

天体力学基础

编著 易照华

南京大学出版社

天体力学基础

易照华 编著

南京大学出版社

1993·南京

(苏)新登字第 011 号

天 体 力 学 基 础

易照华 编著

*

南京大学出版社出版

(南京大学校内)

江苏省新华书店发行 常熟市印刷二厂印刷

*

开本: 850×1168 1/32 印张: 9.75 字数: 245 千

1993 年 8 月第 1 版 1993 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—1000

ISBN-305-02081-8/P·86

定价: 8.50 元

前 言

本书是根据作者在南京大学讲授“天体力学”课程 30 余年的教材,不断修改编辑而成,现在是天文系的专业基础课内容。成稿后又经过两届学生使用,出版前又进行了修订。

天体力学是一门老学科,是天文学的一个分支,但又同数学和力学(现为一般力学)的关系密切。从历史上看,天体力学与数学和力学同步发展,相互促进;现代天体力学又同计算机科学、航天科学和某些理论物理学(特别是引力物理学)以及一些地球科学(如大地测量学、古地质学和气象学等)联系在一起,建立了一些共同研究领域。

本书虽是天体力学的一本入门教材,但尽可能反映出现代天体力学的面貌。与过去的教材比较,加深了基础理论,增加了重大问题的最新情况介绍;为读者进一步学习和研究专门课题打下基础。

全书分为七章。第一章绪论是介绍天体力学的历史和现状;第二章讲述万有引力定律和天体力学的最基本课题——二体问题;第三章讲天体力学的一个重要基础理论——正则变换,其中包含现代新成果;第四章和第五章讲述天体力学的传统基础理论——摄动理论,包括运动方程建立和分析解法过程,并应用于讨论太阳系稳定性问题;第六章讲述三体问题的基础知识,并介绍有用的一些特殊三体问题;第七章讲述天体力学中应用广泛的分支——天体的形状和自转理论,其中章动理论讲述现代采用的结果,即日本木下宙的刚体地球自转理论和莫洛金斯基(S.M. Molodensky)以及瓦尔(J.M. Wahr)的非刚性改正方法。

每章末附有习题。

阅读本书需要有微分方程、理论力学、线性代数、球面天文以及最变函数方面的基础知识和技能。本书可作为天文学、引力物理学、天文大地测量学、航天轨道设计与跟踪等专业的大学生教材和上述学科工作者的参考书。

在这次定稿过程中，参考了黄天衣和夏一飞同志有关岁差和章动理论的手稿，使得本书第七章内容更完整，特此致谢！

易照华

1992年2月于南京大学

目 录

前言

第一章 绪论	(1)
第一节 天体力学是天文学的一个分支	(1)
第二节 天体力学的诞生和奠基	(2)
第三节 19 世纪后半叶的新发展	(4)
第四节 现代天体力学的主要领域	(7)
第二章 万有引力定律和二体问题	(11)
第一节 万有引力定律的建立和发展	(11)
第二节 万有引力的位函数	(16)
第三节 二体问题的运动方程和积分	(24)
第四节 二体问题的轨道分类,开普勒方程	(29)
第五节 二体问题的解的常用形式	(34)
第六节 星历表基本公式	(38)
第七节 初值和轨道根之间的关系	(39)
第八节 轨道计算原理	(44)
第九节 引力作用范围	(48)
第十节 椭圆运动的几个重要展开式	(53)
第三章 正则方程组和正则变换	(60)
第一节 数学符号,梯度向量	(60)
第二节 哈密顿正则方程	(65)
第三节 正则变换及其充要条件	(68)
第四节 隐函数形式的正则变换	(76)

