
| 7. $\int_0^{\pi/6} \int_{\pi/3}^y \sin x dx dy$ | 8. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{\pi/2}^r \csc^2 \theta d\theta dr$ |
| 9. $\int_0^{\sqrt{3}} \int_{x^2/3}^1 (4 - x^2 - y^2) dy dx$ | 10. $\int_0^1 \int_0^{3y} \sqrt{x+y} dx dy$ |
| 11. $\int_0^{\ln 3} \int_0^x e^{2x+3y} dy dx$ | 12. $\int_0^{1/2} \int_y^{y^2} \frac{dx dy}{\sqrt{y^2-x^2}}$ |

在 13 至 20 各題中, 用重積分法求各體積。

13. 平面 $x+y+z-4=0$ 之下在第一卦限中的體積。
14. 曲面 $z=y^2$ 之下並界於平面 $x=2$ 與 $y=3$ 間在第一卦限中的體積。

15. xy 平面之上, 曲面 $z=4-x^2-y^2$ 之下的體積。
16. xy 平面之上, 曲面 $z=x^2+y^2$ 之下, 並在圓柱面 $x^2+y^2=4$ 之內的體積。
17. 界於 xy 平面, 平面 $z=y, y=2$, 及曲面 $z=2+x^2+y^2$ 在第一卦限中的體積。
18. 界於 $x=0, z=0, 2x=y$, 及 $x+3y+2z-6=0$ 各平面間的體積。
19. 平面 $z=x+y$ 之下並在圓柱面 $x^2+y^2=9$ 之內的第一卦限中的體積。
20. xy 平面之上並界於 $x=y^2, y=8x^2$, 及 $z=x^2+1$ 各圓柱面間的體積。
先對 y 積分, 再另先對 x 積分以核驗之。

在 21, 22 兩題中作一適當圖形指出由積分式所求得之體積。

$$21. \int_0^{1/2} \int_{x^2}^1 (4-x-2y) dy dx. \quad 22. \int_1^2 \int_0^{2-y} \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy.$$

9-6 雜 題

在 1 至 8 各題中, 求各函數對每一自變數的偏導數。

$$1. z=5x^3y^2-2xy^4$$

$$2. u=\frac{r}{(r-3s)^2}$$

$$3. z=\sqrt{x^2-3y^2}$$

$$4. \phi=4s\sqrt{st^2+2t}$$

$$5. u=ye^{2z}(y^2+z)$$

$$6. q=p \ln(r+1) - \frac{rp}{r+1}$$

$$7. z=\text{Arcsin} \sqrt{x+y}$$

$$8. z=ye^{xy} \sin(2x-y)$$

在 9 至 12 各題中, 計算各重積分之值。

$$9. \int_0^3 \int_1^x (x+2y) dy dx$$

$$10. \int_1^2 \int_0^{\pi/4} r \sec^2 \theta d\theta dr$$

$$11. \int_0^1 \int_0^{2x} x^2 e^{xy} dy dx$$

$$12. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_1^{\sqrt{\cos \theta}} r \sin \theta dr d\theta$$

在 13 至 16 各題中, 用函數 $z=\sqrt{x^2+4y^2}$ 。

13. 求其全微分。

14. 求與函數之曲面相切於 $(2, 1, 2\sqrt{2})$ 且平行於 yz 平面的直線之方程式。
15. 作表此函數之曲面。
16. 當 x 由 2.00 變到 2.04 及 y 由 1.00 變到 1.06 時求函數的近似變化。

在 17 至 20 各題中, 用函數 $z = e^{x+y}$ 。

17. 求與函數之曲面在 $(1, 1, e^2)$ 相切且平行於 xz 平面的直線之方程式。
18. 作表此函數之曲面。
19. 當 x 由 1.00 變到 1.01 及 y 由 1.00 變到 1.02 時求函數的近似變化。
20. 求函數的曲面之下在平面 $x=1$ 與 $y=x$ 之內第一卦限中的體積。

在 21 至 30 各題中, 用本章中的方法解各問題。

21. 在電晶體的理論中, 一電晶體的電流增益 α 定義為

$$\alpha = \frac{\partial i_c}{\partial i_e}$$

式中 i_c 為集極電流及 i_e 為射極電流。若 i_c 為 i_e 與集極電壓 v_c 的函數

$$i_c = i_e(1 - e^{-2v_c}),$$

若 v_c 為 2(volts) 求 α 。

22. 量度金屬纜中應力對應變之比的楊氏係數定義為

$$Y = \frac{L}{A} \frac{\partial F}{\partial L},$$

L 為纜的長度, A 為其截面積, F 為纜上的張力, 若

$$F = -\frac{10^7 T}{L^2},$$

對 $L=110$ 公分, $T=300^\circ\text{K}$, 及 $A=10^{-2}$ 平方公分, 求 Y (單位為 dynes/cm², 即每平方公分的達因數)。

23. 若由 n 個工時及用 t 噸原料生產 x 單位依 $x = 1000n^2t - 50n^3 - 10t^2$ 而定, 求對勞力的邊際生產函數。
24. 研究指出一植物每星期的成長為 $w = \sqrt{4p^2 + t^2} - p - t$, 其中 w 為重量以噸計, p 為水的加侖數, t 為接受陽光的鐘點數。求 $\partial w / \partial p$ 。
25. 一稜鏡的像距為物距 p 與稜鏡的焦距 f 的函數

$$q = \frac{pf}{p-f}.$$

若 f 由 20 公分變到 21 公分, p 由 100 公分變到 105 公分, 求 q 的近似變化。

26. 一矩形房間的地板寬與長為 30 呎與 40 呎, 另一房間為 31 呎與 38 呎, 此二房間地板上的對角線相差多少?

27. 一塊 5 吋見方的金屬平板上各點的溫度為其到相交二稜之距離 x 與 y 的函數

$$T = 2xy - y^2 - 2x^2 + 3y + 2.$$

求最熱之點。

28. 製一容納 1000 立方吋的封閉長方體盒, 其形狀如何可使表面積為極小?

29. 求第一卦限中在平面 $x + y + z - 6 = 0$ 之下及柱面 $y = 4 - x^2$ 之內的體積。

30. 求第一卦限中在曲面 $z = 4 - y^2$ 之下及平面 $x + y = 2$ 之內的體積。

第十章 極坐標

10-1 極坐標

在此以前作過的所有曲線都是在一個坐標系中的。這個坐標系，直角坐標系，為最有用及應用最廣的坐標系。但，對於某些型式曲線，用另一種坐標系來處理可較佳。這些坐標系應用很廣，特別是在包含較高深數學的應用時。現將論其中的一種。

不用 x 及 y 坐標表一點，而以其向徑 r 及此向徑與 x 軸所成之角來表其位置。因之，三角函數定義中所用的 r 與 θ 亦可用作在平面內各點的坐標。選擇坐標時之要點為，對每一組值只能有一點對應於此組值。用 r 與 θ 作為坐標可滿足此一條件。在極坐標中原點稱為極，正 x 軸稱為極軸。看圖 10-1。

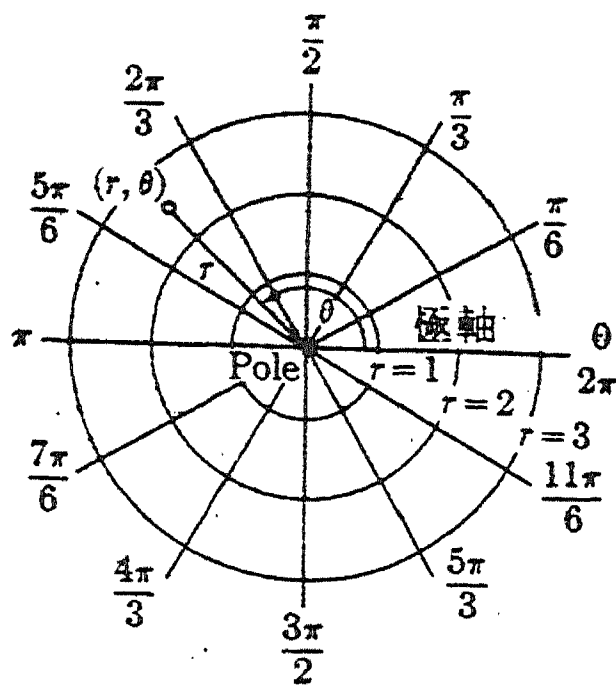


圖 10-1

例 A. 若 $r=2, \theta=\pi/6$ ，可得圖 10-2 中所示之點。當用極坐標時此點的坐標寫作 $(2, \pi/6)$ ，此點相當於直角坐標中的 $(\sqrt{3}, 1)$ 。

直角坐標與極坐標的一個區別為，對平面內的每一點，其極坐標有無數個。例如， $(4, \pi/6)$ 亦可表為 $(4, 13\pi/6)$ 因角 $\pi/6$ 與 $13\pi/6$ 為同終線。也取消三角函數的定義中對 r 的限制。亦即， r 可取正值或負值。若 r 為負，則此點係從其為正的點在極的反方向而得。

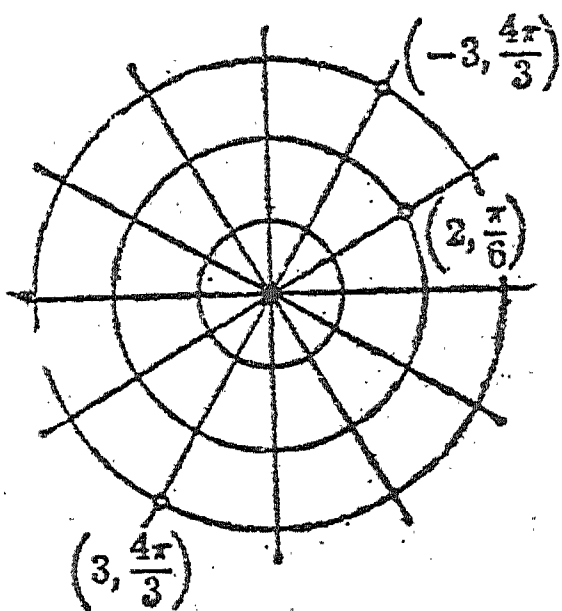


圖 10-2

例 B. 坐標 $(3, 4\pi/3)$ 與 $(3, -2\pi/3)$ 表同一點。而 $(-3, 4\pi/3)$ 點在極的反方向，距極 3 單位。 $(-3, 4\pi/3)$ 的另一可能的坐標為 $(3, \pi/3)$ 。看圖 10-2。

一點的極坐標與同一點的直角坐標二者間之關係直接由三角函數定義導出。最常用者為

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (10-1)$$

及
$$\tan \theta = \frac{y}{x}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (10-2)$$

當 x 與 y 間的關係欲化為 r 與 θ 時用 (10-1) 式；反之，則用 (10-2) 式。(10-2) 式通常用來變換坐標之值。

例 C. 用 (10-1) 式可把 $(4, \pi/4)$ 點的極坐標化為直角坐標 $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ 。因

$$\begin{aligned} x &= 4 \cos \pi/4 = 4(\sqrt{2}/2) = 2\sqrt{2}, \\ y &= 4 \sin \pi/4 = 4(\sqrt{2}/2) = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

例 D. 若一點的直角坐標爲 $(3, -5)$, 由 $\tan \theta = -\frac{5}{3}$ 可求出同一點的極坐標。因爲此點在第四象限所以 $\theta = 5.25$ (或 -1.03)。
 $r = \sqrt{9+25} = 5.83$ 。所以直角坐標中之點 $(3, -5)$ 即極坐標中之點 $(5.83, 5.25)$ 。

例 E. 求圓 $x^2 + y^2 = 2x$ 的極方程式。

因 $r^2 = x^2 + y^2$ 及 $x = r \cos \theta$, 得 $r^2 = 2r \cos \theta$ 即 $r = 2 \cos \theta$ 。此即爲其極方程式; 亦即, 曲線的方程式用變數 r 與 θ 表示。

例 F. 求玫瑰線 $r = 4 \sin 2\theta$ 的直角坐標方程式。

用關係式 $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$, 得 $r = 8 \sin \theta \cos \theta$ 。用(10-1)式與(10-2)式, 得

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 8 \left(\frac{y}{r} \right) \left(\frac{x}{r} \right) = \frac{8xy}{r^2} = \frac{8xy}{x^2 + y^2}.$$

兩邊平方, 得

$$x^2 + y^2 = \frac{64x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{即} \quad (x^2 + y^2)^3 = 64x^2y^2.$$

由此例可知若由直角坐標作圖比較繁複。

習 題

在 1 至 10 各題中, 在極坐標紙上作出各點。

1. $(3, \pi/6)$

2. $(2, \pi)$

3. $(4, 7\pi/6)$

4. $(5, -\pi/3)$

5. $(5/2, -8\pi/3)$

6. $(-5, \pi/4)$

7. $(3, -5\pi)$

8. $(4, 2\pi/5)$

9. $(-4, -5\pi/3)$

10. $(-1, -1)$

在 11 至 14 各題中, 對以直角坐標表示的各已知點求其極坐標。

11. $(1, \sqrt{3})$

12. $(-1, -1)$

13. $(-\sqrt{3}/2, -1/2)$

14. $(-5, 4)$

在 15 至 18 各題中, 對以極坐標表示的各點求其直角坐標。

15. $(8, 4\pi/3)$

16. $(-4, -\pi)$

17. $(3, -\pi/8)$

18. $(-1, -1)$

在 19 至 24 各題中, 求每一直角坐標方程式的極方程式。

19. $x=3$

20. $y=2$

21. $x^2+y^2=a^2$

22. $x^2-y^2=a^2$

23. $x^2+4y^2=4$

24. $y=x^2$

在 25 至 28 各題中, 求每一極方程式的直角坐標方程式。

25. $r=\sin \theta$

26. $r \cos \theta = 4$

27. $r=2(1+\cos \theta)$

28. $r^2=16 \cos 2\theta$

29. 參看(6-24)式與(6-25)式, 可知一圓弧的長度及一圓扇形的面積隨二變數而變。此二變數即用以作為極坐標者。以直角坐標表弧長 s 及面積 A 。(如何表示 θ ?)

30. 把 1-7 節的第 30 題中纜繩的方程式表為極坐標式。

31. 某一運動物體的位置之 x 與 y 坐標為時間的函數

$$x=2t \quad \text{及} \quad y=\sqrt{8t^2+1}$$

求此物體路線的極方程式。

32. 一地球人造衛星路線的極方程式為

$$r = \frac{4800}{1+0.14 \cos \theta}$$

其中 r 以哩計。求此衛星的直角坐標方程式。其軌跡為一橢圓, 地球在其一焦點上。

10-2 極坐標中的曲線

在極坐標中作一曲線的基本方法與直角坐標中相同。先設各 θ 值

然後求出對應的 r 值。作出並連接這些點，即得表此方程式的曲線。以下各例說明此法。

例 A. 作 $r=3$ 之圖。

因對所有 θ 值 $r=3$ ，圖形乃半徑為 3 之一圓，其圓心在極（圖 10-3）。並不必須求一些特殊的點。（同法可證明 $\theta=\pi/6$ 為一過極的直線。此表其 $\theta=\pi/6$ 的所有點，與 r 之值無關，正或負皆可。）

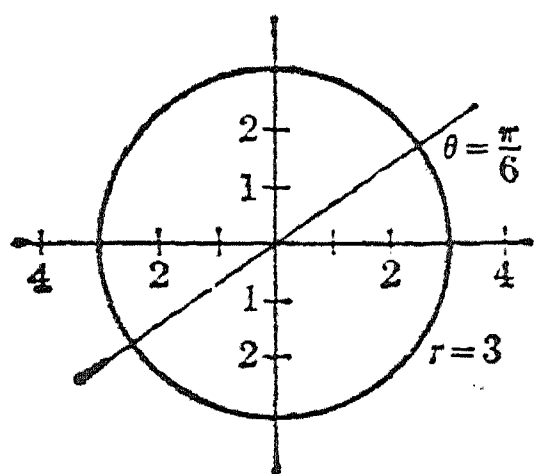


圖 10-3

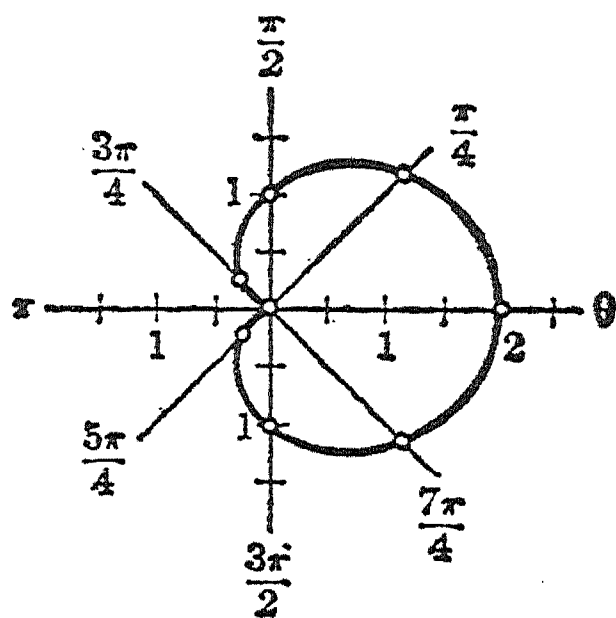


圖 10-4

例 B. 作 $r=1+\cos\theta$ 之圖。

先求得下列對應於指定的各 θ 值的 r 值之表。

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
r	2	1.7	1	0.3	0	0.3	1	1.7	2

現可知曲線上各點已開始重複，故不必再求其他點。此曲線稱為心臟線（圖 10-4）。

例 C. 作 $r=1-2\sin\theta$ 之圖。

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
r	1	-0.4	-1	-0.4	1	2.4	3	2.4	1

此曲線稱為蚌線 (圖 10-5)。

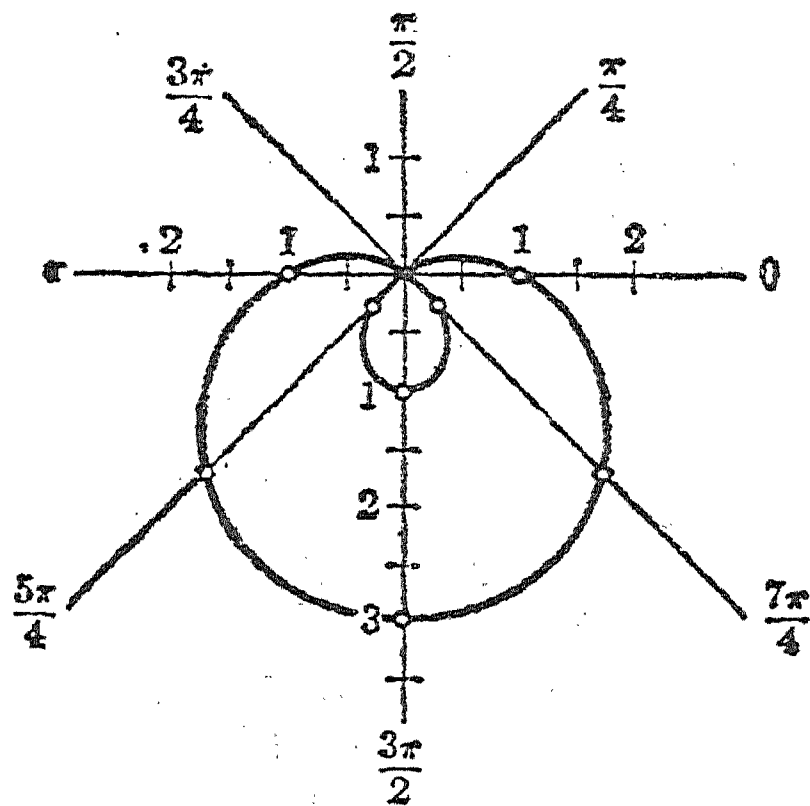


圖 10-5

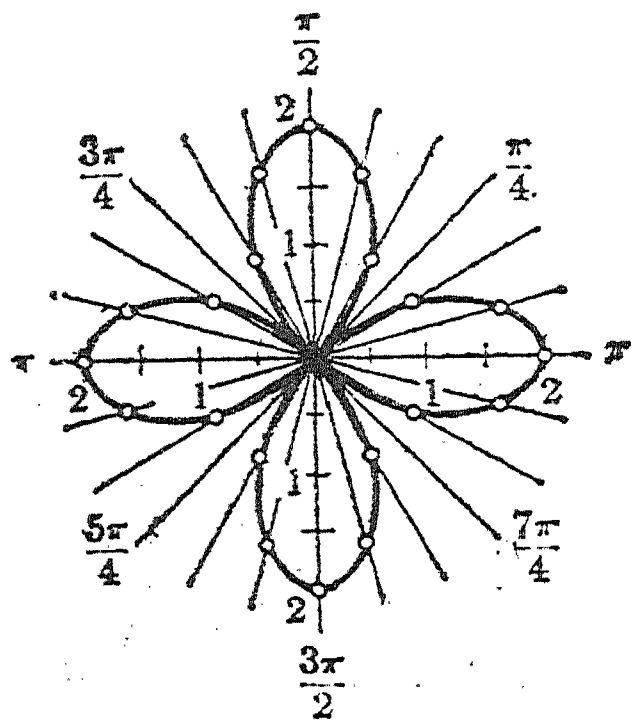


圖 10-6

例 D. 作 $r = 2 \cos 2\theta$ 之圖。

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
r	2	1.7	1	0	-1	-1.7	-2	-1.7	-1	0	1	1.7	2

對 θ 從 π 到 2π 之值, r 之值重複。可得四葉玫瑰線 (圖 10-6)。

例 E. 作 $r^2 = 9 \cos 2\theta$ 之圖。

θ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
r	± 3	± 2.5	0		0	± 2.5	± 3

無 r 值對應於 $\pi/4 < \theta < 3\pi/4$ 範圍內的 θ 值, 因這些角的二倍係在第二及第三象限, 而其餘弦為負值。 r^2 之值不能為負。又, $\theta > \pi$ 時 r 之值重複。此圖稱為雙紐線 (圖 10-7)。

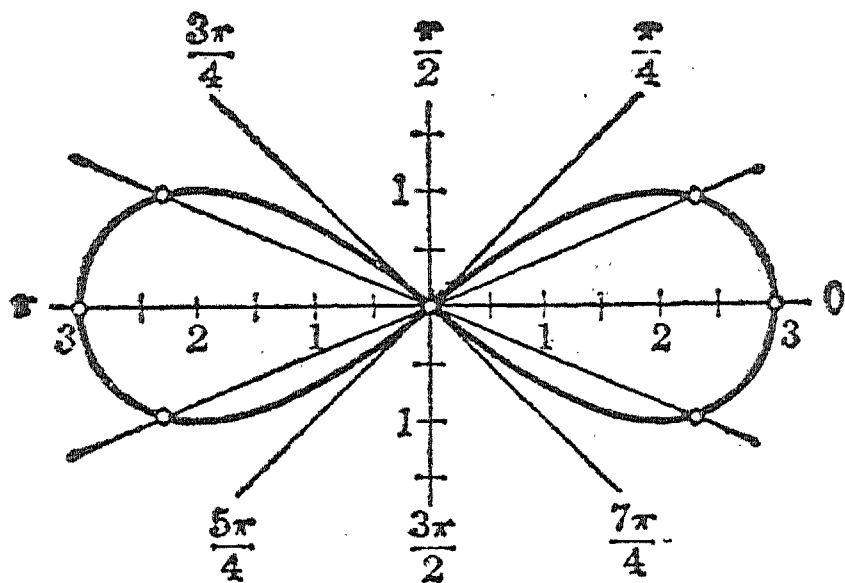


圖 10-7

習題

在 1 至 22 各題中，作極坐標中的各曲線。

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $r=4$ | 2. $r=2$ |
| 3. $\theta=-\frac{3\pi}{4}$ | 4. $\theta=\frac{5\pi}{3}$ |
| 5. $r=4 \sec \theta$ | 6. $r=4 \csc \theta$ |
| 7. $r=2 \sin \theta$ | 8. $r=3 \cos \theta$ |
| 9. $r=1-\cos \theta$ (心臟線) | 10. $r=\sin \theta-1$ (心臟線) |
| 11. $r=2-\cos \theta$ (蚌線) | 12. $r=2+3 \sin \theta$ (蚌線) |
| 13. $r=4 \sin 2\theta$ (玫瑰線) | 14. $r=2 \sin 3\theta$ (玫瑰線) |
| 15. $r^2=4 \sin 2\theta$ (雙紐線) | 16. $r^2=2 \sin \theta$ |
| 17. $r=-4 \sin 4\theta$ (玫瑰線) | 18. $r=10^\theta$ (螺線) |
| 19. $r=\frac{1}{2-\cos \theta}$ (橢圓) | 20. $r=\frac{1}{1-\cos \theta}$ (拋物線) |
| 21. $r=3-\sin 3\theta$ | 22. $r=4 \tan \theta$ |

23. 某一高度的衛星每日環繞地球一週其路線在地球上射影的近似方程式為

$$r^2 = R^2 \cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

其中 R 為地球半徑。求作此射影的路線圖。

24. 一凸輪其形狀為：其上“半”部稜之方程式為 $r=2+\cos \theta$ ，下“半”部稜

之方程式爲 $r = 3/(2 - \cos \theta)$ 。作表此凸輪形狀之曲線圖。

25. 求焦點在 $(0, 0)$ 及頂點在 $(\frac{1}{2}, 0)$ 的拋物線方程式。變換此方程式爲極坐標方程式並作圖。

26. 作下列直角坐標方程式之圖。

$$4(x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 - x^4 - 2x^2y^2 - y^4) + y^2 = 0.$$

[提示：此方程式可寫爲

$$4(x^2 + y^2)^3 - 4(x^2 + y^2)^2 + y^2 = 0.$$

換爲極坐標然後作曲線之圖。]