第五节	正则扩充·····	(80)
第六节	解正则方程组的哈密顿-雅可比方法 ·····	(82)
第七节	用哈密顿-雅可比方法解二体问题 ·····	(89)
第八节	常用的几种正则共轭变量·····	(95)
第九节	正则变换概念的推广·····	(99)
第十节	用李氏级数表示的正则变换·····	(103)
第四章	受摄运动方程 ·····	(118)
第一节	摄动和吻切轨道·····	(118)
第二节	正则形式的受摄运动方程·····	(120)
第三节	拉格朗日行星运动方程·····	(122)
第四节	消除奇点后的受摄方程·····	(128)
第五节	摄动导数·····	(132)
第六节	用摄动加速度分量表示的受摄方程·····	(136)
第七节	天体力学中常见的摄动力·····	(143)
第五章	受摄运动方程的分析解法原理 ·····	(149)
第一节	受摄运动方程的级数解形式·····	(149)
第二节	摄动函数展开的基本方法·····	(156)
第三节	纽康算子,摄动函数的展开结果 ·····	(163)
第四节	一阶摄动的讨论·····	(171)
第五节	摄动长期项的计算方法·····	(177)
第六节	关于太阳系的稳定性问题·····	(186)
第六章	三体问题 ·····	(197)
第一节	多体问题的运动方程和积分·····	(197)
第二节	雅可比坐标系 ·····	(202)
第三节	用雅可比变换降阶·····	(205)
第四节	三体问题的定型解·····	(212)
第五节	限制性三体问题·····	(217)
第六节	圆型限制性三体问题·····	(221)

第七节	双不动中心问题·····	(234)
第七章	天体的形状和自转理论·····	(242)
第一节	自转流体平衡形状的研究方法·····	(243)
第二节	马克洛林体和雅可比体·····	(247)
第三节	洛熙极限·····	(255)
第四节	不均匀流体的平衡形状问题·····	(259)
第五节	欧拉角和昂多瓦叶变量·····	(260)
第六节	刚体地球的运动方程·····	(268)
第七节	自由刚体的运动·····	(274)
第八节	岁差章动方程解法原理·····	(277)
第九节	摄动函数的展开·····	(279)
第十节	章动·····	(283)
第十一节	岁差·····	(286)
第十二节	地球非刚性改正问题·····	(290)
第十三节	数值表示和新进展·····	(293)
附录一	IAU 1976 天文常数系统 ·····	(297)
附录二	IAU 1984 采用的瓦尔章动公式 ·····	(299)
主要参考文献	·····	(304)

第一章 绪 论

第一节 天体力学是天文学的一个分支

天体力学是研究天体的运动和形状的学科。天体力学中所指的天体范围是在不断发展,牛顿时代是局限在地,月和金木水火土五大行星;19 世纪增加了太阳系中的大量小行星,天然卫星,彗星等小天体;现代天体力学中又增加了大量人造天体以及各级恒星系统。

但是天体力学中只研究天体的一个方面,即运动和形状。所谓运动是指力学运动(即机械运动),包括天体质心在空间的移动以及天体绕其质心的转动(自转)。形状包括内部密度分布结构,对非刚性天体而言,与自转有密切关系。现代力学已证明,天体的空间移动同转动之间有相互影响,对很多类型天体已不能忽视。

讨论天体的力学运动,要用到力学理论。影响天体运动的力主要是引力,包括天体之间的相互引力和天体内部各质点的自引力。人们对引力的认识和相应的理论在不断发展。三百年以来,都是用牛顿力学(包括运动三大定律和万有引力定律以及时空观点)作为研究天体运动的基础,因而称天体力学为牛顿力学的一部份。很多书中直接在天体力学定义中写明是用牛顿力学研究天体的运动。现在已证明牛顿力学在天体运动研究中有偏差,但多数课题在牛顿力学精度下已能解决,故天体力学目前仍以牛顿力学为基础。对于少数高精度课题,现用爱因斯坦广义相对论或其他新引

力理论的一阶近似方法，改进牛顿力学的结果。这个领域称为后牛顿天体力学，属于相对论天体物理学。较严格地在相对论框架下建立天体的运动理论，现称为相对论天体力学，还在进行中，尚未成熟，只作为天文学和引力物理学的一个共同研究领域。