10-3 極坐標中的面積

現述如何求極曲線所界的面積。回想(6-25)式所述圓扇形面積爲 $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$ 。在圖 10-8 中所示的面積元素, 半徑爲 r 圓心角爲 $d\theta$, 若將從 $\theta = \alpha$ 到 $\theta = \beta$ 的所有元素相加(積分)其和即表所示的面積。因之, 此面積爲

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta. \quad (10-3)$$

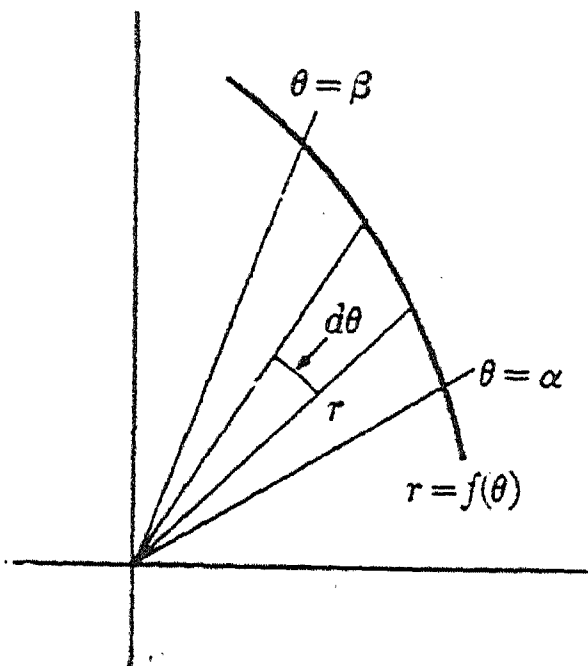


圖 10-8

以下各例說明 (10-3) 式的應用。

例 A. 求雙紐線 $r^2 = \cos 2\theta$ 的一環所含的面積。

用 (10-3) 式以 $r^2 = \cos 2\theta$ 代入。欲定二限 α 及 β ，注意此曲線的對稱性 (看圖 10-9)。選 $\alpha=0$ 並選 r 首次為零處之值為 β ，可得此環的上半部面積。二倍之即得所求的面積。因之，由令 $r^2 = \cos 2\theta = 0$ 得 $2\theta = \pi/2$ ，即 $\theta = \pi/4$ 。意即 $\beta = \pi/4$ 。所以此面積的積分為

$$\begin{aligned} A &= 2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta \, d\theta \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta (2 \, d\theta) = \frac{1}{2} \sin 2\theta \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

因之，此面積為 $\frac{1}{2}$ 平方單位。

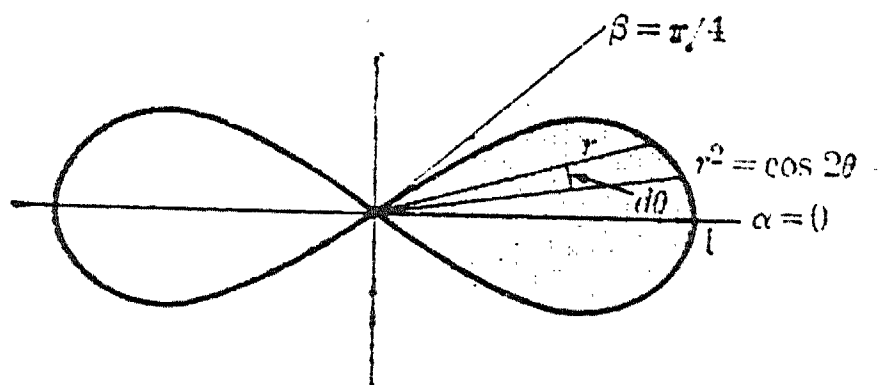


圖 10-9

例 B. 求被曲線 $r = 2 - \cos \theta$ 所圍的面積。

用 (10-3) 式， $r^2 = (2 - \cos \theta)^2 = 4 - 4 \cos \theta + \cos^2 \theta$ 。欲定二限 α 及 β ，看圖 10-10 中作出的此曲線之圖

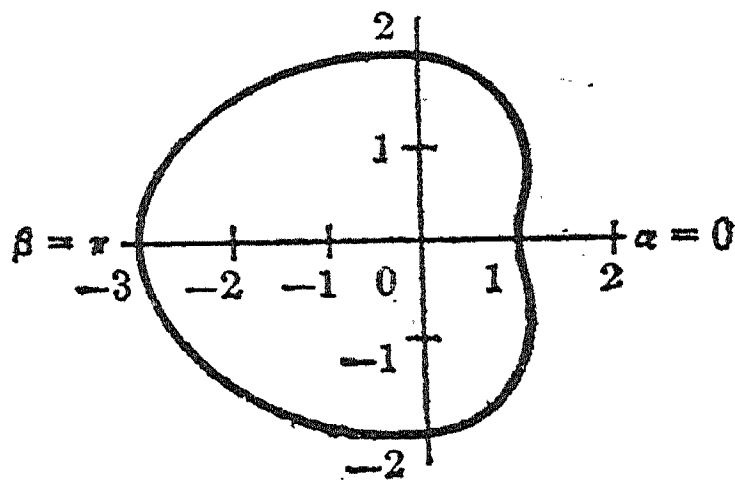


圖 10-10

因其對稱於極軸，可令 $\alpha=0$ 及 $\beta=\pi$ 求出的結果再乘以 2。(用 $\alpha=0$, $\beta=2\pi$ 亦可。就不必再乘 2)。因之，

$$A = 2 \left[\frac{1}{2} \int_0^\pi (4 - 4 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \right]$$

用附錄中第 6 表的公式 32 及基本恒等式 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ ，得

$$A = \left[4\theta - 4 \sin \theta + \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^\pi = \left(4\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{9\pi}{2}.$$

例 C. 求在心臟線 $r=1+\sin \theta$ 之外並在圓 $r=3 \sin \theta$ 之內部分的面積。

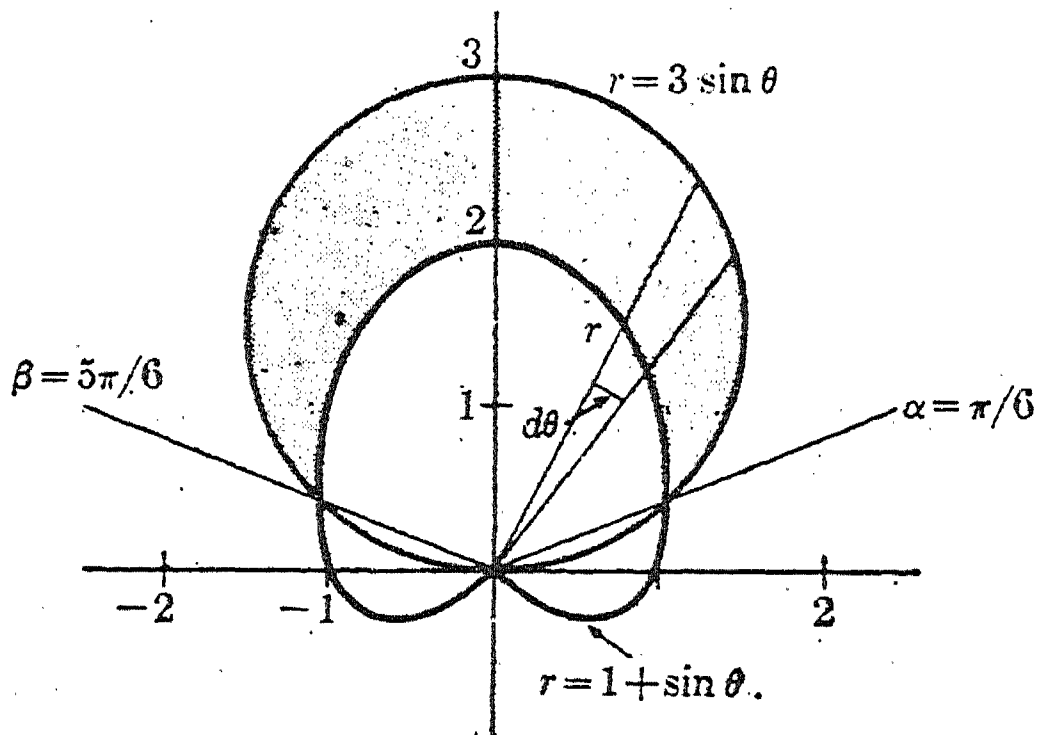


圖 10-11

先作圖，可知所求面積為圖 10-11 中的陰影部分。將 $r=3 \sin \theta$ 代入心臟線的方程式中，得

$$3 \sin \theta = 1 + \sin \theta,$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2},$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{6}.$$

意即 $(3/2, \pi/6)$ 與 $(3/2, 5\pi/6)$ 二點為二曲線的公共點。

因之, 圓內在 $\theta = \pi/6$ 到 $\theta = 5\pi/6$ 間的面積爲

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (3 \sin \theta)^2 d\theta.$$

心臟線內在 $\theta = \pi/6$ 到 $\theta = 5\pi/6$ 間的面積爲

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 + \sin \theta)^2 d\theta.$$

所求的面積爲 A_1 減以 A_2 之差。因之,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} [(3 \sin \theta)^2 - (1 + \sin \theta)^2] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (8 \sin^2 \theta - 2 \sin \theta - 1) d\theta \end{aligned}$$

用積分表中的公式 29 及基本恒等式 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, 得

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} (3\theta - 2 \sin 2\theta + 2 \cos \theta) \Big|_{\pi/6}^{5\pi/6} \\ &= \frac{1}{2} \left[3 \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) - 2 \left(\sin \frac{5\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \right) + 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{6} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[2\pi - 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] = \pi. \end{aligned}$$

由於曲線的對稱, 可從 $\pi/6$ 到 $\pi/2$ 積分並將結果二倍可較便利。

習 題

在 1 至 12 各題中, 求由各已知曲線所圍的面積。

1. $\theta = \frac{1}{6}\pi, \theta = \frac{2}{3}\pi, r = 2$

2. $\theta = 0, \theta = \frac{4}{3}\pi, r = 3$

3. $\theta = 0, \theta = \frac{1}{4}\pi, r = \sec \theta$

4. $\theta = \frac{1}{6}\pi, \theta = \frac{1}{2}\pi, r \sin \theta = 2$

5. $r = 2 \cos \theta$

6. $\theta = 0, \theta = \frac{1}{3}\pi, r = 4 \sin \theta$

7. $\theta=0, \theta=\frac{1}{2}\pi, r=e^{2\theta}$ 8. $r=1-\cos \theta$
 9. $r=2 \sin 3\theta$ 10. $r=3 \cos 2\theta$
 11. $r=2 \sin \theta, r=2 \cos \theta$ (公共面積)
 12. $r=2+\cos \theta, r=5 \cos \theta$ (在 $2+\cos \theta$ 之外)
 13. 在設計知覺區的實驗中, 一心理學家作曲線 $r^2=8 \sin 2\theta$ 之一環的面積及邊長為 2 的一正方形(長度單位為吋)。比較此二面積的大小。
 14. 花園中有一水池, 花園為曲線 $r=60 \cos \theta$ 與 $r=30$ 間之部分(長度單位為呎)。求此花園的面積。

在 15, 16 兩題中, 利用極曲線之弧長公式

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta$$

其中 $r' = dr/d\theta$ 。

15. 求 $r = \cos^2(\frac{1}{2}\theta)$ 之全長。
 16. 求圓 $r = \sin \theta + \cos \theta$ 的周長。

10-4 雜 題

在 1 至 4 各題中, 求每一直角坐標方程式的極方程式。

1. $y=2x$ 2. $y=4$
 3. $x^2+y^2=7-6y$ 4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

在 5 至 8 各題中, 求每一極方程式的直角坐標方程式。

5. $r=2 \sin 2\theta$ 6. $r=\csc \theta$
 7. $r=\frac{2}{1-\sin \theta}$ 8. $r=\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

在 9 至 16 各題中, 作各極曲線之圖。

9. $r=4(1+\sin \theta)$ 10. $r=1+2 \cos \theta$
 11. $r=\cot \theta$ 12. $r=\frac{1}{2(\sin \theta - 1)}$

13. $r = 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)$

14. $r = \theta$

15. $r = 2 + \cos 3\theta$

16. $r = 3 - \cos 2\theta$

在 17 至 20 各題中, 求各曲線所圍的面積。

17. $r = 2 - \sec \theta$ (一環)。

18. $r = 1 - 2 \cos \theta$ (小環)。

19. $r = 2 \sin \theta$ 之內, $r = 1$ 之外。

20. $r = 8 \cos \theta$ 之內, $x = 2$ 之右。

21. 將 1-12 節的第 35 題中橋拱的方程式化為極坐標方程式。

22. 將 1-8 節的第 25 題中人造衛星路線的方程式化為極坐標方程式。

23. 受一引力的影響一物體循行的方程式可證明通常為

$$\frac{1}{r} = a + b \cos \theta.$$

對一特殊路線 a 與 b 為常數。由將此方程式變換為直角坐標, 證明若 $a = b$ 此方程式表一拋物線。透過這種分析可知行星及彗星的路線皆為圓錐曲線。

24. 對上題中的方程式, 由變換為直角坐標方程式證明若 $a > b$ 表一橢圓, 若 $a < b$ 表一雙曲線。

25. 一曲線的 r 與其切線間之角 ϕ 為 $\tan \phi = r / (dr/d\theta)$ 。

求曲線 $r = \sin (\theta/2)$ 在 $\theta = \pi/2$ 處 r 與切線間之角。

第十一章 經驗曲線的配合

11-1 頻率分配與集中趨勢的量數

吾人的所知多數是或然的知識。在建立任何方面的知識中要接受某些基本概念視為真實而不作完全的證明。這些情形也存在於數學，如同其他知識範圍中一樣。例如在數學裏，點、線、全部大於其部份、相似公理、不能定義的量，等觀念都用作以後結論的基礎。在數學裏不經證明而被接受的概念通常是那些不可能想像其為錯誤者（雖然有的數學系統裏某些公設不能適用）。定義係基於與一組公設相容的一些性質。在其他學科內，可能僅作有限回數的觀察並藉這些結果來推斷未來的情形。例如物理的研究中就是如此。剖視物理學的歷史，某些觀念一度曾信其為真以後又被證明為誤。但，在推展新理論的過程中我們可學習到更多事項。

本章中將簡述分析經驗數據的方法。將介紹初等統計中的少數基本概念，主要目標為導出曲線方程式以配合已知的經驗數據。如此的方程式決定一個在實驗的各變數間之基本關係，且由此就可能推展及準備以後的實驗。亦將指出：經濟學家如何得到獲利與銷售間的關係式；生物學家如何求得細菌數目與時間的關係式；心理學家如何求記得住資料的百分數與時間的關係式。在以前章節內例題與習題中已用過這些方程式，現在能指示如何獲得這些方程式。開始先述用表列出數據及以圖形表示數據的基本方法。

當欲敘述圓的面積與其半徑的關係時，寫出 $A = \pi r^2$ ，我們知道這關係對所有的圓皆為正確。當一心理學家欲求對一特殊刺激各人的反應時間，並不能簡單的寫出反應時間與刺激強度間的關係方程式，因為一個人的反應時間與其年齡、健康情形、刺激的試驗次數、以及其他

可能的變化都有關。因之欲求對一已知其強度的刺激的反應時間必須試驗許多人。他將可能發現多數人的反應時間幾近於相同，但也有些不同，而且也許偶而某人或其他人會有很大的差異。由其來源的特性所可能獲致的任何結論都將產生反應時間的或然知識。

在本節及本章其餘各節中，將進行討論表列並分析這種統計資料。在收集資料後首先要做的是把它列成便利形式的表。

常會有量度的數目太大以致不便於列出各量度所發生的次數。所以把各量度的值集在若干個範圍內，並計算在每一範圍內的值的次數。這就稱為**頻率分配**(或**次數分配**)，定義為一(各值的)組與此組中發生的次數的結合。

例 A. 某一數學課程有 80 個學生選修。經全部測驗及考試後的記錄，授課教師求得每一學生的平均成績(以 100 分為基礎)。下表為各成績及每一個成績的學生數。

22—1	66—1	82—4
37—1	67—5	84—1
40—2	68—2	85—1
44—1	70—2	86—3
47—1	71—4	87—2
53—1	72—3	88—1
55—3	74—5	90—2
56—1	75—4	92—1
60—3	77—7	93—2
61—1	78—4	95—1
63—4	79—1	97—1
65—2	81—2	

從表上可看出這是很難知道成績分配的情形。所以授課教師把成績集成若干區間，每一區間包含五個成績。如下表，

區 間	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59
人 數	1	0	0	1	3	1	1	4

區 間	60-64	65-69	70-74	75-79	80-84	85-89	90-94	94-99
人 數	8	10	14	16	7	7	5	2

在這一表中成績的分配情形可較清晰的看出。若將學生的成績只分爲 *A*、*B*、*C*、*D*、及 *F*、各等級：*F* 爲低於 60 分者，*D* 爲 60—69 者，*C* 爲 70—79 者，*B* 爲 80—89 者，*A* 爲 90—100 者，可得下表

等 級	A	B	C	D	F
人 數	7	14	30	18	11

因之可按字母所表等級而知分配情形。也可看得出，如果區間的數目再減少，則對這一班上成績的分配就不易獲得合理的結論。

正如圖形在表代數函數中非常有用，也是一個便利的方法用來表示頻率分配。有很多種用圖來表此類分配的有用方法，其中最重要者爲直方圖及頻率曲線。以下各例說明這些圖形表示法。

例 B. 直方圖係用矩形代表一組數據。每一矩形之寬度爲其所表區間的寬度，其高爲其在這一區間內值的數目。另外，通常用一個數，其最中間的值，來表示這區間。圖 11-1，圖 11-2 中的直方圖表例 A 的各組數據。

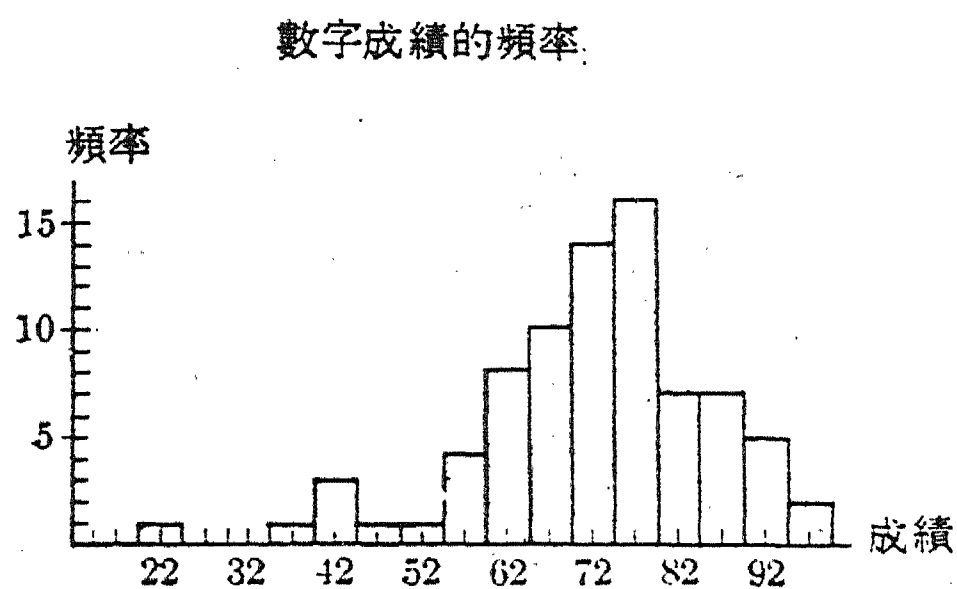


圖 11-1

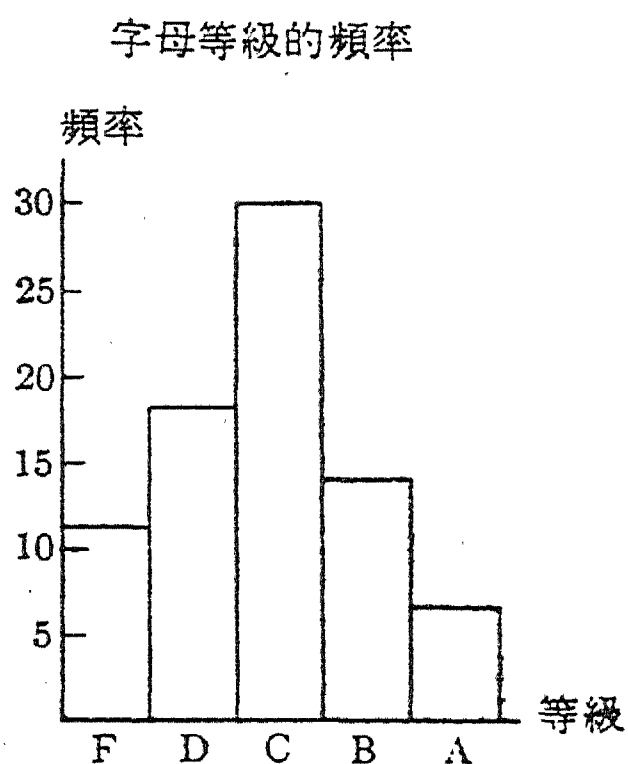


圖 11-2

例 C. 頻率曲線表一組數據, 以表示區間的值作為橫坐標(x 值), 在此區間內值的數目(即頻率)作為縱坐標(y 值)。若所得各點用直線線段連結, 則圖形稱為頻率多邊形。若各點用平滑曲線連結, 則圖形稱為頻率曲線。圖 11-3 與圖 11-4 表說明例 A 中數據的頻率多邊形與頻率曲線。

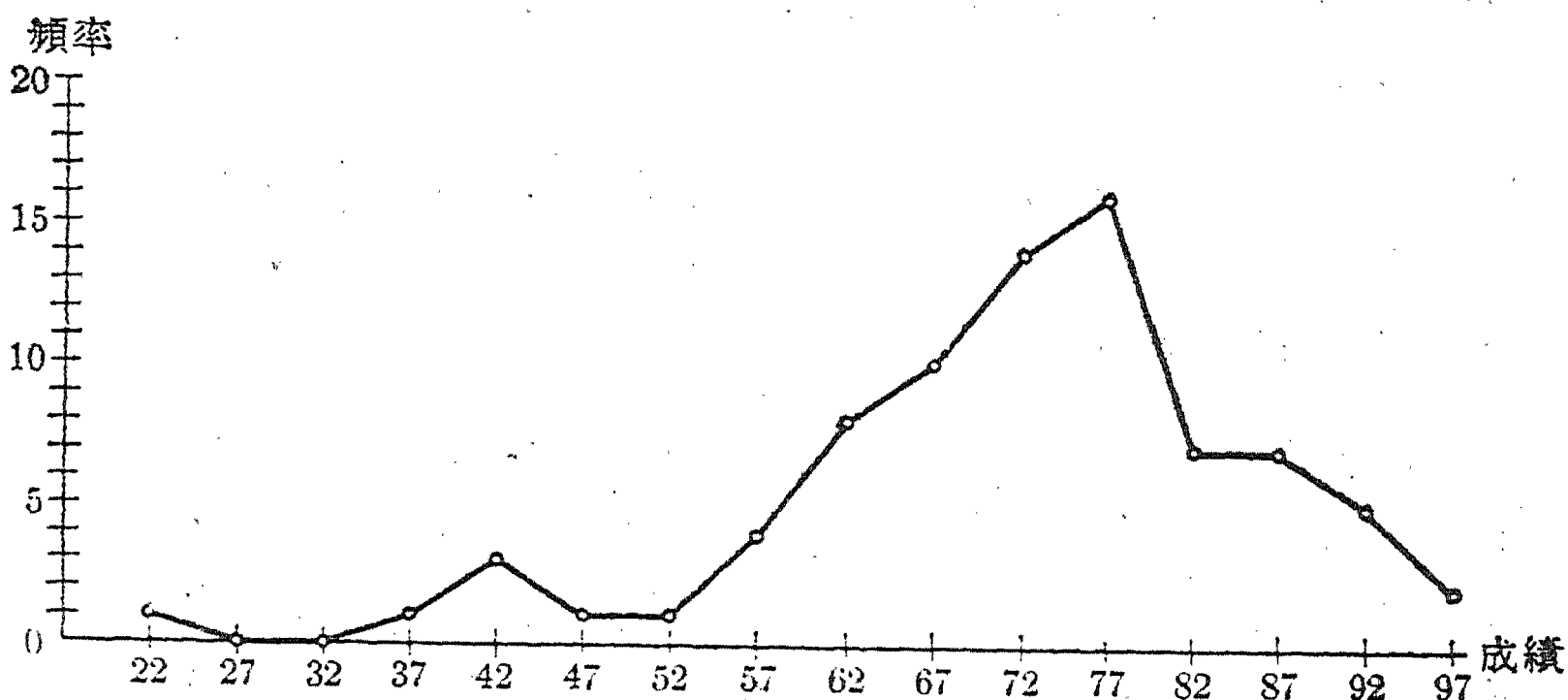


圖 11-3

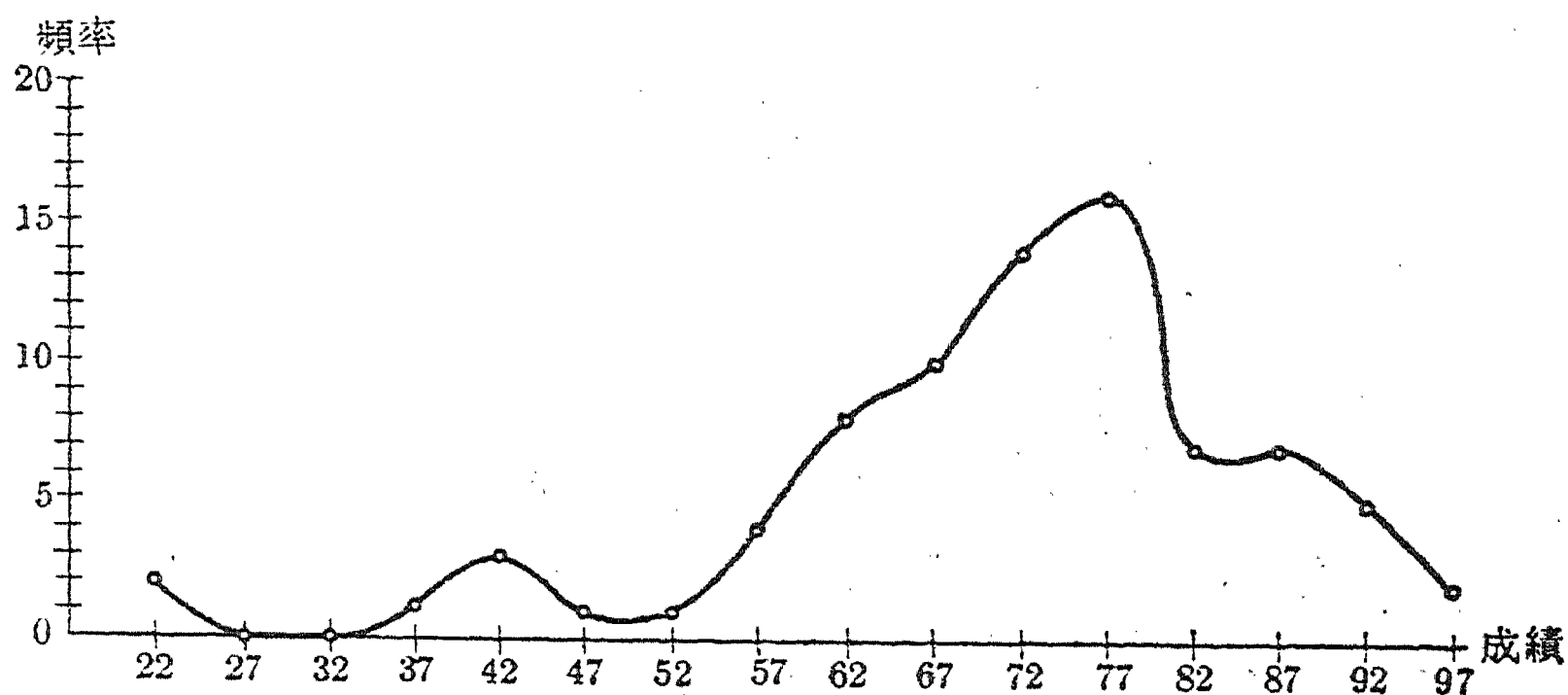


圖 11-4

用表及用圖的表示可得數據的一般描述法。但, 求出分配的中心位置的代價及其他各數目以獲知從這個中心值所生偏差的量數常為有益而便利。在這一方法中能獲得數據的算術描述。現即討論常用於度量分配的中心位置之值。這些值稱為“集中趨勢之量數”。

這些集中趨勢之量數的第一個為中位數。中位數為在中間位置的一數，在分配中高於及低於此數的數目相同。若沒有正中間位置的數，中位數為最接近分配的正中間位置的二數的平均值。

例 D. 5, 2, 6, 4, 7, 4, 7, 2, 8, 9, 4, 11, 9, 1, 3 各數，當依大小次序重排各數，中位數（中間位置的數）為 5。

例 E. 在例 A 成績的分配中其中位數為 74。共有 80 個成績若按成績次序列出則得在第 39 個到第 43 個都是 74，亦即第 40 個與第 41 個都是 74，第 40 個與第 41 個兩成績的平均數為中位數。因二數都是 74 故中位數也是 74。

另一個更為常用的集中趨勢量數為算術平均數。此係由各值之和除以各值的個數計算而得。若其中有些值不止出現一回則較易求。先將各值乘其出現的回數，然後相加，再除以各值的總個數即得此平均數。若各值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 分別出現 $f_1, f_2, \dots, f_n$ 回，則其算術平均值 $\bar{x}$ （讀作 x bar）為

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} \quad (11-1)$$

〔若寫為 $x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n = \sum_{i=1}^n x_i f_i$,
及 $f_1 + f_2 + \dots + f_n = \sum_{i=1}^n f_i$

可簡潔的表出 (11-1) 式。 Σ 係表示總和的記號。）
把 (11-1) 式及其意義與 (5-10) 式比較。

例 F. 例 D 中各數的算術平均數為

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 11 \cdot 1}{15} \\ &= \frac{82}{15} = 5.5. \end{aligned}$$

例 G. 例 A 中成績的算術平均數為

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{22 \cdot 1 + 37 \cdot 1 + 40 \cdot 2 + \cdots + 67 \cdot 5 + \cdots + 97 \cdot 1}{80} \\ &= \frac{5733}{80} = 71.7.\end{aligned}$$

習題

在 1 至 12 各題中，從已知各組數中求各指定的數。

A: 53, 54, 59, 57, 50, 53, 59;

B: 2, 5, 3, 8, 6, 7, 8, , 3, 4, 1, 9, 7, 5, 2, 1, 7, 5;

C: 36, 15, 22, 18, 35, 27, 43, 53, 26, 25, 30;

D: 11, 14, 17, 12, 15, 22, 23, 13, 14, 12, 17, 16, 14, 13, 20, 11, 22, 17, 14, 15.

1. *A* 組的中位數
2. *B* 組的中位數
3. *C* 組的中位數
4. *D* 組的中位數
5. *A* 組的平均數
6. *B* 組的平均數
7. *C* 組的平均數
8. *D* 組的平均數
9. 對 *A* 組，各區間 49-51, 52-54, …… 的頻率表。
10. 對 *B* 組，各區間 0-1, 2-3, …… 的頻率表。
11. 對 *C* 組，各區間 0-9, 10-19, …… 的頻率表。
12. 對 *D* 組，各區間 10-12, 13-15, …… 的頻率表。

在 13 至 16 各題中，對各題中的數據作直方圖。

13. 第 9 題
14. 第 10 題
15. 第 11 題
16. 第 12 題

在 17 至 20 各題中，對各題中的數據作頻率曲線。

17. 第 9 題
18. 第 10 題
19. 第 11 題
20. 第 12 題

21. 一製藥公司出產維他命丸。在廣告上宣稱每一丸至少含維他命 C 85mg。抽樣試驗其結果如下表。作這些數據的直方圖。（上行爲一丸中維他命 C 的 mg 數。）

mg.	83.0-83.9	84.0-84.9	85.0-85.9	86.0-86.9	87.0-87.9	88.0-88.9	89.0-89.9
丸 數	4	14	48	531	85	22	2

22. 作上題中數據的頻率多邊形。

23. 對一刺激的試驗獲知在各試驗對象，使其產生反應的最小強度分別為 3.44, 3.46, 3.39, 3.44, 3.48, 3.40, 3.29, 3.46, 3.41, 3.37, 3.45, 3.47, 3.43, 3.38, 3.50, 3.41, 3.42, 3.47。對各區間 3.25-3.29, 3.30-3.34, ……，作直方圖。

24. 上題中的數據，對各區間 3.21-3.30, 3.31-3.40, 3.41-3.50 作直方圖。

25. 求第 23 題中數據的中位數。

26. 求第 23 題中數據的平均數。

27. 以兩粒骰子擲 100 回，記錄每一回兩粒骰子所出現點子之和。作各和及其頻率的頻率多邊形。

28. 從報紙的經濟版所載各種股票的收盤價。以各區間 0-9, 10-19, …… (以元為單位)，作一頻率表。作這些數據的直方圖。並求其中位價格。

在 29, 30 二題中用下述資料。另一集中趨勢的量數為頻率分配的眾數，定義為有最大頻率的一數(若其存在)。一組數可以有一個以上的眾數。例如本習題第 1 題前所示的 A 組中的眾數為 53 與 59。

29. 求 B 組中的眾數。

30. 求 D 組中的眾數。

11-2 標準差

如上節所述，與集中趨勢量數相差之量數在分析統計數據中極為重要。本節中所述相差之量數稱為標準差。標準差越大，數據之值變離算術平均數越多。變離的總量可預期依所論數據的性質而定。

一組數的標準差為

$$s = \sqrt{(x - \bar{x})^2}. \quad (11-2)$$

由 s 的定義知計算其值要取下列各步驟：(1) 求此組數的算術平均數 $\bar{x}$, (2) 此組數的每一數減去此平均數, (3) 將以上所得之各差平方, (4) 求這些平方數的算術平均數, (5) 求此最後所得算術平均數的平方根。由定義, s 必為正數, 並因之表與平均數之差, 與每個數較平均數大或小無關。

例 A. 求 1, 5, 4, 2, 6, 2, 1, 1, 5, 3 一組數的標準差。

效率的方法為列表以進行上述(1)至(4)各步驟。

x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
1	-2	4
5	2	4
4	1	1
2	-1	1
6	3	9
2	-1	1
1	-2	4
1	-2	4
5	2	4
3	0	0
30		32

$$\bar{x} = \frac{30}{10} = 3,$$

$$\overline{(x - \bar{x})^2} = \frac{32}{10} = 3.2,$$

$$s = \sqrt{3.2} = 1.8.$$

由此例可知若有很多的數, 且若 $\bar{x}$ 為有小數的形式, 則計算非常繁長。下法可減少計算工作: 在 s 的定義的根號內用代數方法作適當的改變。

欲求兩組數 x_i 及 y_i 之和的平均數, 可求各 x 的平均數及各 y 的平均數相加之。亦即

$$\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}. \quad (11-3)$$

由算術平均數的定義可證明其為真。

$$\overline{x + y} = \frac{(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_n + y_n)}{n}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \\
 &= \bar{x} + \bar{y}.
 \end{aligned}$$

若所有各數均含有一常數因數，當求平均值時此因數可先提出再求其平均數。亦即，

$$\overline{kx} = k\bar{x}. \quad (11-4)$$

若把 (11-2) 式根號內的數乘開，然後用 (11-3) 式，則得

$$\overline{x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2} = \overline{x^2} - \overline{2x\bar{x}} + \overline{\bar{x}^2}.$$

對任何已知問題，此式中的 2 與 $\bar{x}$ 皆為常數。用 (11-4) 式，得

$$\overline{x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2} = \overline{x^2} - 2\bar{x}(\bar{x}) + \bar{x}^2(1) = \overline{x^2} - \bar{x}^2.$$

將此結果代入 (11-2) 式，得

$$s = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (11-5)$$

(11-5) 式指出，先求各 x 平方的平均數減去 $\bar{x}$ 的平方然後求其差的平方根即得標準差。如此可省去原定義中從每一個 x 減去 $\bar{x}$ 的步驟。

例 B. 用 (11-5) 式，求例 A 中各數的 s 。

列一個表仍是最便利的途徑。

x	x^2
1	1
5	25
4	16
2	4
6	36
2	4
1	1
1	1
5	25
3	9
30	122

$$\bar{x} = \frac{30}{10} = 3, \quad \bar{x}^2 = 9,$$

$$\overline{x^2} = \frac{122}{10} = 12.2,$$

$$\overline{x^2} - \bar{x}^2 = 12.2 - 9 = 3.2,$$

$$s = \sqrt{3.2} = 1.8.$$

例 C. 在良好的控制情況下，一心理學研究者測度一百個對象對一特殊刺激的各反應時間。各反應時間，準確到百分之一秒，示於下表中。計算這些反應時間的標準差。

T, sec	f	fT	fT^2	
0.200	1	0.200	0.0400	
0.210	3	0.630	0.1323	$\bar{T} = \frac{\sum fT}{\sum f} = \frac{24.73}{100} = 0.2473,$
0.220	5	1.100	0.2420	$\bar{T}^2 = 0.06116,$
0.230	10	2.300	0.5290	$\bar{T}^2 = \frac{\sum fT^2}{\sum f} = \frac{6.142}{100} = 0.06142,$
0.240	17	4.080	0.9792	$\bar{T} - \bar{T}^2 = 0.00026,$
0.250	40	10.000	2.5000	$s = \sqrt{0.00026} = 0.016.$
0.260	13	3.380	0.8788	
0.270	6	1.620	0.4374	
0.280	3	0.840	0.2352	
0.290	2	0.580	0.1682	
	<u>100</u>	<u>24.730</u>	<u>6.1421</u>	

反應時間的算術平均數為 0.2473 秒，標準差為 0.016 秒。在計算中要多求一位小數。

例 D. 求 11-1 節例 A 中成績的標準差。

用集於 20-24, 25-29, ……各區間的頻率分配，並假設在區間中的每一值都等於此區間的代表值（中間位置值）。（此法並不精確，但當一問題包含很多的值時，此法可得標準差的非常好的近似值而省却很多計算工作。）

x	f	fx	fx^2
22	1	22	484
27	0	0	0
32	0	0	0
37	1	37	1,370
42	3	126	5,290
47	1	47	2,210
52	1	52	2,700
57	4	228	13,000
62	8	496	30,800
67	10	670	44,900
72	14	1,008	72,600
77	16	1,232	94,900
82	7	574	47,100
87	7	609	53,000
92	5	460	42,300
97	2	194	18,800
	80	5,755	429,500

$$\bar{x} = \frac{\sum f}{\sum f} = \frac{5,755}{80} = 71.9,$$

$$\bar{x}^2 = 5,170,$$

$$\overline{x^2} = \frac{\sum fx^2}{80} = \frac{429,500}{80} = 5,370,$$

$$\overline{x^2} - \bar{x}^2 = 200,$$

$$s = \sqrt{200} = 14.$$

(s 之值準確到兩位有效數字, 乃因在此計算中 200 只有兩位有效數字。)

在理論中, 各值約有 68%, 在 $\bar{x} - s$ 到 $\bar{x} + s$ 之間, 此即標準差的意義。為導出常態分配曲線的基礎的一部份。這一曲線 (看圖 11-5) 供給關於算術平均數的理論分配。在常態分配曲線較完全的討論中, 可證明其理論方程式為

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (11-6)$$

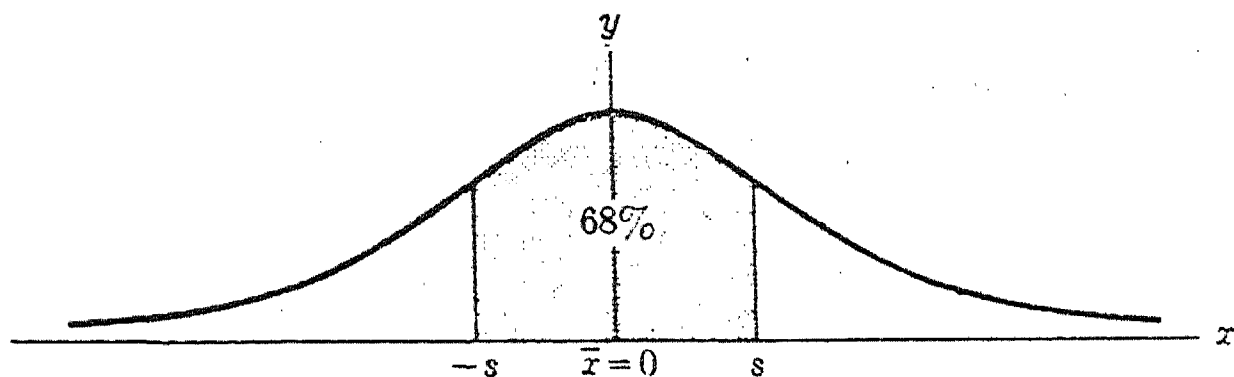


圖 11-5

在例 *D* 中 80 個值中有 59 個 (74%) 為從 58 到 86, 這是 $\bar{x}-s$ 到 $\bar{x}+s$ 的範圍。此意為在平均數附近的值 (有 74%) 比其在理論上的標準分配中的 (68%) 為多。

習題

在 1 至 6 各題中, 用 (11-2) 式對下列在 11-1 節習題中的各組數求 s 。

- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| 1. <i>A</i> 組 | 2. <i>B</i> 組 | 3. <i>C</i> 組 |
| 4. <i>D</i> 組 | 5. 第 21 題 | 6. 第 23 題 |

在 7 至 12 各題中, 用 (11-5) 式對下列在 11-1 節習題中的各組數求 s 。

- | | | |
|----------------|---------------|---------------|
| 7. <i>A</i> 組 | 8. <i>B</i> 組 | 9. <i>C</i> 組 |
| 10. <i>D</i> 組 | 11. 第 21 題 | 12. 第 23 題 |

在 13 至 16 各題中, 對下列在 11-1 節習題中的各組數求在 $\bar{x}-s$ 到 $\bar{x}+s$ 的範圍之數的百分數。

- | | | | |
|----------------|----------------|----------------|------------|
| 13. <i>A</i> 組 | 14. <i>B</i> 組 | 15. <i>D</i> 組 | 16. 第 23 題 |
|----------------|----------------|----------------|------------|

11-3 一組點的直線配合

以上曾述處理一個變數的統計方法。前已討論有關一個變數的列表、作圖、度量集中趨勢及與此值之差等各方法。現將討論如何獲得已知其一組值的兩個變數間的關係。

在本節中將指示求一直線以“配合”已知的一組點的方法。在下一節中將討論求適當的非線性的曲線以配合一組點。何以要如此做的一些理由為：(1) 獲得表變數間的一個簡潔的關係，(2) 利用此方程式以指示某些基本的結果，(3) 決定某些組數據的可靠性，(4) 用數據於試驗理論上的觀念。

本章中此後的例題及習題中假定在變數之間有某種關係。當對變數分析統計時可想見變數間常會存在一種關係，其各點分散得不能想

像其可能有函數關係。變數的這種結合此處不討論。

例 A. 11-1 節例 A 中所有選修數學課程的學生，舉行一個數學的入學測驗。為研究這次測驗的可靠性，教師把 10 個學生(隨意選出)的分數(40 分為基礎)與其課程成績的平均數列成表，並作一圖。表中及圖中： t 表入學測驗分數， a 表課程的平均成績。

學 生	t	a
A	29	63
B	33	88
C	22	77
D	17	67
E	26	70
F	37	93
G	30	72
H	32	81
I	23	47
J	30	74

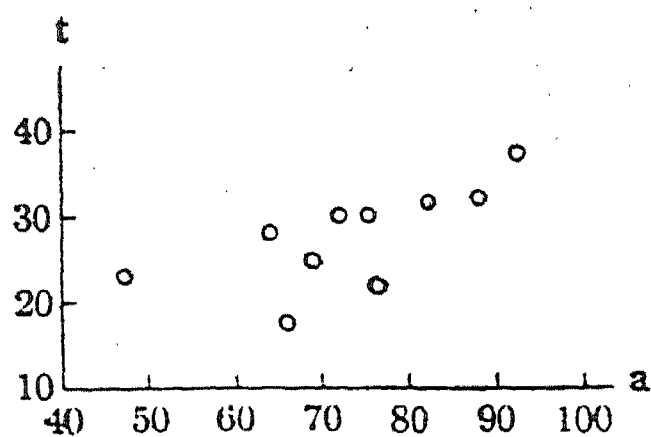


圖 11-6

現問測驗分數與課程成績之間是否有函數關係存在。當然沒有明顯的關係存在，但一般的可看出測驗分數高者其課程成績也高。由此可知可能有某一直線，各點不會變離此直線太多。若能求出這一直線，則可作為預測學生修習此課程可能成績的基礎。假設這一直線存在，問題在如何求得這直線的方程式。圖 11-7 指示兩條這種可能的直線。

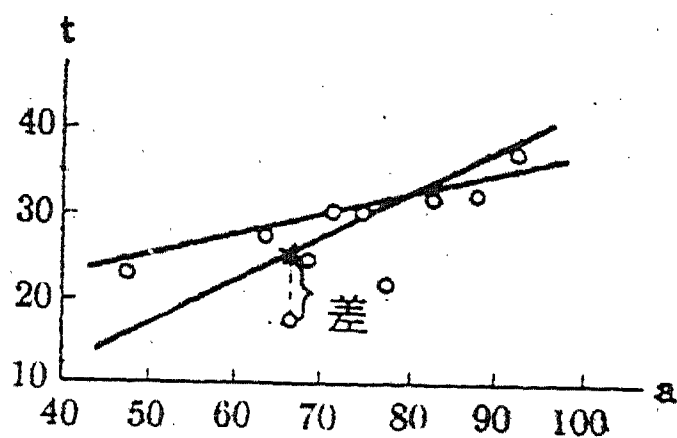


圖 11-7

有好幾種方法來決定最配合已知各點的直線。應用最廣的為最小二乘法。這方法的基本原理是求各點離此最佳直線（根據此法而獲得者）之差的平方和為最小。所謂“差”，意指對 x 的一特殊值，線上的 y 值與此點的 y 值（原始數據）之差。

例 B. 在圖 11-7 中示出一點的差。(67, 17) 點 (例 A 中 D 生) 與圖 11-7 作出的直線之差為 8。此差的平方為 64。最小二乘法係要求所有這些差的平方和為最小藉以決定最配合的直線。

所以，用此法時，必須用一直線方程式及數據各點的坐標。求出其差並平方之。此法中的問題為求直線方程式 $y = mx + b$ 中的常數 m 與 b 使這些平方為最小。下例指出此法的運用並為對求 m 與 b (以決定直線方程式) 的基本方法。

例 C. 已知 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 各點，求方程式

$$y = mx + b.$$

中的 m 與 b 使其差之平方和為最小。

各差為

$$d_1 = y_1 - (mx_1 + b),$$

$$d_2 = y_2 - (mx_2 + b),$$

$$d_3 = y_3 - (mx_3 + b).$$

平方以上三式的每一式並求各平方之和，得

$$\begin{aligned} S = & y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + m^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 3b^2 \\ & - 2m(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) - 2b(y_1 + y_2 + y_3) + 2mb(x_1 + x_2 + x_3). \end{aligned}$$

需要 S 對於 m 及對於 b 為最小。故為 9-4 節的極大極小問題。求 S 對 m 及對 b 的偏導數，令二者皆等於零，並聯立解出其結果：

$$\frac{\partial S}{\partial m} = 2m(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + 2b(x_1 + x_2 + x_3),$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 6b - 2(y_1 + y_2 + y_3) + 2m(x_1 + x_2 + x_3).$$

令第二式爲零, 解出 b , 得

$$b = \frac{(y_1 + y_2 + y_3) - m(x_1 + x_2 + x_3)}{3}.$$

可寫爲

$$b = \bar{y} - m\bar{x}, \quad (1)$$

其中 $\bar{y}$ 與 $\bar{x}$ 爲已知各點坐標的算術平均數。

$$\text{令 } \frac{\partial S}{\partial m} = 0, \text{ 得}$$

$$m(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) - b(x_1 + x_2 + x_3).$$

以 3 除此式, 得

$$m\bar{x}^2 = \overline{xy} - b\bar{x}, \quad (2)$$

其中 $\bar{x}^2$ 與 $\overline{xy}$ 爲已知點坐標的相當的算術平均數。

將(1)式中的 b 代入(2)式, 得

$$m\bar{x}^2 = \overline{xy} - (\bar{y} - m\bar{x})\bar{x},$$

故

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\bar{x}^2 - \bar{x}^2}. \quad (3)$$

計算各適當的算術平均數, 當已知實際數值時, “最小二乘”直線的 m 與 b 值就可求得。

推廣例 C, 並用(11-5)式, 即得“最小二乘”直線的 m 與 b 之一般式爲

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{s_x^2}. \quad (11-7)$$

$$b = \bar{y} - m\bar{x}. \quad (11-8)$$

其中 s_x 爲 x 值的標準差。對一組已知點計算 m 與 b 並代入直線方程式

$$y = mx + b. \quad (11-9)$$

即得最小二乘直線的方程式。

例 D. 由例 A 的數據, 求最小二乘直線。

此處的 y 值為入學測驗的分數, x 值為課程平均成績。最好如下表列出各必須的量以求其結果。

x	y	xy	x^2	
63	29	1,830	3,970	$\bar{x} = \frac{732}{10} = 73.2, \quad \bar{x}^2 = 5358,$
88	33	2,900	7,740	$\bar{y} = \frac{279}{10} = 27.9, \quad \bar{x}\bar{y} = 2040,$
77	22	1,690	5,930	$\overline{xy} = \frac{20,870}{10} = 2087,$
67	17	1,140	4,490	$\overline{x^2} = \frac{55,110}{10} = 5511,$
70	26	1,820	4,900	$s_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 153$
93	37	3,440	8,650	$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{s_x^2} = \frac{2087 - 2040}{153}$
72	30	2,160	5,180	$= \frac{47}{153} = 0.307,$
81	32	2,590	6,560	
47	23	1,080	2,210	
74	30	2,220	5,480	
732	279	20,870	55,110	

$$b = \bar{y} - m\bar{x} = 27.9 - (0.307)(73.2) = 27.9 - 22.5 = 5.4;$$

$$y = 0.307x + 5.4$$

因之此直線的方程式為 $y = 0.307x + 5.4$ 。此為圖 11-8 中所示之直線。

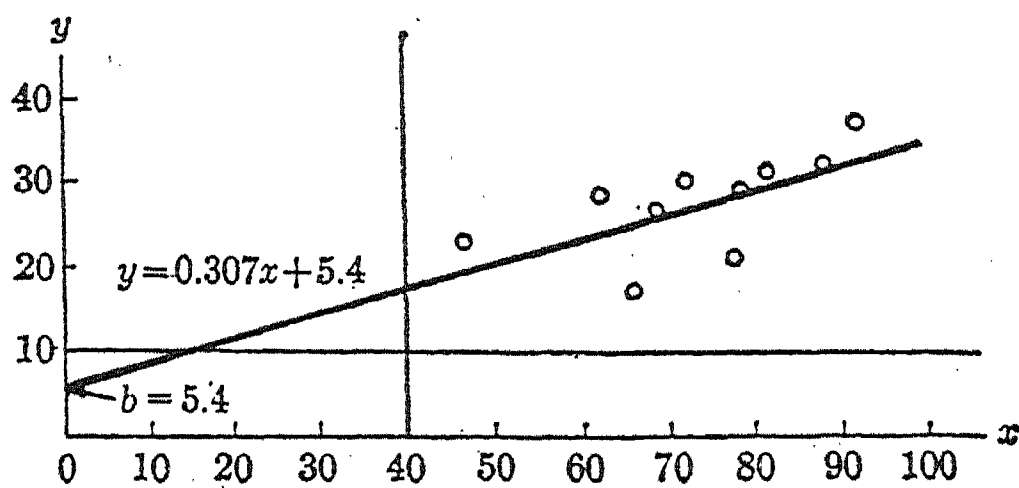


圖 11-8

註 1: 爲計算方便, 並保持圖形在原來的界限點之間。可將各 x 值減少 40, 各 y 值減少 10。這些值的原點爲圖 11-8 中二細線的交點。

註 2: 在作最小二乘直線時, 需要其上的二點。此二點爲 $(0, b)$ 與 $(\bar{x}, \bar{y})$ 。從 (11-8) 式即知 $(\bar{x}, \bar{y})$ 滿足此方程式。