天体的运动和形状的课题中，除少量研究平衡形状课题以静力学为主外，绝大多数都是研究动力学课题。研究对象又逐渐牵涉到天文学中的几乎所有天体，故有的国家称为“动力天文学”（如美国）。

天体力学是基础科学天文学的一个老分支，为二级基础学科，但有较广泛的应用。现代天体力学除传统的编历并用于航海航空外，人造天体的运动已成为航天科学，大地测量学的重要组成部份，大量应用于军事和经济建设。

第二节 天体力学的诞生和奠基

在牛顿以前，天文学主要研究天体在星空中的视位置和视运动规律，是经典的天体测量学领域。长期对大行星的视运动研究，肯定了行星和地球是在绕太阳运动。开普勒（J. Kepler, 1571—1630）提出的行星运动三大定律，是对行星运动很准确的描述。但是为什么行星要这样绕太阳运动，当时只有一些猜想。

另外，中世纪结束后出现了力学萌芽。达·芬奇（Leonardo da Vinci, 1452—1519）在机械研究中肯定了力的存在，伽里略（G. Galileo, 1564—1642）在自由落体及其他试验中提出了力学的一些基本量（如速度，加速度，动量等）以及一些重要实验结果，为力学正式诞生创造了条件。惠更斯（C. Huygens, 1629—1695）更进一步研究了曲线运动，特别在圆周运动研究中发现了离心力，并给出了表达公式，为万有引力定律的发现作出贡献。

17 世纪中已有不少人在牛顿以前把力学概念与行星运动联系起来。开普勒在《火星论》中就提出“两个孤立物体要彼此相向运动,像两块磁铁相互结合一样,……;地球潮汐是月球引力造成…”。笛卡尔(R.Descartes,1596—1650)提出微粒旋涡论,太阳在大旋涡中心,带动行星绕太阳转。胡克(R.Hooke,1635—1703)认为在行星轨道上的运动是抛出它的原始力与太阳引力组合的结果。这样历史条件下,万有引力定律和天体力学的出现成为必然。

牛顿(I.Newton,1642—1727)完成这个历史任务。他在1666年回乡躲避瘟疫时,就对引力认真研究,并得到了行星在圆轨道上所受太阳的引力和运动的离心力平衡时,引力大小应与距离的平方成反比。他在具体研究中用了开普勒三定律,因而就解释了行星绕太阳按此三定律运动的原因。但是有两个问题未解决:一个是行星轨道不是圆而是椭圆;二是天体不是质点,有一定形状大小,当时地球半径尚未测准,对月球运动解释尚有较大偏差。故牛顿没有公布结果,直到1685年,牛顿用更新的数学力学方法证明了椭圆运动也符合反平方引力定律;球对称密度分布的物体的引力与质量集中于质心的质点引力相同。同时用更准的地球半径值更好地解释了月球运动。在惠更斯鼓励下,并在哈雷(E.Halley,1656—1742)资助下,于1687年出版了历史名著《自然哲学的数学原理》。牛顿力学正式诞生,用它来研究天体运动和形状的天体力学也同时诞生。

但是牛顿并没有提出天体力学这个学科名称。他局限在二体问题范围内研究出圆锥曲线的普遍轨道,并用于解释行星和彗星的运动;从地球的自转肯定了扁球体形状;从月球轨道不是固定椭圆而萌发了摄动的概念。这些内容已标志着天文学已从过去只研究天体的视运动而深入到研究真运动。这是天文学发展史中的第一次巨大飞跃。

《自然哲学的数学原理》出版后的 50 年内,天体运动的研究进展不大,这与数学和力学的发展有关。另外,这部里程碑价值的伟大著作中的观点和理论,真正被人们接受是需要一段时间。随着数学分析和力学的迅速发展,天体力学也加速了奠基过程。