例 E. 在一實驗中決定彈簧上負荷及彈簧長度間關係, 求得數據:

負荷 (lb)	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
長度 (in)	10.0	11.2	12.3	13.4	14.6	15.9

對這些數據求其最小二乘直線以表負荷爲長度的函數。

x	y	xy	x^2	$\bar{x} = \frac{15.0}{6} = 2.50, \quad \bar{x}^2 = 6.25,$
0.0	10.0	0.0	0.0	
1.0	11.2	11.2	1.0	$\bar{y} = \frac{77.4}{6} = 12.9, \quad \bar{x}\bar{y} = 32.25,$
2.0	12.3	24.6	4.0	$\overline{xy} = \frac{213.9}{6} = 35.65,$
3.0	13.4	40.2	9.0	$\overline{x^2} = \frac{55.0}{6} = 9.17,$
4.0	14.6	58.4	16.0	$s_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 9.17 - 6.25 = 2.92,$
5.0	15.9	79.5	25.0	
15.0	77.4	213.9	55.0	$m = \frac{35.65 - 32.25}{2.92} = 1.16, \quad b = 12.9 - (1.16)(2.50) = 10.0.$

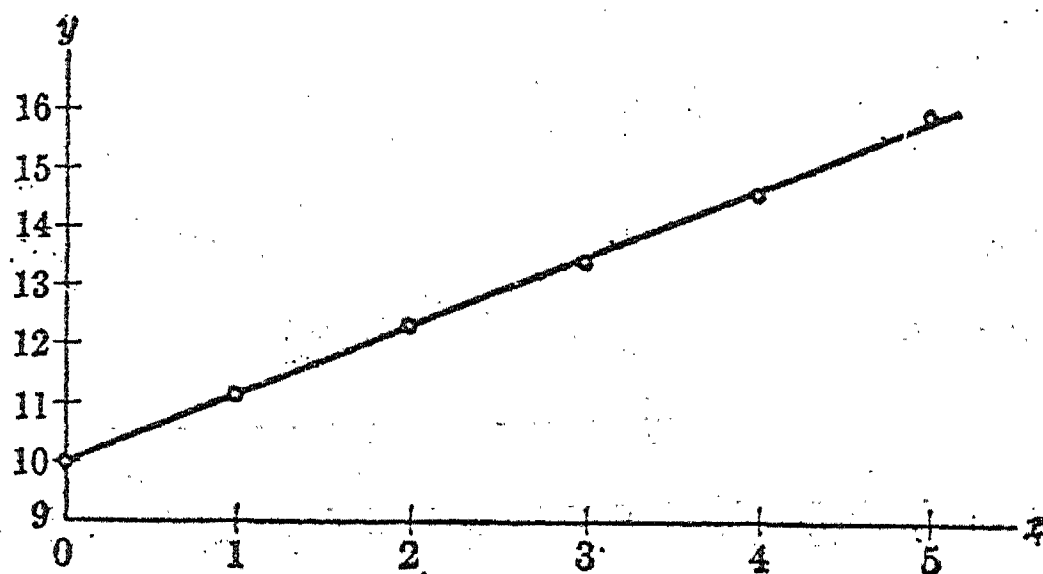


圖 11-9

所以,在此情形中最小二乘直線為

$$y = 1.16x + 10,$$

其中 y 為彈簧的長度及 x 為負荷。在圖 11-9 中直線為此最小二乘直線,而各點為實驗數據之點。

習題

在 1 至 8 各題中,對各已知數據求最小二乘直線的方程式。每一題中在同一圖上作出直線及數據各點。

1. 下表中各點:

x	4	6	8	10	12
y	1	4	5	8	9

2. 下表中各點:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	10	17	28	37	49	56	72

3. 下表中各點:

x	20	26	30	38	48	60
y	160	145	135	120	100	90

4. 下表中各點:

x	1	3	6	5	8	10	4	7	3	8
y	15	12	10	8	9	2	11	9	11	7

5. 一特殊肌肉作其收縮速度為作用力的函數之試驗,其結果為下表所列,求此函數。

速度 (ft/sec)	3.00	4.10	5.60	8.00	10.50
力 (lb)	15.0	10.8	9.30	3.55	4.60

6. 由使用電機儀器求得一落體每秒鐘的速度如下。求表速度為時間的函數。

速度 (cm/sec)	970	1950	2950	3940	4920	5890	6860
時間 (sec)	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00

7. 在一路上作交通觀測。用一電機儀器計數在六個月中通過此路的車輛數目。在每個月月底所記錄該月內車輛的數目為下表所列。求表 n 為 t 的函數。

n (千輛)	610	605	620	625	640	645
t (月)	1	2	3	4	5	6

8. 一公司的銷售量 (以千元為單位) 從 1960 到 1970 為下表所示, 求表 S 為 T 的函數, 其中 T 為 1960 年初以後的年數。

S (千元)	100	107	115	121	129	137
T (年)	1960	1962	1964	1966	1968	1970

相關的線性係數為兩變數間關係的一個量數, 定義為

$$r = m \frac{s_x}{s_y}.$$

由此定義, r 之值在 $-1 \leq r \leq 1$ 範圍內。若 r 接近 1, 相關為良好。對在 $-\frac{1}{2}$ 與 $+\frac{1}{2}$ 間的 r 值, 相關為不佳。若 r 接近 -1 , 則二變數稱為負相關; 亦即, 其一增加同時另一減少。

在 9 至 12 各題中, 對各組數據計算 r 。

9. 第 1 題

10. 第 2 題

11. 第 4 題

12. 例 A

11-4 數據的曲線配合

若實驗的各點不是呈現在同一直線上，而認為這些點係接近於某一其他型之曲線，最小二乘法亦可推廣用於這些曲線。例如，若這些點在一拋物線上，或能用函數 $y = a + bx^2$ 。欲用以上的方法，可將最小二乘直線擴展為

$$y = m[f(x)] + b. \quad (11-10)$$

此處，必須先計算 $f(x)$ ，然後此問題可視為最小二乘直線以求 m 與 b 之值。一些可以考慮使用的函數為 x^2 ， $1/x$ ，及 10^x 。

例 A. 對下表中各點求最小二乘曲線 $y = mx^2 + b$ 。

y	1	5	12	24	53	76
x	0	1	2	3	4	5

為計算便利將必需的數量列表如下。

x	y	$f(x) = x^2$	yx^2	$(x^2)^2$	
0	1	0	0	0	$\overline{x^2} = \frac{55}{6} = 9.17, \quad \overline{x^2}^2 = 84.1,$
1	5	1	5	1	$\bar{y} = \frac{171}{6} = 28.5, \quad \overline{x^2 y} = 261,$
2	12	4	48	16	$\overline{yx^2} = \frac{3017}{6} = 503,$
3	24	9	216	81	$\overline{(x^2)^2} = \frac{979}{6} = 163.2,$
4	53	16	848	256	$s^2_{(x^2)} = 163.2 - 84.1 = 79.1,$
5	76	25	1900	625	
	171	55	3017	979	
$m = \frac{503 - 261}{79.1} = \frac{242}{79.1} = 3.06,$					$b = 28.5 - (3.06)(9.17) = 0.40.$

故所求的方程式為 $y = 3.06x^2 + 0.40$ 。此方程式的圖形及數據各點示於圖 11-10 中。

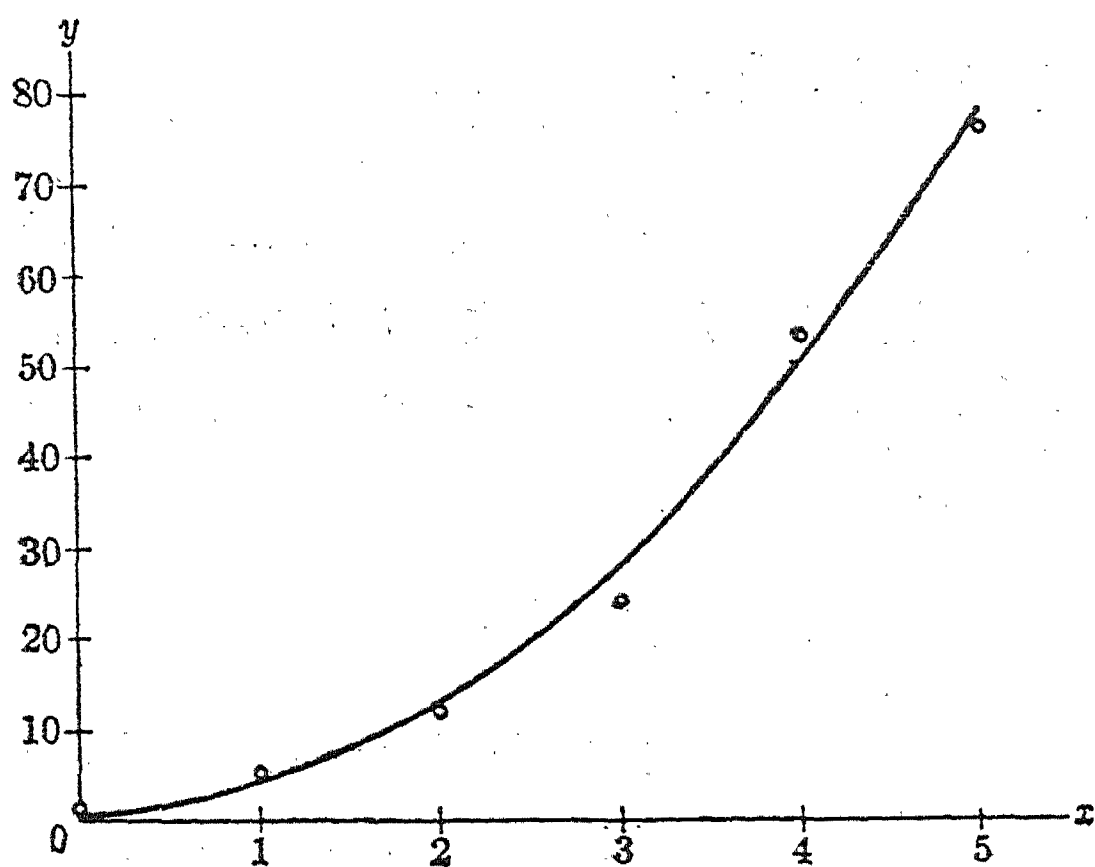


圖 11-10

例 B. 為試驗一殺蟲劑的效力，用一些蟲做試驗。殘存蟲的百分數為時間的函數。當作出各點時（看圖 11-11）可看出其接近於雙曲線 $y=c/x$ （對於 $T>20$ 秒）。求近似於此雙曲線的最小二乘雙曲線 $[y=m(1/x)+b]$ 。

P	T, sec	$x(=T)$	$y(=P)$	$f(x)=1/x$	$y(1/x)$	$(1/x)^2$
90	21	21	90	0.0476	4.29	0.00227
75	25	25	75	0.0400	3.00	0.00160
61	32	32	61	0.0313	1.92	0.00098
45	41	41	45	0.0244	1.10	0.00059
32	60	60	32	0.0167	0.53	0.00028
			303	0.1600	10.84	0.00572

$$\overline{\frac{1}{x}} = 0.0320,$$

$$\overline{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 0.00102,$$

$$\bar{y} = 60.6,$$

$$\overline{\frac{1}{x}} \bar{y} = 1.94,$$

$$\overline{y\left(\frac{1}{x}\right)} = 2.17,$$

$$\overline{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 0.00115,$$

$$s^2_{(1/x)} = 0.00115 - 0.00102 = 0.00013,$$

$$m = \frac{2.17 - 1.94}{0.00013} = 1770, \quad b = 60.6 - 1770(0.032) = 4.0.$$

因之此雙曲線 $y = m(1/x) + b$ 的方程式為 $y = 1770/x + 4$ 。此雙曲線之圖及表數據的各點皆示於圖 11-12 中。

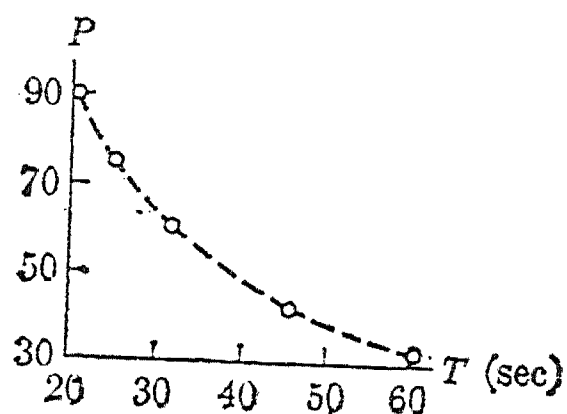


圖 11-11

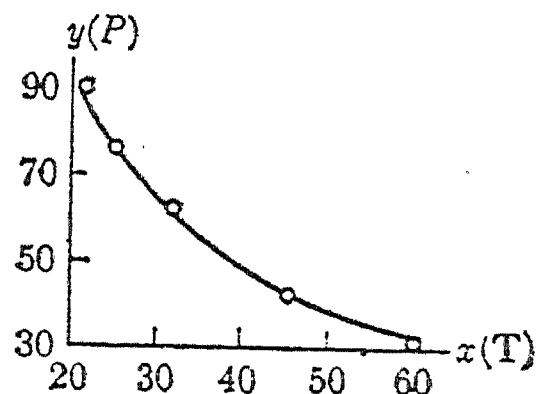


圖 11-12

例 C. 某公司在 1960-1965 期間的銷售為下表所示。對此數據配合一形式為 $y = me^{0.1x} + b$ 的曲線。令 x 為從 1960 起的年數 y 為銷售的千元數。

銷售(千元)	20.0	22.2	24.4	27.0	30.0	33.0
年 度	1960	1961	1962	1963	1964	1965

x	y	$f(x) = e^{0.1x}$	$ye^{0.1x}$	$(e^{0.1x})^2$	
0	20.0	1.000	20.00	1.000	$\overline{e^{0.1x}} = 1.303,$
1	22.2	1.105	24.53	1.221	$(\overline{e^{0.1x}})^2 = 1.698,$
2	24.4	1.221	29.79	1.492	$\bar{y} = 26.1,$
3	27.0	1.350	36.45	1.822	$\overline{e^{0.1x}\bar{y}} = 34.01,$
4	30.0	1.492	44.76	2.226	$\overline{ye^{0.1x}} = 34.99,$
5	33.0	1.649	54.42	2.718	$(\overline{e^{0.1x}})^2 = 1.747,$
	156.6	7.817	209.95	10.479	$s^2_{e^{0.1x}} = 1.747 - 1.698$
					$= 0.049,$

$$m = \frac{34.99 - 34.01}{0.049} = \frac{0.98}{0.049} = 20.0,$$

$$b = 26.1 - (20.0)(1.303) = 26.1 - 26.1 = 0, \quad y = 20e^{0.1x}.$$

在圖 11-13 中為數據各點及 $y=20e^{0.1x}$ 之圖。

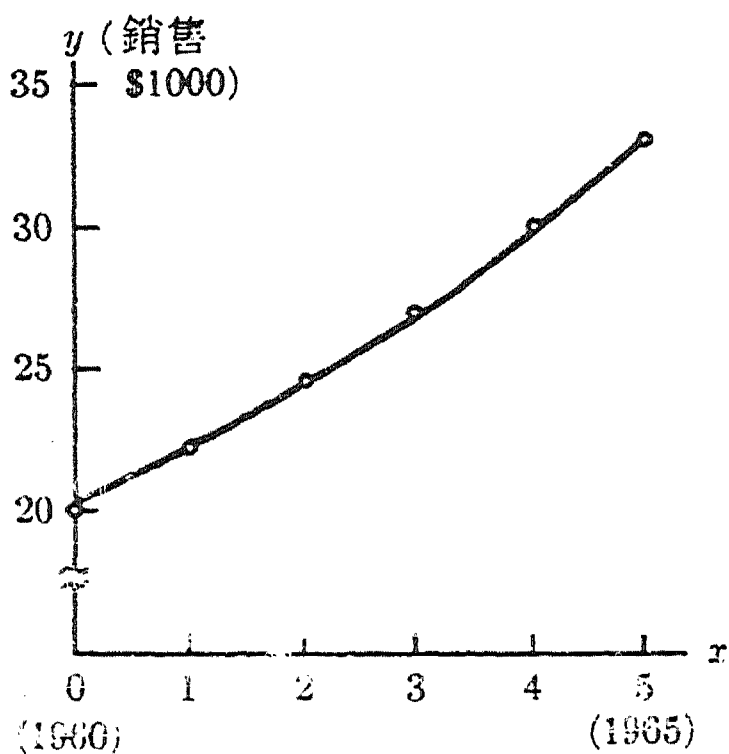


圖 11-13

習題

在下列各題中, 求指示的最小二乘曲線。在同一圖上作曲線之圖及數據各點。

1. 對下表中各點求最小二乘曲線 $y=mx^2+b$.

x	2	4	6	8	10
y	12	38	72	135	200

2. 對下表中各點求最小二乘曲線 $y=m\sqrt{x}+b$.

x	0	4	8	12	16
y	1	9	11	14	15

3. 對下表中各點求最小二乘曲線 $y=m(1/x)+b$.

x	1.10	2.45	4.04	5.86	6.90	8.54
y	9.85	4.50	2.90	1.75	1.48	1.30

4. 對下表中各點求最小二乘曲線 $y=m(10^x)+b$.

x	0.00	0.200	0.500	0.950	1.325
y	6.00	6.60	8.20	14.0	26.0

5. 下列數據為一物體於時間內在一斜面 t 上滾下的距離 y 。求其最小二乘曲線 $y = mt^2 + b$ 。

y (cm)	6.0	23	55	98	148
t (sec)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0

6. 下表指出細菌培養的重量為時間的函數。若 w 表重量 t 表時間, 對此數據求最小二乘曲線 $w = mt^2 + b$ 。

w (milligrams)	1.00	4.40	9.40	16.4	24.0
t (hours)	50.0	100	150	200	250

7. 用上題中的數據求最小二乘曲線 $y = m(10^z) + b$, 其中 $z = t/1000$ 。

8. 在學習率的研究中, 對一特殊科目正確回答一序列問題的題數為試驗次數的函數。如下表:

r (正確回答)	0	252	345	380	392
t (試驗)	0	20	40	60	80

對此數據求最小二乘曲線 $r = m(e^{-0.05t}) + b$ 。在計算中, 用自然對數。

9. 一公司估計每一產量單位的成本為產量單位數目的函數如下表所示。求最小二乘曲線 $c = m(1/\sqrt{n}) + b$ 。

c (元, 每單位成本)	490	360	250	200	170
n (單位數目)	1	2	4	6	9

10. 一擺錘距平衡位置的位移為時間的函數:

位移 (cm)	0.00	7.80	10.0	8.10	0.00
時間 (sec)	0.00	0.90	1.60	2.20	3.15

求形式為 $y = m(\sin x) + b$ 的最小二乘曲線, y 表位移及 x 表時間。

11-5 雜 題

在 1 至 4 各題中用下列的一組數: 2.3, 2.6, 4.2, 3.6, 3.5, 4.1, 4.8, 2.5, 3.0, 4.1, 3.8。

1. 求這組數的中位數。
2. 求這組數的算術平均數。
3. 求這組數的標準差。
4. 就 2.0-2.9, 3.0-3.9, 4.0-4.9 各區間作一頻率表。

在 5 至 8 各題中用下列資料: 一公司一年中每一個月收到定貨單的數目 (個位數四捨五入) 為 240, 280, 290, 260, 270, 260, 250, 270, 280, 260, 260, 250。

5. 求其算術平均數。
6. 求其中位數。
7. 求其標準差。
8. 作一直方圖。

在 9 至 16 各題中用下列資料: 一學校檢查其學生的缺課記錄。在 100 天中 (假期不在內) 不缺課學生的百分數 p 為下表中所示:

p	90	91	92	93	94	95	96
日 數	3	9	31	38	12	5	2

9. 求其算術平均數。
10. 求其中位數。
11. 求其標準差。
12. 作一頻率多邊形。

在 13 至 16 各題中用下列資料。

蓋氏計數器記錄高能核粒子之出現。即使在無放射源存在時仍記錄到相當數目的粒子。這些乃是由外太空來的高能粒子所產生的原宇宙射線。在一實驗中測量宇宙線幅射量係在 200 個 5 秒區間內記錄其計數。下表為所計數目與有此計數的 5 秒區間的個數。對此數據作一頻率曲線。

計 數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
區間數	3	10	25	45	29	39	26	11	7	2	3

13. 求中位數。 14. 求算術平均數。
15. 作一直方圖。 16. 作一頻率多邊形。

在 17 至 21 各題中求各最小二乘曲線。

17. 州政府的某一計劃，經每兩月一次的民意調查，其贊成者的百分數為該計劃公布後的時間之函數，如下表。

P (百分數)	25.0	26.8	28.9	31.2	32.8	34.7
T (月數)	0	2	4	6	8	10

對此數據求最小二乘直線，表 P 為 T 的函數。在同一圖上作此直線及數據。

18. 氯化鈉(食鹽)的溶解度(每 100 立方公分水中的公克數)為溫度($^{\circ}\text{C}$)的函數，如下表：

溶解度	35.7	36.0	36.6	37.3	38.4
溫度	0	20	40	60	80

對此數據求最小二乘直線。

19. 一電機設備記錄每 0.1 秒區間內一物體落下的距離。下表為所得數據。

距離	4.90	19.5	44.0	78.1	122.0
時間	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50

求形式為 $y = mx^2 + b$ 的最小二乘曲線，用 y 表距離及 x 表時間。

20. 擺的週期為其長度的函數，結果如下：

週期(秒)	1.10	1.90	2.50	2.90	3.30
長度(呎)	1.00	3.00	5.00	7.00	9.00

求形式為 $y = m\sqrt{x} + b$ 的最小二乘曲線表週期為長度的函數。

21. 咖啡的需求量與價格有關。每磅的價格與月銷售量示於下表：

P (元)	1.40	1.10	0.80	0.70	0.60
S (千磅)	240	305	420	480	560

對此數據求形式為 $P = m(1/S) + b$ 的最小二乘曲線。

第十二章 函數展為級數

12-1 麥克勞林級數

僅有少數特別角的三角函數能求得其確值。 e 之值只能求得小數形式的近似值。問題在如何可決定這些值，尤其在必須達到一指定的精確度時。本章中將示明如何將一已知函數用一多項式表示。一旦求出一近似於已知函數的多項式，就可計算此函數到任何所需的精確度。亦將述這些多項式的其他一些用途。

例 A. 用長除法，得

$$\frac{2}{2-x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}x\right)^{n-1} + \dots, \quad (1)$$

其中 n 為 (1) 式右邊的項數。因 x 表一數，(1) 式右邊成為一無限多項的幾何級數。

由代數學，一無限多項幾何級數之和為

$$S = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1. \quad (2)$$

其中 a 為其首項及 r 為相鄰各項的公比。

若 $x=1$ ，(1) 式右邊為

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots.$$

對於此級數， $r = \frac{1}{2}$ 及 $a=1$ ，亦即 $S=2$ 。若 $x=3$ ，(1) 式右邊為

$$1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \dots,$$

因 $r > 1$ 不能求得一有限值。再看(1)式當 $x=1$ 時左邊也等於 2。若 $x=3$, 左邊等於 -2 。因之, 可知對 $x=1$ (1) 式兩邊符合, 對 $x=3$ 不能得到相容的結果。事實上, 只要 $|x| < 2$, 兩邊之值相符合。由此可得結論爲: 只要 $|x| < 2$, (1) 式右邊多項式確表方程式左邊。

從上例, 一代數函數可用以下形式的函數表之,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots. \quad (12-1)$$

(12-1) 式稱爲函數 $f(x)$ 的**冪級數展式**。現在的問題爲是否一般函數都可用此形式表出。若此一表示法爲可能, 則可提供計算超越函數的方法以製作函數值表。又, 因冪級數展式係一多項式形式, 由於多項式的性質, 可使代數運算簡化。微積分的進一步研究顯示冪級數的許多其他應用。

以後除非另有聲明, 假定所涉及的函數在 x 值的指定範圍內都可以用冪級數展式表示 (用較高深的方法可證明通常是可能的), 在推展一般表示方法中微積分極爲有用。現寫出一普遍冪級數及其若干級導數,

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots + a_nx^n + \cdots, \\ f'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots, \\ f''(x) &= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + 3 \cdot 4a_4x^2 + 4 \cdot 5a_5x^3 + \cdots + (n-1)na_nx^{n-2} + \cdots, \\ f'''(x) &= 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4x + 3 \cdot 4 \cdot 5a_5x^2 + \cdots + (n-2)(n-1)na_nx^{n-3} + \cdots, \\ f^{iv}(x) &= 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5a_5x + \cdots + (n-3)(n-2)(n-1)na_nx^{n-4} + \cdots. \end{aligned}$$

對任一冪級數不論各常數 a_n 之值如何, 若 $x=0$, 左右兩邊必須相等, 右邊除首項外其他各項皆爲零。因之, 在以上各式中令 $x=0$, 可得

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0, & f'(0) &= a_1, & f''(0) &= 2a_2, \\ f'''(0) &= 2 \cdot 3a_3, & f^{iv}(0) &= 2 \cdot 3 \cdot 4a_4. \end{aligned}$$

解出各 a_n , 得

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0),$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \quad a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!}.$$

將這些值代入 $f(x)$ 之式中, 得

$$\begin{aligned} f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \cdots. \end{aligned} \quad (12-2)$$

(12-2) 式即為一函數的麥克勞林級數展式 (Maclaurin series expansion)。對一用麥克勞林展式表示的函數, 此函數及其所有導數在 $x=0$ 時必須存在。

以上曾引用階乘的記號 $n!$ 。由定義

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots(1), \quad (12-3)$$

例如, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ 。此一記號用於冪級數展式中頗為方便。在數學的其他方面也有用處。

例 B. 求 $f(x) = \frac{2}{2-x}$ 的麥克勞林級數展式的前四項。

$$f(x) = \frac{2}{2-x}, \quad f(0) = 1,$$

$$f'(x) = \frac{2}{(2-x)^2}, \quad f'(0) = \frac{1}{2},$$

$$f''(x) = \frac{4}{(2-x)^3}, \quad f''(0) = \frac{1}{2},$$

$$f'''(x) = \frac{12}{(2-x)^4}, \quad f'''(0) = \frac{3}{4},$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2!}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{x^3}{3!}\right) + \cdots$$

$$\frac{2}{2-x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \cdots$$

此結果與由直接除法所得者相符合。

例 C. 求 $f(x) = e^{-x}$ 的麥克勞林級數展式的前四項。

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x}, & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= -e^{-x}, & f'(0) &= -1, \\ f''(x) &= e^{-x}, & f''(0) &= 1, \\ f'''(x) &= -e^{-x}, & f'''(0) &= -1, \\ f(x) &= 1 + (-1)x + 1\left(\frac{x^2}{2!}\right) + (-1)\left(\frac{x^3}{3!}\right) + \cdots \\ e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots. \end{aligned}$$

例 D. 求 $f(x) = \sin 2x$ 的麥克勞林級數展式的前三個非零之項。

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin 2x, & f(0) &= 0, \\ f'(x) &= 2 \cos 2x, & f'(0) &= 2, \\ f''(x) &= -4 \sin 2x, & f''(0) &= 0, \\ f'''(x) &= -8 \cos 2x, & f'''(0) &= -8, \\ f^{iv}(x) &= 16 \sin 2x, & f^{iv}(0) &= 0, \\ f^v(x) &= 32 \cos 2x, & f^v(0) &= 32, \\ f(x) &= 0 + 2x + 0 + (-8)\frac{x^3}{3!} + 0 + 32\frac{x^5}{5!} + \cdots \\ \sin 2x &= 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 - \cdots. \end{aligned}$$

因每隔一項為負，此級數稱為交錯級數。

例 E. 求函數 $f(x) = xe^{2x}$ 的麥克勞林級數展式的前三個非零之項。

$$\begin{aligned} f(x) &= xe^{2x}, & f(0) &= 0, \\ f'(x) &= e^{2x}(1 + 2x), & f'(0) &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= e^{2x}(4+4x), & f''(0) &= 4, \\
 f'''(x) &= e^{2x}(12+8x), & f'''(0) &= 12, \\
 f(x) &= 0 + x + 4\left(\frac{x^2}{2!}\right) + 12\left(\frac{x^3}{3!}\right) + \cdots \\
 xe^{2x} &= x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots.
 \end{aligned}$$

習題

在 1 至 12 各題中, 求各函數的麥克勞林展式的前三個非零之項。

- | | |
|----------------------------|---------------------------------------|
| 1. $f(x) = e^x$ | 2. $f(x) = \sin x$ |
| 3. $f(x) = \cos x$ | 4. $f(x) = \ln(1+x)$ |
| 5. $f(x) = \sqrt{1+x}$ | 6. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^{1/3}}$ |
| 7. $f(x) = e^{-2x}$ | 8. $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ |
| 9. $f(x) = \cos 4x$ | 10. $f(x) = e^x \sin x$ |
| 11. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ | 12. $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ |

在 13 至 18 各題中, 求各函數的麥克勞林展式的前二個非零之項。

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------|
| 13. $f(x) = \operatorname{Arctan} x$ | 14. $f(x) = \cos x^2$ |
| 15. $f(x) = \tan x$ | 16. $f(x) = \sec x$ |
| 17. $f(x) = \ln \cos x$ | 18. $f(x) = e^{\sin x}$ |

19. 下列各函數何以不能求得麥克勞林展式?

(a) $f(x) = \csc x$ (b) $f(x) = \sqrt{x}$ (c) $f(x) = \ln x$

20. 由求麥克勞林展式, 證明

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

此級數稱為二項式級數, 並可證明對於任何 n 之值於 $|x| < 1$ 此一等式成立。

12-2 級數之運算

在上節習題的 1 至 4 各題中求出的級數特別重要。這些級數用來求指數函數、三角函數、及對數函數之值。亦可用來推展其他級數，現寫下這些級數以供參考：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \quad (12-4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \quad (12-5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \quad (12-6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots. \quad (12-7)$$

在下節中可看出如何應用這些級數來製作函數表。在本節中不僅可知應用以上各基本級數來推展新的級數，且可知級數的某些其他用途。

在第二章中討論函數時，曾約略提及如 $f(2x)$ 、 $f(x^2)$ 、及 $f(-x)$ 等函數。用此函數記號及上列各級數，可不必用直接展式而求得許多其他函數的級數展式。這可使在求一所需的級數中節省大量時間。以下各例說明級數對此目的之應用。

例 A. 求 e^{2x} 的麥克勞林展式。

由 (12-4) 式，知 e^x 的展式。設 $f(x) = e^x$ ，

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

因 $e^{2x} = f(2x)$ ，可得

$$f(2x) = 1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + \cdots.$$

例 B. 求 $\sin x^2$ 的麥克勞林展式。

由 (12-5) 式, 知 $\sin x$ 的展式, 設 $f(x) = \sin x$,

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

因 $\sin x^2 = f(x^2)$, 可得

$$f(x^2) = (x^2) - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^5}{5!} - \dots$$

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots$$

此級數的直接展式非常繁長。

現闡述在複數的推展中一個非常重要的結果。假設 e^x , $\sin x$, 及 $\cos x$ 的麥克勞林展式對複數也成立, 可得 ($i = \sqrt{-1}$)

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \dots, \quad (12-8)$$

$$i \sin \theta = i\theta - i\frac{\theta^3}{3!} + \dots, \quad (12-9)$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \dots \quad (12-10)$$

當將 (12-9) 式各項與 (12-10) 式各項相加時其結果為 (12-8) 式中的級數。因之

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (12-11)$$

一複數的直角坐標式為 $a + bi$ 。極式為 $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 極 (式或稱為三角式), 及指數式為 $re^{i\theta}$, 其中 $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ 。由這些定義及 (12-11) 式, 可知

$$a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}, \quad (12-12)$$

其中

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (12-13)$$

下例說明 (12-12) 式的應用, 有些應用留在習題中。

例 C. 表 $2e^{4.80i}$ 爲直角坐標式。

用 (12-12) 式, 得

$$2e^{4.80i} = 2(\cos 4.80 + i \sin 4.80).$$

因 $4.80 = 275^\circ$,

$$\begin{aligned} 2e^{4.80i} &= 2(\cos 275^\circ + i \sin 275^\circ) \\ &= 2(0.0872 - i 0.9962) \\ &= 0.1744 - 1.9924 i. \end{aligned}$$

再指出幕級數的另一應用。實用中有許多積分式無法用以前各章所示方法積分。但, 有些定積分欲求其極爲近似的結果幕級數非常有用。

例 D. 計算 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$.

用 $\sin x$ 的級數展式, 再每一項除以 x , 得

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \right) dx \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3(3!)} + \frac{x^5}{5(5!)} - \dots \right) \Big|_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3(6)} + \frac{1}{5(120)} - \dots. \end{aligned}$$

結合所示各值, 得 $1 - 0.05556 + 0.00166 = 0.9461$ 。可知所略去的每一項值都非常小。正確答案, 到四位小數, 爲 0.9461, 恰爲僅用 $\sin x$ 展式的前三項所得之值。

例 E. 計算 $\int_0^{0.1} e^{-x^2} dx$

$$e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \dots$$

因之

$$\begin{aligned} \int_0^{0.1} e^{-x^2} dx &= \int_0^{0.1} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \dots \right) dx \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \dots \right) \Big|_0^{0.1} \\ &= 0.1 - \frac{0.001}{3} + \frac{0.00001}{10} = 0.09967. \end{aligned}$$

現討論精確度的問題。以上計算的積分值指出所用項數越多結果的精確度也越大。爲了說明精確度，圖(12-1)中爲 $y = \sin x$ 之圖，及其三個近似函數

$$y = x, \quad y = x - \frac{x^3}{3!}, \quad y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

之圖。可知每多加一項，其結果更趨符合 $\sin x$ 。而且，亦指出級數展式意義的圖形表示法。

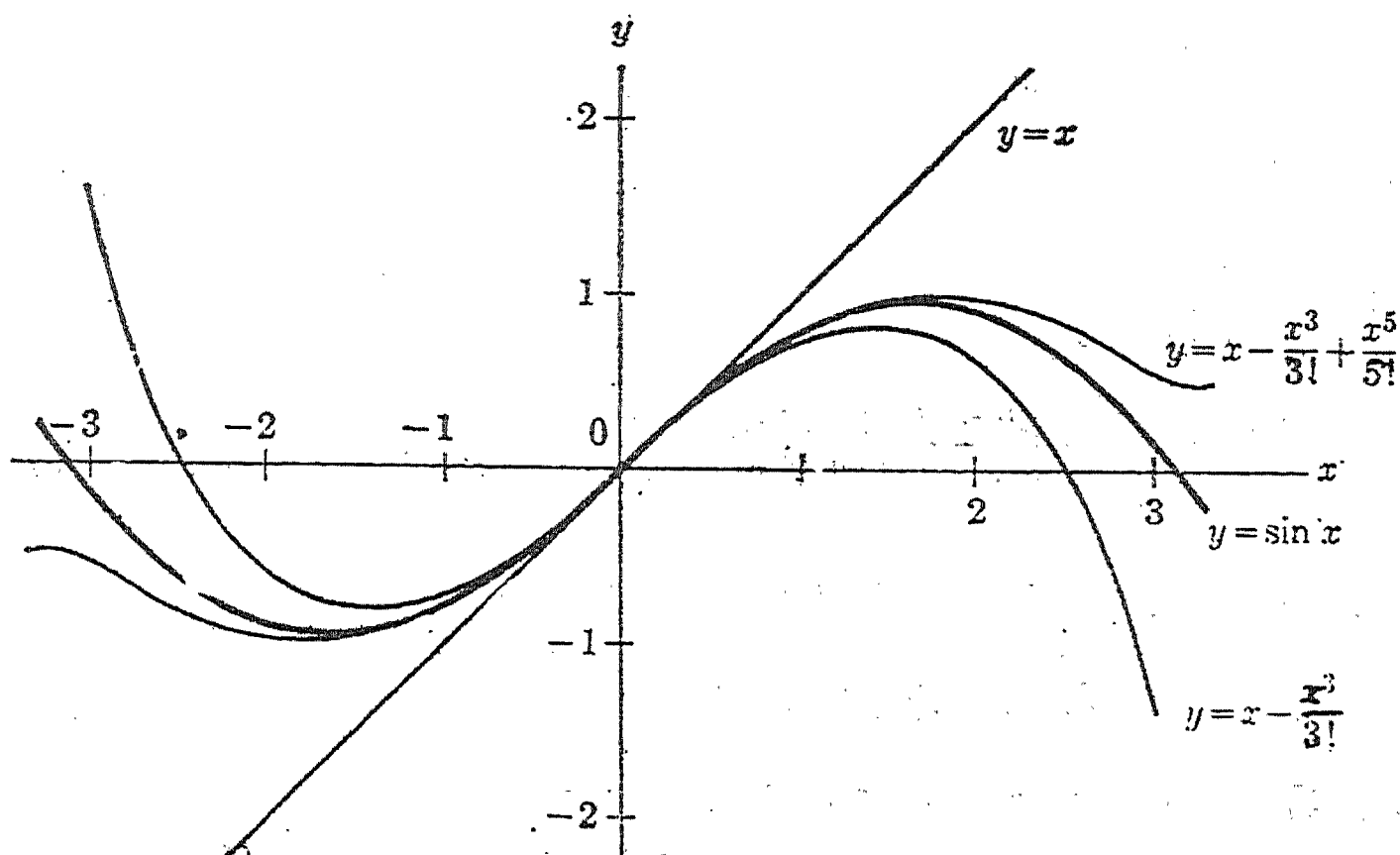


圖 12-1

以上已說明所包含的項數越多，結果越準確。對於小的 x 值，麥克

勞林級數只需少數幾項便能有良好的精確度。這種情形，稱為此級數迅速收斂。因為這理由，若用甚小的 x 值時麥克勞林級數特別有用。若用較大的 x 值，通常將函數展為泰勒級數（看 12-4 節）。當然，任何級數當略去以後的各項時，在計算中就有相當的誤差。

習題

在 1 至 8 各題中，用 (12-4) 至 (12-7) 各式求各函數的麥克勞林展式的前四個非零之項。

- | | |
|-------------------------------|-----------------------|
| 1. $f(x) = e^{3x}$ | 2. $f(x) = e^{-2x}$ |
| 3. $f(x) = \sin \frac{1}{2}x$ | 4. $f(x) = \sin x^4$ |
| 5. $f(x) = \cos 4x$ | 6. $f(x) = \cos 2x^3$ |
| 7. $f(x) = \ln(1+x^2)$ | 8. $f(x) = \ln(1-x)$ |

在 9 至 12 各題中，把各複數變為指定的形式。

- | | |
|------------------------|--|
| 9. $3e^{0.5i}$ (直角坐標式) | 10. $2(\cos 230^\circ + i \sin 230^\circ)$ (指數式) |
| 11. $6+i$ (極式) | 12. $-3+2i$ (指數式) |

在 13 至 16 各題中，由用適當級數的三項計算各積分之值。

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 13. $\int_0^1 \sin x^2 dx$ | 14. $\int_0^{0.1} \frac{e^x - 1}{x} dx$ |
| 15. $\int_0^{0.2} \cos \sqrt{x} dx$ | 16. $\int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x} dx$ |

17. 由適當的二級數之項相加求函數 $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ 展式的前四個非零之項。
18. 由將正確的二展式逐項相乘以求 $e^x \sin x$ 展式的前三項。
19. 證明由對 $\sin x$ 的展式逐項積分其結果為 $\cos x$ 的展式。
20. 證明由對 $\cos x$ 的展式逐項積分其結果為 $\sin x$ 的展式。
21. 求 $y = x^2 e^x$, $x = 0.2$, 與 x 軸所界的面積的近似值，用適當的麥克勞林級數的前三項。

22. 求 $y = e^{-x^2}$, $x=0$, $x=1$, 與 $y=0$ 所界的面積的近似值, 用適當的麥克勞林級數的前三項。

23. 用 (12-12) 式及指數律, 證明

$$(a+bi)^{1/n} = r^{1/n} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right)$$

24. 用上題中的等式, 求 1 的立方根。[提示: $1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ = \cos 360^\circ + i \sin 360^\circ = \cos 720^\circ + i \sin 720^\circ$ 。]

12-3 應用級數展式之計算

前曾提及, 冪級數展式可用來計算超越函數的數值。只要包含足夠項數可計算函數值到任何所需的精確度。透過這些計算就作成函數值表, 以及求出一些數如 e 及 π 之值。

例 A. 計算 $e^{0.1}$ 之值。

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

令 $x=0.1$ 。因之

$$e^{0.1} = 1 + 0.1 + \frac{(0.1)^2}{2} + \dots = 1.105 \quad (\text{用三項})$$

到五位數字, $e^{0.1} = 1.1052$, 可見以上答案準確到四位數字。

例 B. 計算 $\sin 2^\circ$ 之值。

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

令 $x = (\pi/90)$ 化為弧度。所以

$$\sin 2^\circ = \left(\frac{\pi}{90} \right) - \frac{(\pi/90)^3}{6} + \dots = 0.034907 - 0.000007 = 0.034900.$$

此結果準確到所示出的數字 (六位小數)。

例 C. 計算 $\ln(1.2)$ 之值。

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

令 $x=0.2$ 所以

$$\ln(1+0.2) = 0.2 - \frac{(0.2)^2}{2} + \frac{(0.2)^3}{3} - \dots = 0.183.$$

到四位數字, $\ln(1.2) = 0.1823$ 。要達到此精確度尚需再多取一項。

級數近似值法亦可用來求由於量度的誤差所致計算中產生的誤差。這種問題在微分的應用中討論過。用級數解答這類問題對誤差之計算可接近到任何程度。用微分時只能求出一項。當然, 多數情形一項就已足夠。下例說明級數在誤差計算中的應用。

例 D. 一物體落下 h 呎時的速度為 $v = 8\sqrt{h}$ 。一物體落下 100 呎而可能誤差為 2 呎, 求其速度的近似誤差。

若令 $v = \sqrt{100+x}$ 其中 x 為 h 的誤差, 可表 v 為 x 的麥克勞林級數:

$$\begin{aligned} f(x) &= 8(100+x)^{1/2}, & f(0) &= 80, \\ f'(x) &= 4(100+x)^{-1/2}, & f'(0) &= 0.4, \\ f''(x) &= -2(100+x)^{-3/2}, & f''(0) &= -0.002. \end{aligned}$$

所以

$$v = 8\sqrt{100+x} = 80 + 0.4x - 0.001x^2 - \dots$$

因 $x=0$ 時 v 計算而得的值為 80, v 的誤差 k 為

$$k = 0.4x - 0.001x^2 - \dots$$

對 $x=2$ 其誤差為

$$k = 0.4(2) - 0.001(4) = 0.8 - 0.004 = 0.796 \text{ (ft/sec)}.$$

用微分所求出的結果為 0.8, 多加的各項為對此項的修正。在此例中多

取了一項說明第一項是誤差的良好近似值。雖然此一問題可用數字計算，用級數解答對 x 的已知值比較易於計算此誤差。

例 E. 假設地球為一球形。半徑為 4000 哩，求一 2 哩長的切線末端距離地球表面多遠？

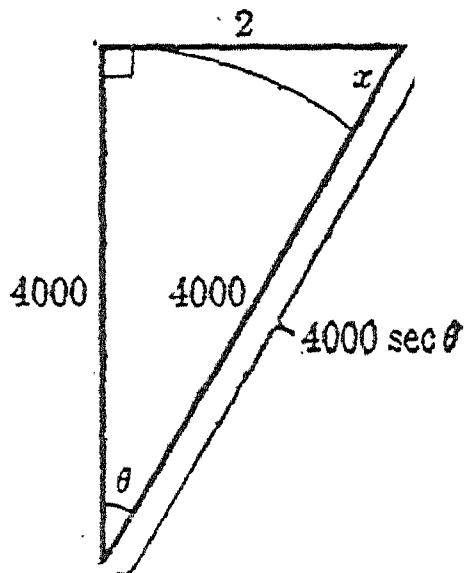


圖 12-2

由圖 12-2 可知

$$x = 4000 \sec \theta - 4000$$

求 $\sec \theta$ 之級數，

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sec \theta, & f(0) &= 1 \\ f'(\theta) &= \sec \theta \tan \theta, & f'(0) &= 0 \\ f''(\theta) &= \sec^3 \theta + \sec \theta \tan^2 \theta, & f''(0) &= 1. \end{aligned}$$

取到兩個非零項 $\sec \theta = 1 + \theta^2/2$ 。因之

$$x = 4000(\sec \theta - 1) = 4000\left(1 + \frac{\theta^2}{2} - 1\right) = 2000 \theta^2.$$

$\tan \theta$ 展式的前二項為 $\theta + \theta^3/3$ ，意即若 θ 值很小，如同在此情形，則 $\theta = \tan \theta$ 。由圖 12-2， $\tan \theta = \frac{2}{4000} = \frac{1}{2000}$ ，故 $\theta = \frac{1}{2000}$ 。將此值代入 x 的展式中，得

$$x = 2000\left(\frac{1}{2000}\right)^2 = \frac{1}{2000} = 0.0005 \text{ (哩)}.$$

意即 2 哩長與地球相切的直線其末端距地球表面約只 2.6 呎

習題

在 1 至 16 各題中, 計算各函數之值, 用適當級數中的指定項數。

- | | |
|---|--------------------------|
| 1. $e^{0.2}$ (3) | 2. $e^{-0.5}$ (3) |
| 3. $\sin(0.1)$ (2) | 4. $\sin 4^\circ$ (2) |
| 5. e (7) | 6. $\sqrt{e}$ (5) |
| 7. $\cos 3^\circ$ (2) | 8. $\cos(0.5^\circ)$ (2) |
| 9. $\ln(1.4)$ (4) | 10. $\ln(0.95)$ (4) |
| 11. $\sin 1$ (4) | 12. $\ln(0.5)$ (5) |
| 13. $\sqrt{1.1}$ (3) (用 $\sqrt{1+x}$ 的展式) | |
| 14. $\sqrt{0.8}$ (3) | 15. $\sqrt[3]{1.1}$ (3) |
| | 16. $\sqrt[3]{0.95}$ (3) |

在 17 至 20 各題中, 計算各值的極大誤差。若級數為交錯的 (每隔一項為負) 在計算之值中的極大可能誤差為略去的第一項之值。

- | | |
|-----------------|-----------------|
| 17. 第 2 題中求得之值。 | 18. 第 3 題中求得之值。 |
| 19. 第 8 題中求得之值。 | 20. 第 9 題中求得之值。 |
21. 一商店每日銷售 S 元與每日廣告支出間的關係為 $S = 5000(1 - e^{-0.005x})$ 由用指數級數的前三項求此式的近似值。
22. 像與稜鏡的距離 q 為物距 p 的函數 $q = 20p/(p-20)$, 求此式右邊展式的前三個非零之項。由此展式對 $p = 2$ (公分) 計算 q 並與以 2 代入原式求出之值比較。
23. 一個人從什麼高度能看到沿地球表面 10 哩處的一點?
24. 一內燃機的效率 (以百分數計) 以其壓縮比 c 表之約為 $E = 100(1 - c^{-0.4})$ 對一壓縮比 6.00 而有可能誤差 0.50 求效率的可能近似誤差。[提示: 求 $(6 + x)^{-0.4}$ 的級數。]

12-4 泰勒級數

若欲求某些函數在 x 不接近於零時之值，通常必須用麥克勞林展式的許多項才能獲得準確值。因此，要用另一種級數稱為泰勒級數 (Taylor's series)。又，對不能求得麥克勞林級數的函數可能有泰勒級數。實際上，泰勒級數為較麥克勞林展式普遍的展式。

作出泰勒展式的基本假設為一函數可展開為如下的多項式形式

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots \quad (12-14)$$

照導出麥克勞林展式的同樣理由，可求得各常數 c_0, c_1, c_2 等等。亦即，取 (12-14) 式的各導數，並對 $x=a$ 計算函數及其各導數之值。如此即得

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \cdots \quad (12-15)$$

下例說明泰勒級數的導出方法。

例 A. 把 $f(x) = e^x$ 展為泰勒級數，取 $a=1$ 。

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x, & f(1) &= e, \\ f'(x) &= e^x, & f'(1) &= e, \\ f''(x) &= e^x, & f''(1) &= e, \\ f'''(x) &= e^x, & f'''(1) &= e, \text{ 等等,} \\ f(x) &= e + e(x-1) + e \frac{(x-1)^2}{2!} + e \frac{(x-1)^3}{3!} + \cdots, \\ e^x &= e \left[1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \cdots \right]. \end{aligned}$$

此一級數在計算 e^x 於 x 接近於 1 時之值特別有用。

例 B. 把 $f(x) = \sqrt{x}$ 展為 $(x-4)$ 之冪。

此題的另一說法為取 $a=4$ 求 $f(x) = \sqrt{x}$ 的泰勒級數。

$$f(x) = x^{1/2}, \quad f(4) = 2,$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x^{1/2}}, \quad f'(4) = \frac{1}{4},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}}, \quad f''(4) = -\frac{1}{32},$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8x^{5/2}}, \quad f'''(4) = \frac{3}{256}, \text{ 等等,}$$

$$f(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{32} \frac{(x-4)^2}{2!} + \frac{3}{256} \frac{(x-4)^3}{3!} - \dots,$$

$$\sqrt{x} = 2 + \frac{(x-4)}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{512} - \dots.$$

此級數可用來計算接近 4 之數的平方根。

上節中曾用麥克勞林級數計算一些函數之值。下列各例中將用泰勒級數以求函數的某些值。

例 C. 用泰勒級數計算 $\sqrt{4.5}$,

用例 B 中求出的級數之四項, 得

$$\begin{aligned} \sqrt{4.5} &= 2 + \frac{(4.5-4)}{4} - \frac{(4.5-4)^2}{64} + \frac{(4.5-4)^3}{512} \\ &= 2 + \frac{(0.5)}{4} - \frac{(0.5)^2}{64} + \frac{(0.5)^3}{512} \\ &= 2.0000 + 0.1250 - 0.0039 + 0.0002 \\ &= 2.1213. \end{aligned}$$

此結果準確到所示出的位數 (四位小數)。

例 D. 用適當的泰勒展式計算 $\sin 29^\circ$ 的近似值。

因已知 $\sin 30^\circ$ 為 $\frac{1}{2}$, 若令 $a = \pi/6$ (記住, 必須用弧度值), 當對 $x = 29^\circ$ (用弧度表出) 計算其展式時, $x - a = -\pi/180$ (等於 -1°)。此數很小, 且較高次幕時數值更小。