18 世纪中叶到 19 世纪初是天体力学的奠基时期,奠基者们都是当时的数学分析和分析力学的开拓者。主要代表为欧拉(L.Euler,1707—1783),克莱洛(A.C.Clairaut,1713—1765),达朗贝尔(J.D'Alembert,1717—1783),拉格朗日(J.L.Lagrange,1736—1813)和拉普拉斯(P.S.Laplace,1749—1827)。最后由拉普拉斯集其大成,建立了经典天体力学的主要内容——摄动理论,并对当时已发现的各类天体分别建立了运动理论和历表。精度符合当时的观测水平。

拉普拉斯在 1798 年出版的一本著作中,第一次提出了天体力学这个学科名称。他在书中写道:“用万有引力定律研究太阳系及宇宙里类似系统中的固体和流体的平衡和运动理论,组成了天体力学”。他在 1799—1825 年出版的历史性巨著“天体力学(Mécanique Céleste)”,共五卷 16 册,就是经典天体力学的代表作。到此为止,天体力学才正式建成,不久由勒威耶(U.Leverrier,1811—1877)用天体力学理论计算预言而发现了海王星,表明这个学科已初步成熟,成为当时天文学的主流。

第三节 19 世纪后半叶的新发展

到 19 世纪后半,有三个因素促使天文学形成发展高潮。首先是照相和分光方法用于天文观测,使天文学不仅能研究天体的力学运动,并能研究天体的物理本质,诞生了新分支天体物理学,是天文学发展史中的第二次飞跃;天体运动的有些资料,可用物理方法

获得。其次是发现了大量小行星,彗星和卫星,传统摄动理论不大适用,要求改进研究方法。还有航海和大地测量精度要求提高,需要更准确的历表。在大批数学和力学名家参加下,天体力学发展也形成高潮。

这次高潮从19世纪中到20世纪初。主要代表人物有德洛内(C-E. Delaunay, 1816—1872), 汉森(P. A. Hansen, 1795—1874), 希耳(G. W. Hill, 1838—1914), 纽康(S. Newcomb, 1835—1909)和邦加雷(H. Poincare, 1854—1912)。内容主要有:

1. 建立了适用于各种天体,精度更高的摄动新方法。由于观测精度提高和太阳系大量小天体的发现,传统的拉格朗日-拉普拉斯-勒威耶摄动方法已不适应要求。针对月球和小行星运动,出现了很多不同的摄动方法。其中有代表性而且至今仍有生命力的为下面三种:

① 德洛内的正则变换方法。这是以当时新发展的分析力学为基础,德洛内用一系列正则变换来解天体运动的正则方程组。进行一次变换,相应的解就精确一步。这种方法不仅是天体力学中能用,而且成为正则方程组的一种原则解法。到19世纪末和20世纪中又得到后人继续发展,在人造卫星运动中取得了巨大成功。

② 汉森的坐标摄动方法。在他提出的理想坐标基础上,把问题化为求三个摄动量。并在摄动函数展开过程中采用调和分析方法,使得求解精度提高。当时提出后在月球和小行星运动中都比较成功,受到普遍重视。20世纪以来又在继续发展。

③ 希耳的中间轨道方法。希耳在月球运动的简化模型中得到一种周期轨道,在它基础上再加摄动改进,得到月球运动较好的解。所用的周期轨道称为中间轨道,并公认这种方法为一种普遍的中间轨道方法,后来有不少人采用。希耳的月球运动理论后经布朗(E. W. Brown, 1866—1938)改进和实用化成为国际上通用的月球历表依据,一直使用到1984年。

2. 建立了历书天文学。纽康在担任美国海军天文台领导人以后,致力于提高历书精度。通过改进摄动方法,建立大行星和月球的运动理论以及相应的运动表(其中木星和土星的运动由希耳完成,月球运动用希耳-布朗方法);并根据全世界的观测资料改进有关常数,并提出天文常数系统和相应的参考系。这就形成了天体力学和天体测量学的共同分支,历书天文学,在理论和应用上都有重大贡献。