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f(\pi/6) &= 1/2, \\ f'(x) &= \cos x, & f'(\pi/6) &= \sqrt{3}/2, \\ f''(x) &= -\sin x, & f''(\pi/6) &= -1/2, \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \pi/6) - \frac{1}{4}(x - \pi/6)^2 - \dots,$$

即 $\sin x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \pi/6) - \frac{1}{4}(x - \pi/6)^2 - \dots;$

$$\sin 29^\circ = \sin(\pi/6 - \pi/180)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(\pi/6 - \pi/180 - \pi/6) - \frac{1}{4}(\pi/6 - \pi/180 - \pi/6)^2 - \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(-\pi/180) - \frac{1}{4}(-\pi/180)^2 - \dots$$

$$= 0.500000 - (0.86603)(0.017453) - (0.25000)(0.017453)^2$$

$$= 0.500000 - 0.015115 - 0.000076 = 0.48481.$$

此結果準確到所示出的位數。

習題

在 1 至 6 各題中, 由用本節各例中求得的級數計算各函數之值。

1. $e^{1.2}$ (用 $e=2.718$)

2. $e^{0.7}$

3. $\sqrt{4.2}$

4. $\sqrt{3.5}$

5. $\sin 31^\circ$

6. $\sin 28^\circ$

在 7 至 14 各題中, 對各函數及所註出的 a 值求其泰勒展式的前三個非零之項。

7. e^{-x} ($a=2$)

8. $\cos x$ ($a=\pi/4$)

9. $\sin x$ ($a=\pi/3$)

10. $\ln x$ ($a=3$)

11. $\sqrt[3]{x}$ ($a=8$)

12. $\frac{1}{x}$ ($a=2$)

13. $\tan x$ ($a=\pi/4$)

14. $\ln \sin x$ ($a=\pi/2$)

在 15 至 20 各題中, 用適當的泰勒級數的三項計算各函數。

15. $e^{-2.2}$ (用 $e^{-2}=0.1353$)
16. $\ln(3.1)$ (用 $\ln 3=1.0986$)
17. $\sqrt[3]{8.3}$
18. $\tan 46^\circ$
19. $\sin 61^\circ$
20. $\cos 42^\circ$
21. 由完成 (12-15) 式之前所指示的步驟以導出 (12-15) 式。
22. 由用 e^x 的麥克勞林展式的四項計算 $e^{0.9}$ 。再由用本節例 A 中泰勒展式的前三項計算 $e^{0.9}$ ，用 $e=2.718$ 。看附錄的第 5 表中 $e^{0.9}$ 的值，比較以此二法所求得的值的準確度。

12-5 雜 題

在 1 至 8 各題中，求各函數的麥克勞林展式的前三個非零之項。

1. $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$
2. $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
3. $f(x) = \sin 2x^2$
4. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$
5. $f(x) = (x+1)^{1/3}$
6. $f(x) = \frac{2}{2-x^2}$
7. $f(x) = \text{Arcsin } x$
8. $f(x) = \frac{1}{1-\sin x}$

在 9, 10 二題中，用適當級數的三項計算各積分。

9. $\int_{0.1}^{0.2} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$
10. $\int_0^{0.1} \sqrt[3]{1+x^2} dx$

在 11 至 16 各題中，計算各函數之值。用適當級數的三項。

11. $e^{-0.2}$
12. $\ln(1.10)$
13. $\sqrt[3]{1.3}$
14. $\sin 58^\circ$
15. $\tan 43^\circ$
16. $\sqrt[4]{260}$

在 17, 18 二題中，求對已知函數及已知 a 之值求其泰勒展式的前三個非零之項。

17. $\cos x$ ($a=\pi/3$)
18. $\ln \cos x$ ($a=\pi/4$)

19. 由適當的二級數各項相減求函數 $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ 的麥克勞林展式的

前四個非零之項。

20. 由逐項微分 $x \sin x$ 的展式求函數 $\sin x + x \cos x$ 的麥克勞林展式的前三個非零之項。
21. 在同一圖上作下列各曲線: $y=e^x, y=1, y=1+x$, 及 $y=1+x+x^2/2$ 。
22. 求界於曲線 $y=(x-\sin x)/x^2$ 與 x 軸在 $x=0$ 到 $x=0.1$ 間的近似面積。
23. 用級數, 求地球上 200 哩長的大圓弧到其弦的最大距離。(球面上, 圓心在球心的圓稱為大圓。)

附 錄

1. 乘冪及方根

No.	Sq.	Sq. Root	Cube	Cube Root	No.	Sq.	Sq. Root	Cube	Cube Root
1	1	1.000	1	1.000	51	2,601	7.141	132,651	3.708
2	4	1.414	8	1.260	52	2,704	7.211	140,608	3.733
3	9	1.732	27	1.442	53	2,809	7.280	148,877	3.756
4	16	2.000	64	1.587	54	2,916	7.348	157,464	3.780
5	25	2.236	125	1.710	55	3,025	7.416	166,375	3.803
6	36	2.449	216	1.817	56	3,136	7.483	175,616	3.826
7	49	2.646	343	1.913	57	3,249	7.550	185,193	3.849
8	64	2.828	512	2.000	58	3,364	7.616	195,112	3.871
9	81	3.000	729	2.080	59	3,481	7.681	205,379	3.893
10	100	3.162	1,000	2.154	60	3,600	7.746	216,000	3.915
11	121	3.317	1,331	2.224	61	3,721	7.810	226,981	3.936
12	144	3.464	1,728	2.289	62	3,844	7.874	238,328	3.958
13	169	3.606	2,197	2.351	63	3,969	7.937	250,047	3.979
14	196	3.742	2,744	2.410	64	4,096	8.000	262,144	4.000
15	225	3.873	3,375	2.466	65	4,225	8.062	274,625	4.021
16	256	4.000	4,096	2.520	66	4,356	8.124	287,496	4.041
17	289	4.123	4,913	2.571	67	4,489	8.185	300,763	4.062
18	324	4.243	5,832	2.621	68	4,624	8.246	314,432	4.082
19	361	4.359	6,859	2.668	69	4,761	8.307	328,509	4.102
20	400	4.472	8,000	2.714	70	4,900	8.367	343,000	4.121
21	441	4.583	9,261	2.759	71	5,041	8.426	357,911	4.141
22	484	4.690	10,648	2.802	72	5,184	8.485	373,248	4.160
23	529	4.796	12,167	2.844	73	5,329	8.544	389,017	4.179
24	576	4.899	13,824	2.884	74	5,476	8.602	405,224	4.198
25	625	5.000	15,625	2.924	75	5,625	8.660	421,875	4.217
26	676	5.099	17,576	2.962	76	5,776	8.718	438,976	4.236
27	729	5.196	19,683	3.000	77	5,929	8.775	456,533	4.254
28	784	5.292	21,952	3.037	78	6,084	8.832	474,552	4.273
29	841	5.385	24,389	3.072	79	6,241	8.888	493,039	4.291
30	900	5.477	27,000	3.107	80	6,400	8.944	512,000	4.309
31	961	5.568	29,791	3.141	81	6,561	9.000	531,441	4.327
32	1,024	5.657	32,768	3.175	82	6,724	9.055	551,368	4.344
33	1,089	5.745	35,937	3.208	83	6,889	9.110	571,787	4.362
34	1,156	5.831	39,304	3.240	84	7,056	9.165	592,704	4.380
35	1,225	5.916	42,875	3.271	85	7,225	9.220	614,125	4.397
36	1,296	6.000	46,656	3.302	86	7,396	9.274	636,056	4.414
37	1,369	6.083	50,653	3.332	87	7,569	9.327	658,503	4.431
38	1,444	6.164	54,872	3.362	88	7,744	9.381	681,472	4.448
39	1,521	6.245	59,319	3.391	89	7,921	9.434	704,969	4.465
40	1,600	6.325	64,000	3.420	90	8,100	9.487	729,000	4.481
41	1,681	6.403	68,921	3.448	91	8,281	9.539	753,571	4.498
42	1,764	6.481	74,088	3.476	92	8,464	9.592	778,688	4.514
43	1,849	6.557	79,507	3.503	93	8,649	9.644	804,357	4.531
44	1,936	6.633	85,184	3.530	94	8,836	9.695	830,584	4.547
45	2,025	6.708	91,125	3.557	95	9,025	9.747	857,375	4.563
46	2,116	6.782	97,336	3.583	96	9,216	9.798	884,736	4.579
47	2,209	6.856	103,823	3.609	97	9,409	9.849	912,673	4.595
48	2,304	6.928	110,592	3.634	98	9,604	9.899	941,192	4.610
49	2,401	7.000	117,649	3.659	99	9,801	9.950	970,299	4.626
50	2,500	7.071	125,000	3.684	100	10,000	10.000	1,000,000	4.642

2. 三角函數表

Angle		Sine	Cosine	Tangent	Angle		Sine	Cosine	Tangent
De- gree	Radian				De- gree	Radian			
0°	0.000	0.000	1.000	0.000	46°	0.803	0.719	0.695	1.036
1°	0.017	0.017	1.000	0.017	47°	0.820	0.731	0.682	1.072
2°	0.035	0.035	0.999	0.035	48°	0.838	0.743	0.669	1.111
3°	0.052	0.052	0.999	0.052	49°	0.855	0.755	0.656	1.150
4°	0.070	0.070	0.998	0.070	50°	0.873	0.766	0.643	1.192
5°	0.087	0.087	0.996	0.087	51°	0.890	0.777	0.629	1.235
6°	0.105	0.105	0.995	0.105	52°	0.908	0.788	0.616	1.280
7°	0.122	0.122	0.993	0.123	53°	0.925	0.799	0.602	1.327
8°	0.140	0.139	0.990	0.141	54°	0.942	0.809	0.588	1.376
9°	0.157	0.156	0.988	0.158	55°	0.960	0.819	0.574	1.428
10°	0.175	0.174	0.985	0.176	56°	0.977	0.829	0.559	1.483
11°	0.192	0.191	0.982	0.194	57°	0.995	0.839	0.545	1.540
12°	0.209	0.208	0.978	0.213	58°	1.012	0.848	0.530	1.600
13°	0.227	0.225	0.974	0.231	59°	1.030	0.857	0.515	1.664
14°	0.244	0.242	0.970	0.249	60°	1.047	0.866	0.500	1.732
15°	0.262	0.259	0.966	0.268	61°	1.065	0.875	0.485	1.804
16°	0.279	0.276	0.961	0.287	62°	1.082	0.883	0.469	1.881
17°	0.297	0.292	0.956	0.306	63°	1.100	0.891	0.454	1.963
18°	0.314	0.309	0.951	0.325	64°	1.117	0.899	0.438	2.050
19°	0.332	0.326	0.946	0.344	65°	1.134	0.906	0.423	2.145
20°	0.349	0.342	0.940	0.364	66°	1.152	0.914	0.407	2.246
21°	0.367	0.358	0.934	0.384	67°	1.169	0.921	0.391	2.356
22°	0.384	0.375	0.927	0.404	68°	1.187	0.927	0.375	2.475
23°	0.401	0.391	0.921	0.424	69°	1.204	0.934	0.358	2.605
24°	0.419	0.407	0.914	0.445	70°	1.222	0.940	0.342	2.748
25°	0.436	0.423	0.906	0.466	71°	1.239	0.946	0.326	2.904
26°	0.454	0.438	0.899	0.488	72°	1.257	0.951	0.309	3.078
27°	0.471	0.454	0.891	0.510	73°	1.274	0.956	0.292	3.271
28°	0.489	0.469	0.883	0.532	74°	1.292	0.961	0.276	3.487
29°	0.506	0.485	0.875	0.554	75°	1.309	0.966	0.259	3.732
30°	0.524	0.500	0.866	0.577	76°	1.326	0.970	0.242	4.011
31°	0.541	0.515	0.857	0.601	77°	1.344	0.974	0.225	4.332
32°	0.559	0.530	0.848	0.625	78°	1.361	0.978	0.208	4.705
33°	0.576	0.545	0.839	0.649	79°	1.379	0.982	0.191	5.145
34°	0.593	0.559	0.829	0.675	80°	1.396	0.985	0.174	5.671
35°	0.611	0.574	0.819	0.700	81°	1.414	0.988	0.156	6.314
36°	0.628	0.588	0.809	0.727	82°	1.431	0.990	0.139	7.115
37°	0.646	0.602	0.799	0.754	83°	1.449	0.993	0.12	8.144
38°	0.663	0.616	0.788	0.781	84°	1.466	0.995	0.105	9.514
39°	0.681	0.629	0.777	0.810	85°	1.484	0.996	0.087	11.43
40°	0.698	0.643	0.766	0.839	86°	1.501	0.998	0.070	14.30
41°	0.716	0.656	0.755	0.869	87°	1.518	0.999	0.052	19.08
42°	0.733	0.669	0.743	0.900	88°	1.536	0.999	0.035	28.64
43°	0.750	0.682	0.731	0.933	89°	1.553	1.000	0.017	57.29
44°	0.768	0.695	0.719	0.966	90°	1.571	1.000	0.000	
45°	0.785	0.707	0.707	1.000					

3. 對 數 表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

4. 自然對數

n	$\log_e n$	n	$\log_e n$	n	$\log_e n$	n	$\log_e n$
0.0	*	3.2	1.1632	6.4	1.8563	9.6	2.2618
0.1	7.6974	3.3	1.1939	6.5	1.8718	9.7	2.2721
0.2	8.3906	3.4	1.2238	6.6	1.8871	9.8	2.2824
0.3	8.7960	3.5	1.2528	6.7	1.9021	9.9	2.2925
0.4	9.0837	3.6	1.2809	6.8	1.9169	10	2.3026
0.5	9.3069	3.7	1.3083	6.9	1.9315	11	2.3979
0.6	9.4892	3.8	1.3350	7.0	1.9459	12	2.4849
0.7	9.6433	3.9	1.3610	7.1	1.9601	13	2.5649
0.8	9.7769	4.0	1.3863	7.2	1.9741	14	2.6391
0.9	9.8946	4.1	1.4110	7.3	1.9879	15	2.7081
1.0	0.0000	4.2	1.4351	7.4	2.0015	16	2.7726
1.1	0.0953	4.3	1.4586	7.5	2.0149	17	2.8332
1.2	0.1823	4.4	1.4816	7.6	2.0281	18	2.8904
1.3	0.2624	4.5	1.5041	7.7	2.0412	19	2.9444
1.4	0.3365	4.6	1.5261	7.8	2.0541	20	2.9957
1.5	0.4055	4.7	1.5476	7.9	2.0669	25	3.2189
1.6	0.4700	4.8	1.5686	8.0	2.0794	30	3.4012
1.7	0.5306	4.9	1.5892	8.1	2.0919	35	3.5553
1.8	0.5878	5.0	1.6094	8.2	2.1041	40	3.6889
1.9	0.6419	5.1	1.6292	8.3	2.1163	45	3.8067
2.0	0.6931	5.2	1.6487	8.4	2.1282	50	3.9120
2.1	0.7419	5.3	1.6677	8.5	2.1401	55	4.0073
2.2	0.7885	5.4	1.6864	8.6	2.1518	60	4.0943
2.3	0.8329	5.5	1.7047	8.7	2.1633	65	4.1744
2.4	0.8755	5.6	1.7228	8.8	2.1748	70	4.2485
2.5	0.9163	5.7	1.7405	8.9	2.1861	75	4.3175
2.6	0.9555	5.8	1.7579	9.0	2.1972	80	4.3820
2.7	0.9933	5.9	1.7750	9.1	2.2083	85	4.4427
2.8	1.0296	6.0	1.7918	9.2	2.2192	90	4.4998
2.9	1.0647	6.1	1.8083	9.3	2.2300	95	4.5539
3.0	1.0986	6.2	1.8245	9.4	2.2407	100	4.6052
3.1	1.1314	6.3	1.8405	9.5	2.2513		

5. 指數函數

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0.00	1.0000	1.0000	0.70	2.0138	0.4966	2.8	16.445	0.0608
0.01	1.0101	0.9901	0.75	2.1170	0.4724	2.9	18.174	0.0550
0.02	1.0202	0.9802	0.80	2.2255	0.4493	3.0	20.086	0.0498
0.03	1.0305	0.9704	0.85	2.3396	0.4274	3.1	22.198	0.0450
0.04	1.0408	0.9608	0.90	2.4596	0.4066	3.2	24.533	0.0408
0.05	1.0513	0.9512	0.95	2.5857	0.3867	3.3	27.113	0.0369
0.06	1.0618	0.9418	1.0	2.7183	0.3679	3.4	29.964	0.0334
0.07	1.0725	0.9324	1.1	3.0042	0.3329	3.5	33.115	0.0302
0.08	1.0833	0.9231	1.2	3.3201	0.3012	3.6	36.598	0.0273
0.09	1.0942	0.9139	1.3	3.6693	0.2725	3.7	40.447	0.0247
0.10	1.1052	0.9048	1.4	4.0552	0.2466	3.8	44.701	0.0224
0.11	1.1163	0.8958	1.5	4.4817	0.2231	3.9	49.402	0.0202
0.12	1.1275	0.8869	1.6	4.9530	0.2019	4.0	54.598	0.0183
0.15	1.1618	0.8607	1.7	5.4739	0.1827	4.5	90.017	0.0111
0.20	1.2214	0.8187	1.8	6.0496	0.1653	5.0	148.41	0.0067
0.25	1.2840	0.7788	1.9	6.6859	0.1496	5.5	244.69	0.0041
0.30	1.3499	0.7408	2.0	7.3891	0.1353	6.0	403.43	0.0025
0.35	1.4191	0.7047	2.1	8.1662	0.1225	7	1096.6	0.0009
0.40	1.4918	0.6703	2.2	9.0250	0.1108	8	2981.0	0.0003
0.45	1.5683	0.6376	2.3	9.9742	0.1003	9	8103.1	0.0001
0.50	1.6487	0.6065	2.4	11.023	0.0907	10	22026	0.00005
0.55	1.7333	0.5769	2.5	12.182	0.0821			
0.60	1.8221	0.5488	2.6	13.464	0.0743			
0.65	1.9155	0.5220	2.7	14.880	0.0672			

6. 積 分 表

第八章的基本公式未列入, 未寫出積分常數。

含 $a+bu$ 與 $\sqrt{a+bu}$ 之式

$$1. \int \frac{u du}{a+bu} = \frac{1}{b^2} [(a+bu) - a \ln(a+bu)]$$

$$2. \int \frac{du}{u(a+bu)} = -\frac{1}{a} \ln \frac{a+bu}{u}$$

$$3. \int \frac{u du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2} \left(\frac{a}{a+bu} + \ln(a+bu) \right)$$

$$4. \int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2} \ln \frac{a+bu}{u}$$

$$5. \int u \sqrt{a+bu} du = -\frac{2(2a-3bu)(a+bu)^{3/2}}{15b^2}$$

$$6. \int \frac{u du}{\sqrt{a+bu}} = -\frac{2(2a-bu)\sqrt{a+bu}}{3b^2}$$

$$7. \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left(\frac{\sqrt{a+bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bu} + \sqrt{a}} \right), \quad a > 0$$

$$8. \int \frac{\sqrt{a+bu}}{u} du = 2\sqrt{a+bu} + a \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$$

含 $\sqrt{u^2 \pm a^2}$ 與 $\sqrt{a^2 - u^2}$ 之式

$$9. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{u-a}{u+a}$$

$$10. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 \pm a^2})$$

$$11. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right)$$

$$12. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{Arcsec} \frac{u}{a}$$

$$13. \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right)$$

$$14. \int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 \pm a^2})$$

$$15. \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{Arcsin} \frac{u}{a}$$

$$16. \int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u} du = \sqrt{u^2 + a^2} - a \ln \left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right)$$

$$17. \int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} du = \sqrt{u^2 - a^2} - a \operatorname{Arcsec} \frac{u}{a}$$

$$18. \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right)$$

$$19. \int (u^2 \pm a^2)^{3/2} du \\ = \frac{u}{4} (u^2 \pm a^2)^{3/2} \pm \frac{3a^2 u}{8} \sqrt{u^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8} \ln (u + \sqrt{u^2 \pm a^2})$$

$$20. \int (a^2 - u^2)^{3/2} du = \frac{u}{4} (a^2 - u^2)^{3/2} + \frac{3a^2 u}{8} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8} \operatorname{Arcsin} \frac{u}{a}$$

$$21. \int \frac{(u^2 + a^2)^{3/2}}{u} du \\ = \frac{1}{3} (u^2 + a^2)^{3/2} + a^2 \sqrt{u^2 + a^2} - a^3 \ln \left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right)$$

$$22. \int \frac{(u^2 - a^2)^{3/2}}{u} du = \frac{1}{3} (u^2 - a^2)^{3/2} - a^2 \sqrt{u^2 - a^2} + a^3 \operatorname{Arcsec} \frac{u}{a}$$

$$23. \int \frac{(a^2 - u^2)^{3/2}}{u} du \\ = \frac{1}{3} (a^2 - u^2)^{3/2} - a^2 \sqrt{a^2 - u^2} + a^3 \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right)$$

$$24. \int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \pm \frac{u}{a^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}}$$

$$25. \int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 - u^2}}$$

$$26. \int \frac{du}{u(u^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2 \sqrt{u^2 + a^2}} - \frac{1}{a^3} \ln \left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right)$$

$$27. \int \frac{du}{u(u^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{a^2 \sqrt{u^2 - a^2}} - \frac{1}{a^3} \operatorname{Arcsec} \frac{u}{a}$$

$$28. \int \frac{du}{u(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2 \sqrt{a^2 - u^2}} - \frac{1}{a^3} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right)$$

三角式

$$29. \int \sin^2 u \, du = \frac{u}{2} - \frac{1}{2} \sin u \cos u$$

$$30. \int \sin^3 u \, du = -\cos u + \frac{1}{3} \cos^3 u$$

$$31. \int \sin^n u \, du = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} u \, du$$

$$32. \int \cos^2 u \, du = \frac{u}{2} + \frac{1}{2} \sin u \cos u$$

$$33. \int \cos^3 u \, du = \sin u - \frac{1}{3} \sin^3 u$$

$$34. \int \cos^n u \, du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \sin u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u \, du$$

$$35. \int \tan^n u \, du = \frac{\tan^{n-1} u}{n-1} - \int \tan^{n-2} u \, du$$

$$36. \int \cot^n u \, du = -\frac{\cot^{n-1} u}{n-1} - \int \cot^{n-2} u \, du$$

$$37. \int \sec^n u \, du = \frac{\sec^{n-2} u \tan u}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u \, du$$

$$38. \int \csc^n u \, du = -\frac{\csc^{n-2} u \cot u}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} u \, du$$

$$39. \int \sin au \sin bu \, du = \frac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)u}{2(a+b)}$$

$$40. \int \sin au \cos bu \, du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)}$$

$$41. \int \cos au \cos bu \, du = \frac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)u}{2(a+b)}$$

$$42. \int \sin^m u \cos^n u \, du = \frac{\sin^{m+1} u \cos^{n-1} u}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m u \cos^{n-2} u \, du$$

$$43. \int \sin^m u \cos^n u \, du$$

$$= -\frac{\sin^{m-1} u \cos^{n+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} u \cos^n u \, du$$

其 他 形 式

$$44. \int u e^{au} du = \frac{e^{au}(au-1)}{a^2}$$

$$45. \int u^2 e^{au} du = \frac{e^{au}}{a^3} (a^2 u^2 - 2au + 2)$$

$$46. \int u^n \ln u du = u^{n+1} \left(\frac{\ln u}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$$

$$47. \int u \sin u du = \sin u - u \cos u$$

$$48. \int u \cos u du = \cos u + u \sin u$$

$$49. \int e^{au} \sin bu du = \frac{e^{au}(a \sin bu - b \cos bu)}{a^2 + b^2}$$

$$50. \int e^{au} \cos bu du = \frac{e^{au}(a \cos bu + b \sin bu)}{a^2 + b^2}$$

$$51. \int \operatorname{Arcsin} u du = u \operatorname{Arcsin} u + \sqrt{1-u^2}$$

$$52. \int \operatorname{Arctan} u du = u \operatorname{Arctan} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2)$$

單號習題答案

6-1

1. $\frac{1}{12}\pi$

3. $-\frac{1}{3}\pi$

5. 0.9397

7. -0.1763

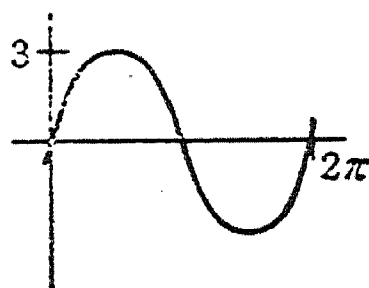
9. 1.030

11. 0.4536

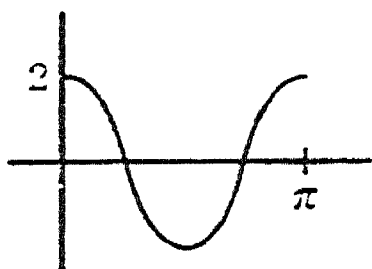
13. $\frac{1}{9}\pi, \frac{8}{9}\pi$

15. $\frac{13}{18}\pi, \frac{31}{18}\pi$

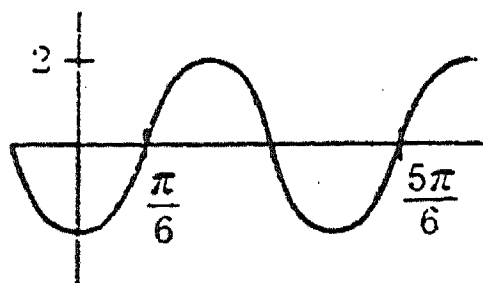
17.



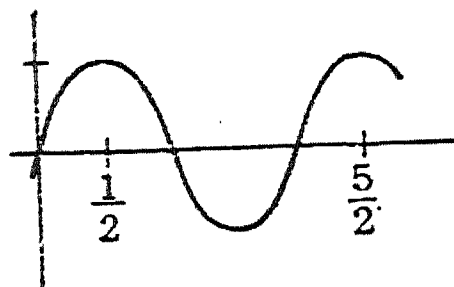
19.



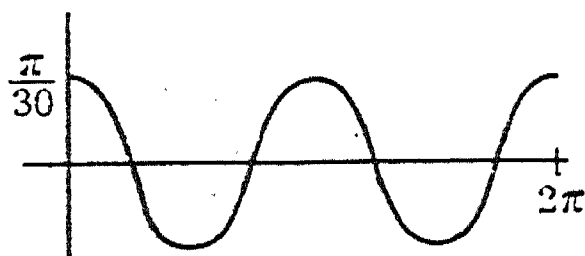
21.



23.

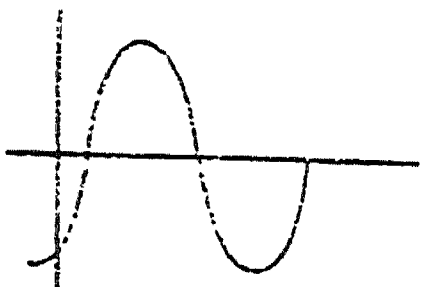


25.



27. 0.999 mm

29.



6-2

[註：三角恆等式的各“答案”都是從等於左邊的一式做起。]

1. $\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \csc x = \frac{1}{\cos x}$

3. $\sin x \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) + \cos x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$

5. $(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x$

7. 9. 以適當的式代換左邊並化簡

$$11. 2 \sin x + \sin 2x = 2 \sin x + 2 \sin x \cos x = \frac{2 \sin x (1 + \cos x)(1 - \cos x)}{1 - \cos x}$$

$$13. \frac{1 - \cos \alpha}{2 \sin(\alpha/2)} = \frac{1 - \cos \alpha}{2 \sqrt{(1 - \cos \alpha)/2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad 15. 2A \sin \frac{2\pi t}{T} \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$$

$$17. 18 \text{ in.} \quad 19. 19\%$$

6-3

1. $\cos(x+2)$

3. $4 \cos(2x-1)$

5. $-10 \sin 2x$

7. $-6 \sin(3x-1)$

9. $8 \sin 4x \cos 4x = 4 \sin 8x$

11. $-45 \cos^2(5x+2) \sin(5x+2)$

13. $\sin 3x + 3x \cos 3x$

15. $-2 \sin 2x \sin x + 4 \cos 2x \cos x$

17. $\frac{3x \cos 3x - \sin 3x}{x^2}$

19. $\frac{-4x^2 \sin x^2 - 2 \cos x^2}{3x^2}$

21. $3 \sin^2 x \cos x + 2 \sin 2x$

23. $1 - 4 \sin^2 4x \cos 4x$

27. -5.96 mm/sec

6-4

1. $5 \sec^2 5x$

3. $2(1-x) \csc^2(1-x)^2$

5. $6 \sec 2x \tan 2x$

7. $\frac{3 \csc \sqrt{x} \cot \sqrt{x}}{2 \sqrt{x}}$

9. $30 \tan 3x \sec^2 3x$

11. $-24 \cot^3 3x \csc^2 3x$

13. $2 \tan 4x \sqrt{\sec 4x}$

15. $-84 \csc^4 7x \cot 7x$

17. $x^2 \sec^2 x + 2x \tan x$

19. $-\frac{\csc x (x \cot x + 1)}{x^2}$

21. $\sec^2 x (\tan^2 x - 1)$

23. $2 \sec 2x (\sec 2x - \tan 2x)$

25. $4 \sec 4x (\tan^2 4x + \sec^2 4x) dx$

27. 140 ft/sec

6-5

1. $\frac{1}{3}\pi$

3. $\frac{1}{2}\pi$

5. $\frac{1}{6}\pi$

7. $\frac{1}{6}\pi$

9. $\frac{1}{4}\pi$

11. $\frac{7}{10}\pi$

13. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

15. -1

17. $x = \frac{1}{3} \text{Arcsin } y$

19. $x = \frac{1}{3} \text{Arcsec}(y-1)$

21. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

23. x

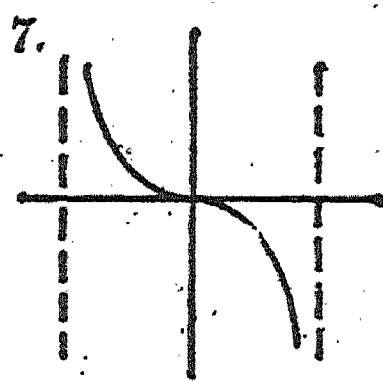
25. $2x \sqrt{1-x^2}$

27. $t = \frac{1}{2} \text{Arcsin}(y/A)$

6-6

1. $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$
3. $\frac{18x^2}{\sqrt{1-9x^6}}$
5. $-\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$
7. $\frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}}$
9. $-\frac{1}{x^2+1}$
11. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \operatorname{Arcsin} x$
13. $\frac{3\sqrt{1-4x^2} \operatorname{Arcsin} 2x - 6x}{\sqrt{1-4x^2} \operatorname{Arcsin}^2 2x}$
15. $\frac{8 \operatorname{Arcsin} 4x}{\sqrt{1-16x^2}}$
17. $\frac{9 \operatorname{Arctan}^2 x}{1+x^2}$
19. $\frac{-2(2x+1)^2}{(1+4x^2)^2}$
21. $\frac{3 \operatorname{Arcsin}^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$
23. 用導出 (6-39) 式的相同方法
25. 令 $y = \operatorname{Arcsec} u$; 解出 u ; 取導數; 代換.

6-7

1. $d \sin x / dx = \cos x$ 及 $d \cos x / dx = -\sin x$, 及在交點處 $\sin x = \cos x$
3. $1/(1+x^2)$ 恆為正
5. $8\sqrt{2}x + 8y - 4\sqrt{2} - 5\pi\sqrt{2} = 0$
7. 
11. 35.5 mm/sec
13. 40π ft/min, 300°
15. 4, 240°
17. -0.0729 rad/sec
19. $\frac{4}{3}$ unit/sec
21. $-\$832$
23. 9 in^2
25. 14.05 ft

6-8

1. $-12 \sin(4x-1)$
3. $\frac{-\sec^2 \sqrt{3-x}}{2\sqrt{3-x}}$
5. $\frac{9}{9+x^2}$
7. $\frac{3 \sin^2 \sqrt{x} \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
9. $\sec 2x (1+2x \tan 2x)$
11. $\frac{x - \sqrt{1-x^2} \operatorname{Arcsin} x}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$
13. $-2 \csc 4x \sqrt{\cot 4x + \csc 4x}$
15. -1
17. $\operatorname{Arccos} x$
19. $\frac{2y \sin 2x + \sin 2y}{\csc 2x - 2x \cos 2y}$

21. $\frac{1}{6}\pi$ ft/sec

23. $2\pi, 330^\circ$

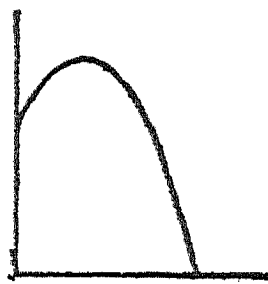
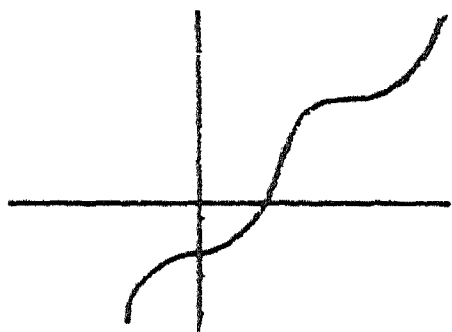
25. $7.27x + y - 9.44 = 0$

27. Infl: $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi), (\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$

29. 377 ft/sec

31. 63 ft

33.



35. $5\sqrt{2} = 7.07$ in

7-1

1. $4 = \log_4 256$

3. $16 = 8^{4/3}$

5. $\frac{1}{3} = \log_3 2$

7. $16 = (0.5)^{-4}$

9. $0 = \log_{12} 1$

11. $\frac{1}{512} = 8^{-3}$

13. 343

15. 0.2

17.

19. $\log_5 3$

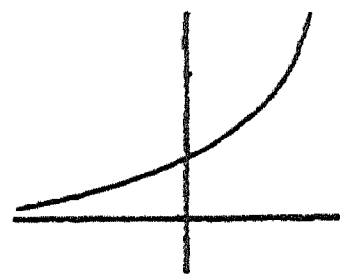
21. $-\frac{3}{2} \log_b x$

23. 1.099

25. 1.921

27. $h = \ln(p/p_0)^{-1/k}$

29. $P = 10000 e^{0.01t}$



7-2

1. $\frac{2 \log_{10} e}{x}$

3. $\frac{-3}{1-3x}$

5. $\frac{4 \sec^2 2x}{\tan 2x} = 4 \sec 2x \csc 2x$

7. $1/2x$

9. $1 + \ln x$

11. $\frac{1}{x \ln x}$

13. $\frac{1}{x^2 + x}$

15. $\frac{\cos \ln x}{x}$

17. $\frac{x \sec^2 x + \tan x}{x \tan x}$

19. $\frac{x+4}{x(x+2)}$

21. -1

23. $x^x (\ln x + 1)$

7-3

1. $6e^{6x}$

3. $\frac{6(4^{6x})}{\log_4 e}$

5. $e^{\sqrt{x}}/2\sqrt{x}$

7. $e^x(x+1)$

9. $e^{\sin x} (x \cos x + 1)$

11. $\frac{3e^{2x}(2x+1)}{(x+1)^2}$

13. $e^{-3x}(4 \cos 4x - 3 \sin 4x)$

15. $2(e^{2x} + e^{-2x})$

17. $12e^{6x} \cot 2e^{6x}$

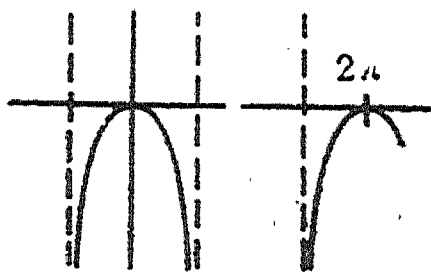
19. $\frac{4e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}$

21. $(-xe^{-x} + e^{-x}) + (xe^{-x}) = e^{-x}$

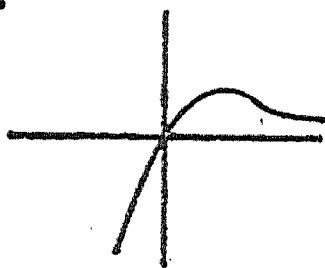
23. $kN_0 e^{kt} = kN$

7-4

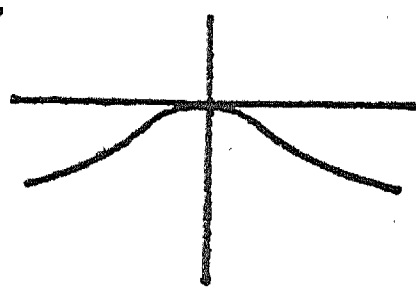
1.



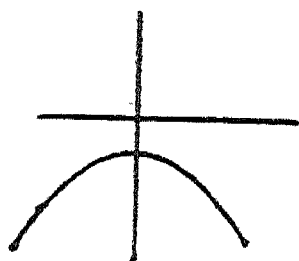
3.



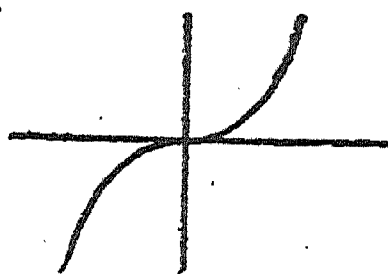
5.



7.



9.



11. $y = x - 1$

13. $\frac{dN}{dt} = -kN_0 e^{-kt}$
 $= -kN$

15. $a = k^2 x$ 17. 0.625%

19. 10 件

7-5

1. $\frac{6x}{x^2+1}$

3. $2e^{2(x-3)}$

5. $-2x \cot x^2$

7. $\frac{2 \cos x \ln(3 + \sin x)}{3 + \sin x}$

9. $2(\cos 2x) e^{\sin 2x}$

11. $x^2(x+3)e^x$

13. $x(1+2 \ln x)$

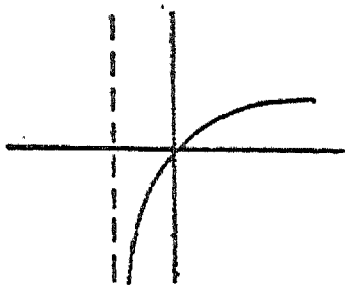
15. $\frac{2e^{2x}(x^2-x+1)}{(x^2+1)^2}$

17. $e^{-x} \sec x (\tan x - 1)$

19. $\frac{y(1-2x \ln y)}{x^2-y}$

21. $1.73x + 3.00y - 0.47 = 0$

23.



25. $dy/dx = e^a; y = e^a$

27. $-\alpha I_0 e^{-\alpha x}$

29. 202 ft/sec

31. $-\$4.40$

33. 0.858 sq. units

8-1

1. $\frac{1}{8} \sin^5 x + C$ 3. $\frac{1}{3} \tan^3 x + C$ 5. $\frac{1}{4} \sin^2 2x + C$, 或 $-\frac{1}{4} \cos^2 2x + C$,

或 $-\frac{1}{8} \cos 4x + C$

7. $\frac{1}{3} (e^{2x} + 1)^3 + C$

9. $\frac{2}{3} (1 - e^{-x})^{3/2} + C$

11. $\frac{1}{4} [\ln(2x+3)]^2 + C$

13. $-\frac{1}{4} (\operatorname{Arccos} 2x)^2 + C$

15. $\frac{1}{10} (1 + \sec^2 x)^5 + C$

17. $\frac{1}{8}$

19. $y = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + 2$

21. $\frac{1}{4}$

8-2

1. $\frac{1}{2} \ln|1+4x| + C$
4. $-\frac{1}{6} \ln|4-3x^2| + C$
5. $-\frac{1}{2} \ln|\cot 2x| + C$
7. $\ln|1-e^{-x}| + C$
9. $\frac{1}{2} \ln|4x+2x^2| + C$
11. $\frac{1}{2} \ln|1+4 \sec x| + C$
13. $\ln|2x+\tan x| + C$
15. $\ln|\ln x| + C$
17. $\frac{1}{3} \ln(\frac{5}{4}) = 0.0744$
19. 1.10
21. $\pi \ln 2 = 2.18$
23. $P = P_0(2 - e^{-at})$
25. $v = 20(1 - e^{-t})$

8-3

1. $\frac{1}{2} e^{2x+5} + C$
3. $2e^{x/2} + C$
5. $\frac{1}{3} e^{x^3} + C$
7. $2e^{\sqrt{x}} + C$
9. $\frac{1}{2} e^{2 \sec x} + C$
11. $\frac{2e^x - 3}{2e^{2x}} + C$
13. $e^{\arctan x} + C$
15. 0
17. 6.389
19. $\pi(e^4 - e) = 163$
21. $y = 2(\sqrt{e^{x+3}} - e^2)$
23. $S = 10000(e^{0.1t} + 2)$

8-4

1. $\frac{1}{2} \sin 2x + C$
3. $\frac{1}{3} \tan 3x + C$
5. $2 \sec \frac{1}{2}x + C$
7. $\frac{1}{3} \ln|\sin x^3| + C$
9. $\frac{1}{2} \ln|\sec x^2 + \tan x^2| + C$
11. $\cos(1/x) + C$
13. $\frac{1}{2} \sqrt{3}$
15. $\frac{1}{5} \sec 5x + C$
17. $\frac{1}{2}(\ln|\sin 2x + \sin 2x|) + C$
19. $\csc x - \cot x - \ln|\csc x - \cot x| + \ln \sin x + C$
21. 0.347
23. $\pi \sqrt{3} = 5.44$
25. $s = \frac{4}{3} \sin 3t$
27. $w = \ln \frac{3}{2 + \cos x}$

8-5

1. $y = C - x^2$
3. $x - \frac{1}{y} = C$
5. $\ln(x^3 + 5) + 3y = C$
7. $e^x - e^{-y} = C$
9. $\tan^2 x + 2 \ln y = C$
11. $x^2 + 1 = x \ln y + Cx$
13. $y^2 = 2\sqrt{1-x^2} + C$
15. $y = C - (\ln x)^2$
17. $3 \ln y + x^3 = 0$
19. $2 \ln(1-y) = 1 - 2 \sin x$
21. $y^2 - 2x^2 = 1$
23. $v = 32(1 - e^{-t})$; 32
25. $P = x^3 - 10e^{0.1x}$
27. $\dot{x} = 4(1 + 2e^{-0.25t})$

8-6

1. 3380
3. 5.2兆
5. 1.73×10^5

7. 13.8 years 9. $p = 30\left(\frac{29}{30}\right)^{h/3000}$ 11. 35.4%
 13. $T = 20 + 80\left(\frac{3}{8}\right)^{t/10}$ 15. $x = x_0(1 - e^{-kt})$ 17. \$1260

8-7

1. $-\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos^3 2x + C$ 3. $\frac{1}{8} \sin^3 x - \frac{1}{8} \sin^5 x + C$
 5. $\operatorname{Arcsin} x + C$ 7. $\frac{1}{12} \operatorname{Arctan} \frac{3}{4}x + C$
 9. $\cos x + x \sin x + C$ 11. $\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$
 13. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \operatorname{Arcsin} x + C$ 15. $\ln|x + \sqrt{x^2-4}| + C$
 17. $\frac{3}{25} [2 + 5x - 2 \ln|2 + 5x|] + C$ 19. $\frac{1}{4} \ln \frac{x-2}{x+2} + C$
 21. $\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{10} \sin 5x + C$ 23. $\sqrt{4x^2-9} - 3 \operatorname{Arcsec}(2x/3) + C$
 25. $-\ln\left(\frac{1 + \sqrt{4x^2+1}}{2x}\right) + C$ 27. $x \operatorname{Arcsin} 3x + \frac{1}{3} \sqrt{1-9x^2} + C$
 29. $\frac{1}{27}(26e^6 - 2)$ 31. $\operatorname{Arctan} 2 = 1.11$
 33. 2.75 35. $S = \frac{-(1-t)\sqrt{1+2t}}{3} + \frac{19}{3}$

8-8

1. $-\frac{1}{2} e^{-2x} + C$ 3. $-\frac{1}{\ln 2x} + C$ 5. $-\frac{1}{8} \ln|1-6x| + C$
 7. $-\frac{1}{3} \csc 3x + C$ 9. $\ln(1 + \sin x) + C$ 11. $-1/(e^x-1) + C$
 13. $\frac{1}{2} \ln 2 = 0.3466$ 15. $-\frac{1}{8} \cos^6 x + C$ 17. $-\frac{1}{8} \ln|\cos 3x| + C$
 19. $-\cos(e^x) + C$ 21. $\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin^3 2x + C$
 23. $-\frac{1}{2} x \cot 2x + \frac{1}{4} \ln|\sin 2x| + C$ 25. 6
 27. $\frac{1}{2} \pi \left(\frac{e^6-1}{e^6}\right)$ 29. 464 萬 31. \$20,100
 33. 4130 years old 35. \$1300 37. $v = 320(1 - e^{-t/10})$

9-1

1. $V = \pi r^2 h$ 3. $A = \frac{1}{2} bh$ 5. 24 7. 18
 9. -47 11. $2 - 3y + 4y^2$ 13. $6xt + xt^2 + t^3$
 15. $2hx - 2kx - 2hy + h^2 - 2hk - 4h$ 17. $y \leq 1$ 19. 70 man-hours

21. 75%

23. $P = P_0 \left(1 + \frac{1}{12} x t^2 \right)$

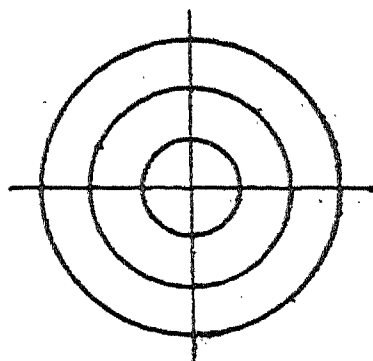
25. $A = 50x + 90y$

27. $\frac{1}{4} \pi h (4r^2 - h^2)$

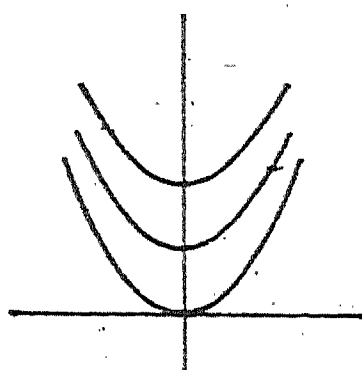
9. $A = \frac{1}{4} ab$

9-2

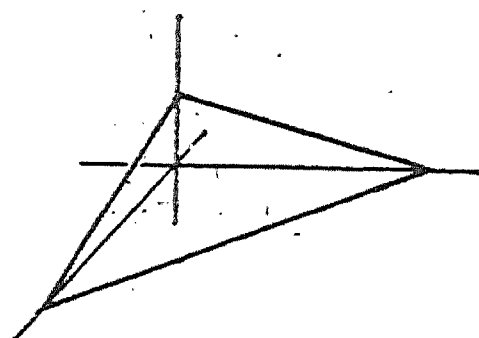
1.



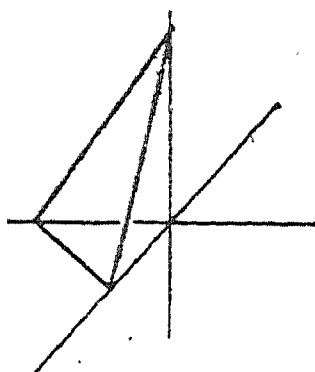
3.



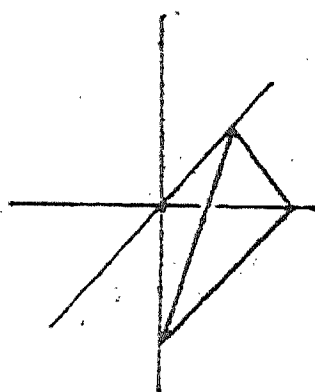
5.



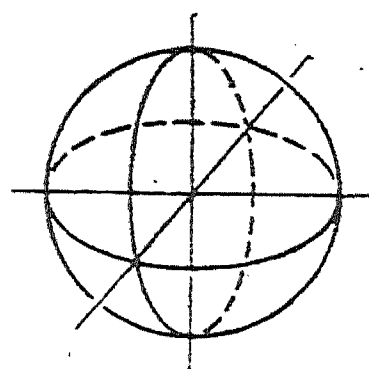
7.



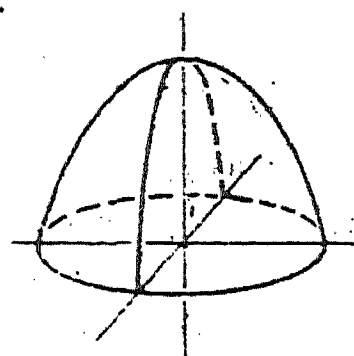
9.



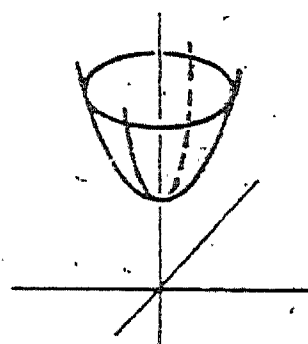
11.



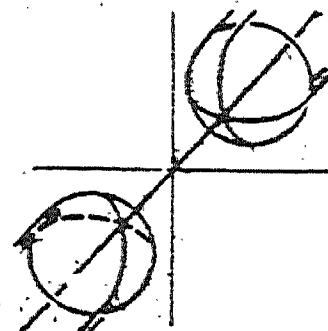
13.



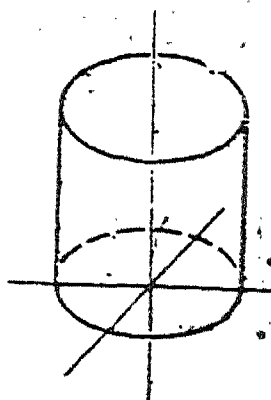
15.



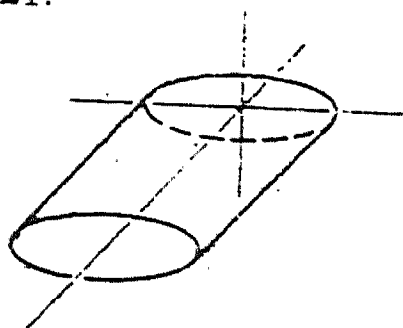
17.



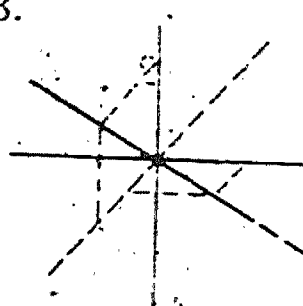
19



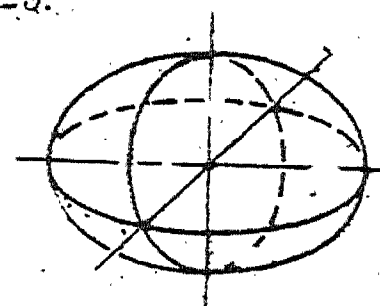
21.



23.



25.



9-3

1. $\frac{\partial z}{\partial x} = 5 + 8xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x^2$

3. $\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1+3rs}{\sqrt{1+2rs}}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{r^2}{\sqrt{1+2rs}}$

5. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y} - 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} - 2x$

7. $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{3s^2t+2s}{\sqrt{2st+1}}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{s^3}{\sqrt{2st+1}}$

9. $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cos xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \cos xy$

11. $\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{2r}{r^2+s}, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{r^2+s}$

13. $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy}(y \cos x - \sin x), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x e^{xy} \cos x + 3 \cos y$

15. $\frac{\partial f}{\partial x} = e^x(\cos xy - y \sin xy) - 2e^{-2x} \tan y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -xe^x \sin xy + e^{-2x} \sec^2 y$

17. -8

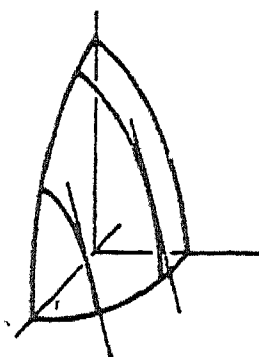
19. $2e$

21. -4, -4

23. $\frac{\partial S}{\partial x} = 2A + 50 - 2x$

25. $\frac{k_2 + 2k_3 FT}{L_0 + k_1 F + k_2 T + k_3 FT^2}$

27. $\frac{\partial f}{\partial T} = \frac{0.353}{L\sqrt{T}}, \quad 2.31 \times 10^{-6} \text{ cycle/dyne}$



9-4

1. $dz = (4x+3)dx - 2y \cdot dy$

3. $dz = (y^3 + 6xy - 1)dx + (3xy^2 + 3x^2)dy$

5. $dz = (y \cos xy + y \sin x)dx + (x \cos xy - \cos x)dy$

7. $dz = -\frac{2xy^2 dx}{x^4+y^2} + \left(\frac{yx^2}{x^4+y^2} + \text{Arctan} \frac{y}{x^2}\right) dy$

9. Min (1, 3, 6)

11. Min(-1, 2, -1)

13. -0.156 tons

15. 1.3%

17. 4.1%

19. 40, 40, 40

21. $-\frac{1}{4}$

23. 10 in., 10 in., 5 in.

25. 28 ft³/sec

9-5

1. $\frac{1}{3}$

3. $\frac{31}{10}$

5. $\frac{1}{3}$

7. $\frac{1}{12}(\pi - 6)$

9. $\frac{208\sqrt{3}}{105}$

11. $\frac{74}{5}$

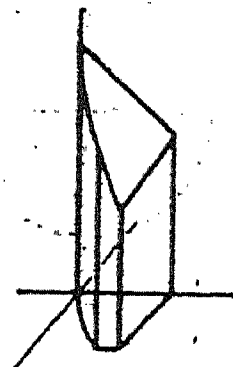
21.

13. $\frac{32}{3}$

15. 8π

17. $-\frac{28}{3}$

19. 18



9-6

$$1. \frac{\partial z}{\partial x} = 15x^2y^2 - 2y^4, \frac{\partial z}{\partial y} = 10x^3y - 8xy^3 \quad 3. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3y}{\sqrt{x^2 - 3y^2}}$$

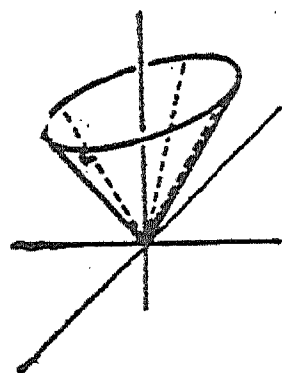
$$5. \frac{\partial u}{\partial y} = e^{2z}(2y^2 + 2z + 1), \frac{\partial u}{\partial z} = ye^{2z}(3y + 2z) \quad 7. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{(x+y)(1-x-y)}}$$

$$9. \frac{21}{2}$$

$$11. \frac{1}{4}(e^2 - 3)$$

$$13. \frac{xdx + 4ydy}{\sqrt{x^2 + 4y^2}}$$

15.



$$17. e^2x - y - e^2 + 1 = 0$$

$$19. 0.22$$

$$21. 0.982$$

$$23. \frac{\partial x}{\partial n} = 2000nt - 150n^2$$

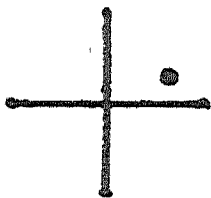
$$25. 1.25 \text{ cm}$$

$$27. \left(\frac{3}{2}, 3\right)$$

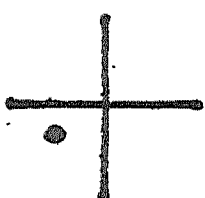
$$29. \frac{292}{15}$$

10-1

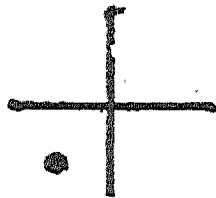
1.



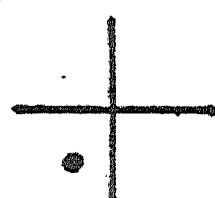
3.



5.



9.



$$11. (2, \pi/6)$$

$$13. (1, 7\pi/6)$$

$$15. (-4, -4\sqrt{3})$$

$$17. (2.77, -1.15)$$

$$19. r = 3 \sec \theta$$

$$21. r = a$$

$$23. r^2 = 4/(1 + 3 \sin^2 \theta)$$

$$25. x^2 + y^2 - y = 0$$

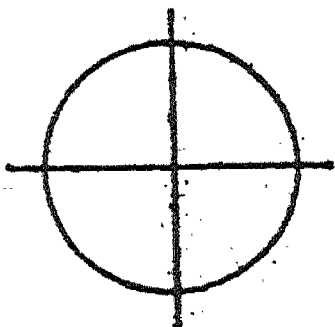
$$27. x^4 + y^4 - 4x^3 + 2x^2y^2 - 4xy^2 - 4y^2 = 0$$

$$29. s = \sqrt{x^2 + y^2} \arctan(y/x), \quad A = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \arctan(y/x)$$

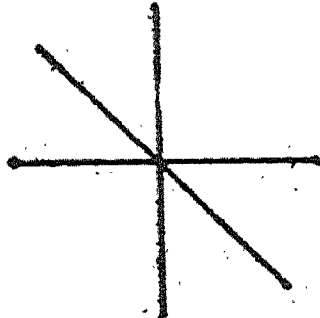
$$31. r^2(1 - 3 \cos^2 \theta) = 1$$

10-2

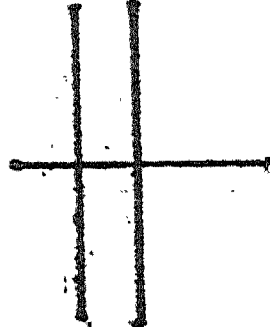
1.



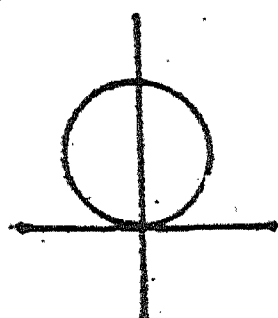
3.



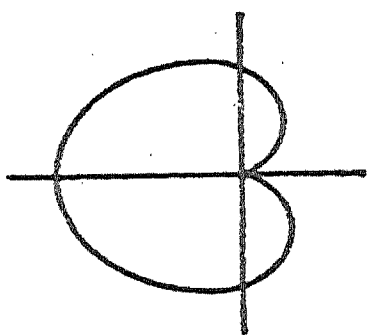
5.



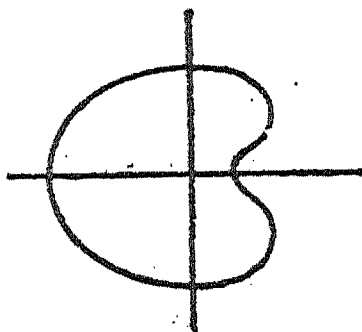
7.



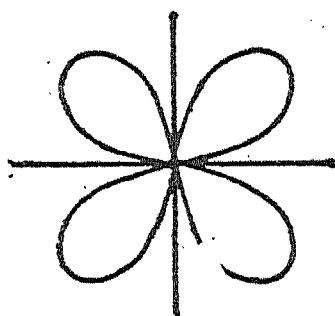
9.



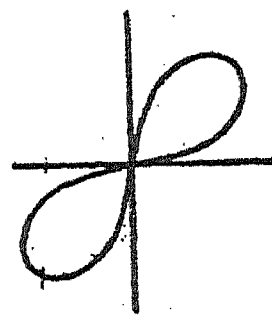
11.



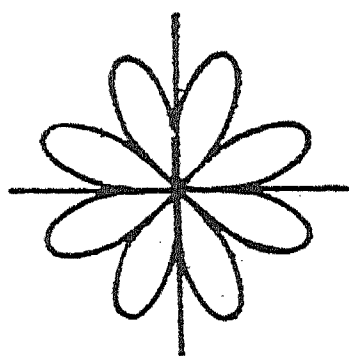
13.



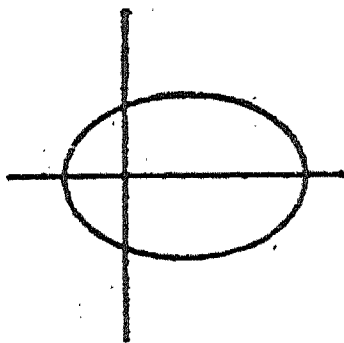
15.



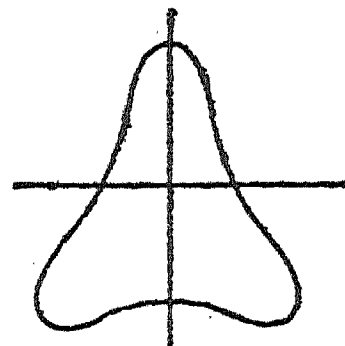
17.



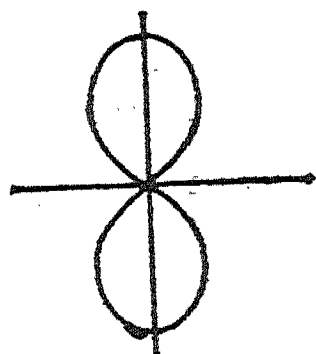
19.



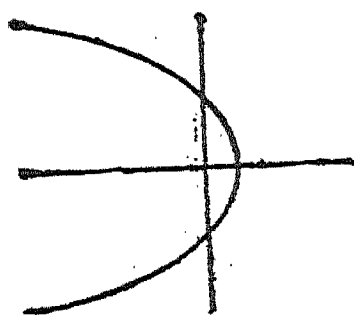
21.



23.



25. $r = \frac{1}{1 + \cos \theta}$



10-3

1. π

3. $\frac{1}{2}$

5. π

7. $\frac{1}{8}(e^{2\pi} - 1)$

9. π

11. $\frac{1}{2}(\pi - 2)$

13. 4sq. in.

15. 4

10 4

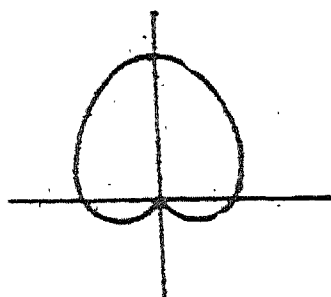
1. $\theta = \text{Arctan } 2 = 1.11$

3. $r^2 + 6r \sin \theta - 7 = 0$

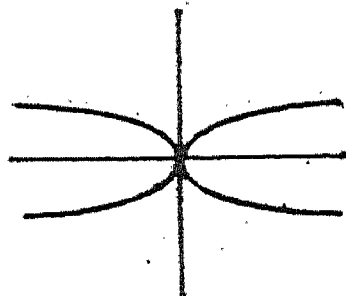
5. $(x^2 + y^2)^3 = 16x^2y^2$

7. $x^2 - 4y - 4 = 0$

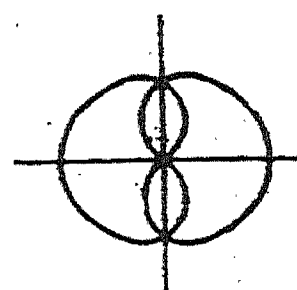
9.



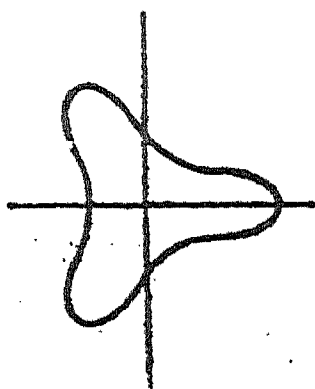
11.



13.



15.



17. $\frac{4}{3}\pi + \sqrt{3} - 4 \ln(2 + \sqrt{3})$

19. $\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}$

21. $r = -80 \tan \theta \sec \theta$

23. $a^2 y^2 = 2ax + 1$

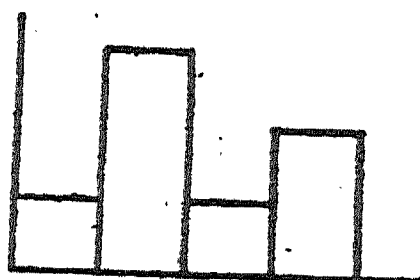
25. 63.4°

11-1

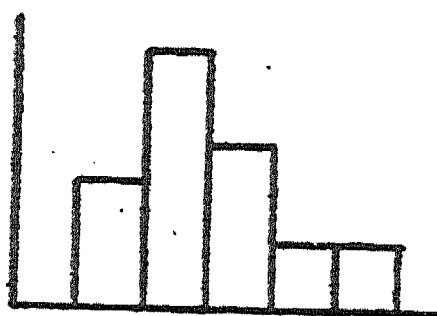
1. 54	3. 27	5. 55	7. 30	9. $\frac{49-51}{1}$	$\frac{52-54}{3}$	$\frac{55-57}{1}$	$\frac{58-60}{2}$
-------	-------	-------	-------	----------------------	-------------------	-------------------	-------------------

11. $\frac{0-9}{0}$	$\frac{10-19}{2}$	$\frac{20-29}{4}$	$\frac{30-39}{3}$	$\frac{40-49}{1}$	$\frac{50-59}{1}$
---------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------

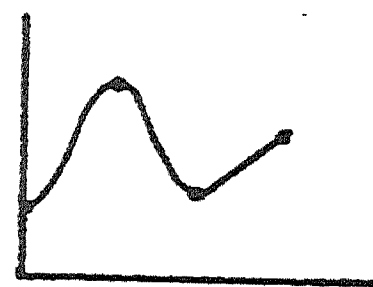
13.



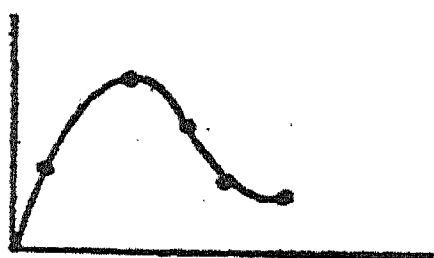
15.



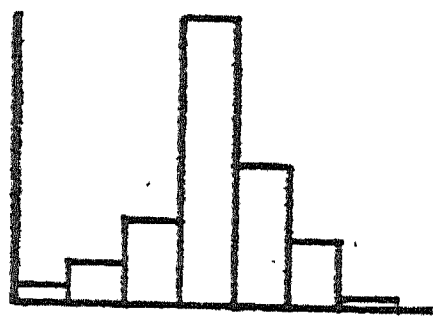
17.



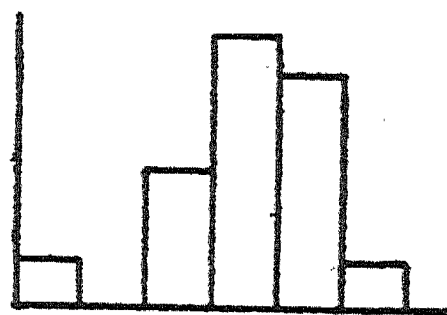
19.



21.



23.



25. 3.435

29. 5, 與 7

11-2

1. 3.2

3. 10.6

5. 5

7. 3.2

9. 10.6

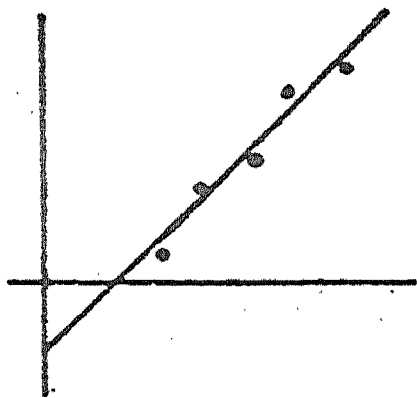
11. 5

13. 57%

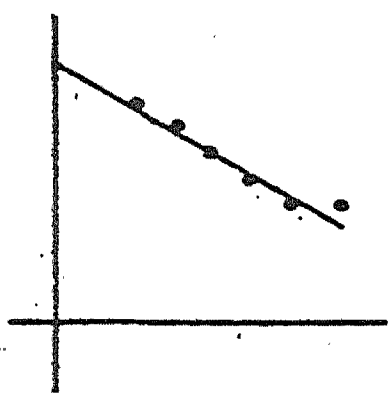
15. 70%

11-3

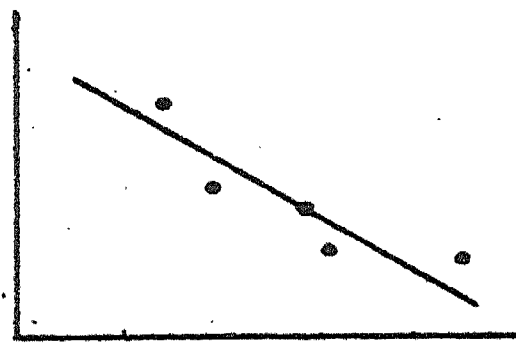
1. $y = (1.0)x - 2.6$



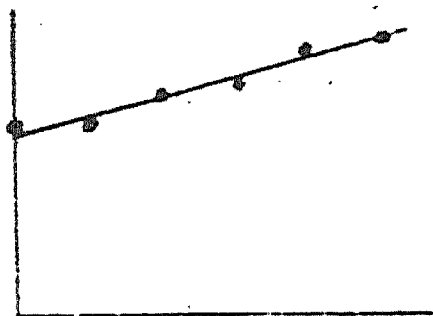
3. $y = -1.77x + 190$



5. $s = -0.7F + 12.3$



7. $n = 8.1t + 596$

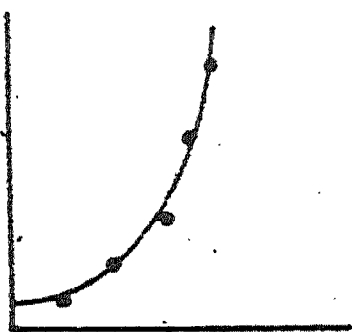


9. 0.985

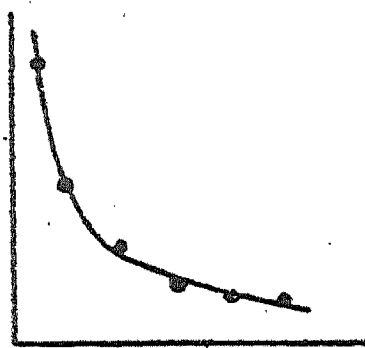
11. -0.90

11-4

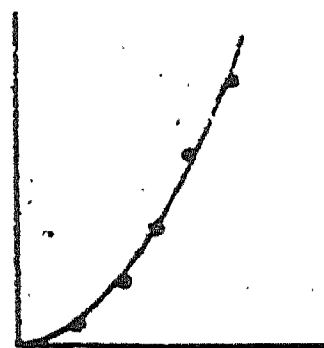
1. $y = 1.96x^2 + 5.2$



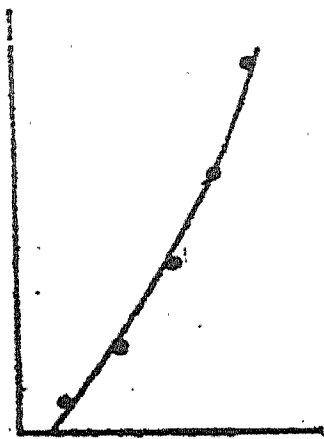
3. $y = 10.9/x$



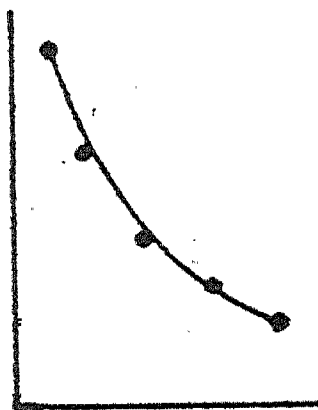
5. $y = 5.95t^2 + 0.55$



7. $w = 33.7(10^t) - 37.1$



9. $c = \frac{480}{\sqrt{n}} + 10$



11-5

1. 3.6

3. 0.8

5. 264

7. 14

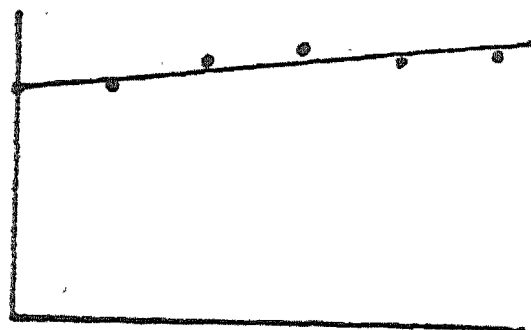
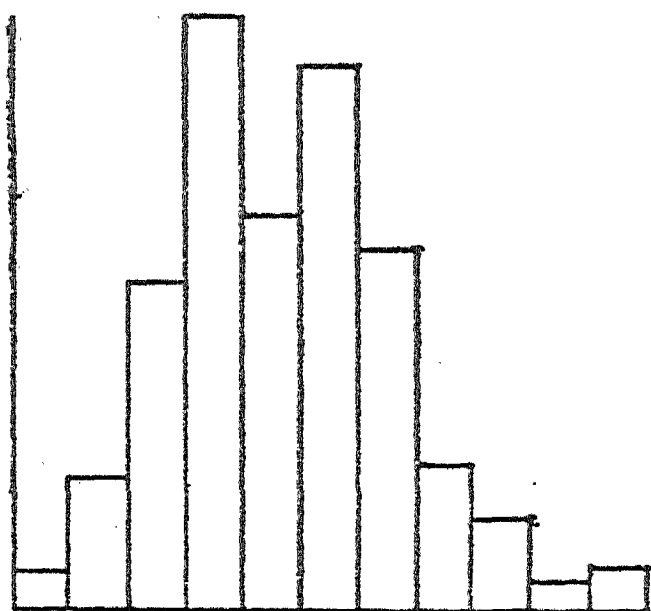
9. 92.7%

11. 1.2%

13. 4

15.

17. $P = 0.985T + 25.0$



19. $y = 488x^2$

21. $P = \frac{335}{S}$

12-1

1. $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$

3. $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \dots$

5. $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$

7. $1 - 2x + 2x^2 - \dots$

9. $1 - 8x^2 + \frac{32}{3}x^4 - \dots$

11. $1 + x + x^2 + \dots$

13. $x - \frac{1}{3}x^3 + \dots$

15. $x + \frac{1}{3}x^3 + \dots$

17. $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \dots$

19. (a), (c) 函數在 $x=0$ 無意義; (b) 各導數在 $x=0$ 無意義.

12-2

1. $1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + \dots$

3. $\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 3!} + \frac{x^5}{2^5 5!} - \frac{x^7}{2^7 7!} + \dots$

5. $1 - 8x^2 + \frac{32}{3}x^4 - \frac{256}{45}x^6 + \dots$

7. $x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{4}x^8 + \dots$

9. $2.63 + 1.44i$

11. $6.08 (\cos 9.5^\circ + i \sin 9.5^\circ)$

13. 0.3103

15. 0.1901

17. $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$

19. $-\frac{d}{dx} \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots \right) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \dots$

21. 0.003099

12-3

1. 1.22

3. 0.09983

5. 2.718

7. 0.9986

9. 0.335

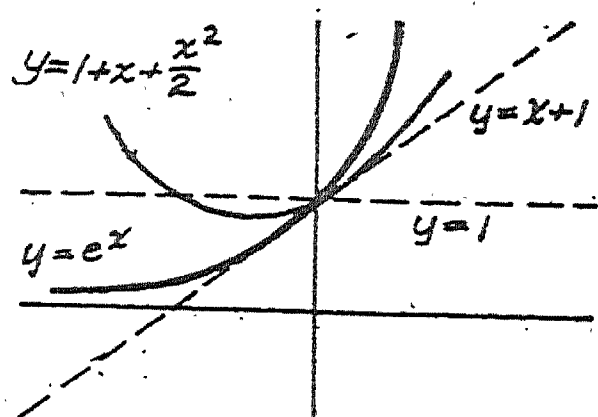
11. 0.8414 13. 1.0488 15. 1.032 17. 0.021
 19. 2.4×10^{-10} 21. $S = 25x - 0.0625x^2$ 23. 66 ft

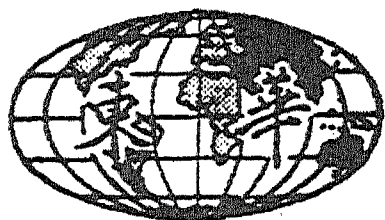
12-4

1. 3.32 3. 2.049 5. 0.5150 7. $e^{-2} \left[1 - (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2!} - \dots \right]$
 9. $\frac{1}{2} \left[\sqrt{3} + \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2!} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^2 - \dots \right]$
 11. $2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2 + \dots$
 13. $1 + 2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + 2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \dots$
 5. 0.111 17. 2.02 19. 0.8746

12-5

1. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{48}x^3 - \dots$ 3. $2x^2 - \frac{4}{3}x^6 + \frac{4}{15}x^{10} - \dots$
 5. $1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \dots$ 7. $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \dots$
 19. 0.259 11. 0.82 13. 1.09 15. 0.9325
 17. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \left(x - \frac{1}{3}\pi \right) - \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{3}\pi \right)^2 + \dots$ 19. $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots$
 21. 23. 1.25 哩





版權所有・翻印必究

中華民國六十二年二月初版

中華民國六十八年三月三版

大學
用書 應用微積分 (全二冊)

下冊 定價 新台幣陸拾元整

(外埠酌加運費滙費)

著者	A. J. Washington
譯者	郭 燮 昌
發行人	卓 鑫 森
出版者	臺灣東華書局股份有限公司 臺北市博愛路一〇五號
印刷者	臺灣中華書局印刷廠 臺北市雙園街六〇巷九〇號

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號
(62025)