3. 开创了天体力学定性理论。以邦加雷和李亚普诺夫(A.M.Ляпунов,1857—1918)创立的数学定性理论为基础,用于天体运动和形状课题,就开创了一个新分支,天体力学定性理论。当时包含内容有:

① 天体自转(流体)时的平衡形状及其稳定性。邦加雷得到一些新的平衡形状,由李亚普诺夫研究了稳定性。

② 天体运动的周期轨道及其稳定性研究。这也是由庞卡莱创立,后达尔文(G.H.Darwin,1845—1912)等发展而形成活跃领域。

③ 天体运动的稳定性和终结轨道的研究。这是讨论时间趋于无穷后,运动和轨道的性质。

定性理论出现是天体力学发展史中的重大突破,这就形成了与传统天体力学以摄动理论(分析方法)不同的研究方向。

4. 形成了天体力学数值方法。用数值方法解天体运动的微分方程,在19世纪初期就已出现,但未受到重视。20世纪初期,由科威耳(P.H.Cowell,1870—1949)和克洛梅林(A.C.Crommelin,1865—1939)创立的数值方法,用于研究哈雷彗星的运动,并准确预报了此彗星的回归。因此受到重视而形成天体力学的一个分支,与传统分析方法以及新建立的定性方法并列为第三类方法。

这个时期结束时,正好是爱因斯坦(A.Einstein,1879—1955)

提出广义相对论,也是一种新的引力理论。天文学家们预感到会对天体运动研究有重大突破。但因观测精度限制和用广义相对论严格建立天体运动理论上的困难,在相当长一段时间内进展不大。

第四节 现代天体力学的主要领域

20 世纪 50 年代开始,有三个因素促使天文学(包括天体力学)又形成发展新高潮。

一是人造天体的出现,不仅为天体增加了大量新成员,更主要是用航天技术可探测到研究天体运动和物理本质的更新更精确的资料。由此可观测到天体各种波段的辐射,在 60 和 70 年代有大量重大发现。这是天文学发展史中的第三次飞跃。对天体力学而言,研究人造天体的轨道设计和运动理论是一项新任务。为此大批数学,物理以及工程方面的专家参加进来,形成了研究高潮。通过人造卫星研究又为天体力学开拓了更广泛的应用,由此建立了新分支——天文动力学。推动了摄动理论和数值方法迅速发展。

二是快速电子计算机的广泛应用,不仅较好地解决了时间短的实际问题,还对运动的长时期行为进行数值探索,甚至分析方法的推导都可用计算机来实现。故可称计算机为天体力学的实验室,促进了摄动理论,数值方法同定性理论的进一步发展。

三是观测新技术的出现,提高了天体运动的实测资料精度,反过来促进理论精度要相应提高。除航天技术外,新技术还有多卜勒(Doppler)测速,激光测距,甚长基线干涉(VLBI)等,分别比传统光学定位观测提高 1—3 量级。原有历表都不符合要求,同时也扩大了天体力学的应用范围。

按现有的学科内容,天体力学有下列研究领域(一般可称为三级学科)。

1. 摄动理论。这是经典天体力学主要内容,现代天体力学中有重大发展。它是以二体问题的解作为基本解,把一切使天体偏离二体问题的因素都称为摄动,并用分析方法讨论天体受到摄动时的运动方程的解法。其中包括变量的选择,运动方程的形式,用分析方法解方程的途径,求积过程以及积分常数的确定和改进等。少数课题不用二体问题的解作基本解,而采用另外已知轨道(即中间轨道),再讨论摄动。还有一些是分析同数值结合的半分析方法,也在这个领域中。不同类型的天体受摄运动有不同的摄动理论。

2. 天体力学定性理论。近30年来有重大发展。60年代的KAM理论提出是重大贡献之一;动力系统的数值方法建立为天体力学定性理论开拓出新的途径,并有迅速发展;70年代中的三体问题定性研究,特别是运动区域和拓扑结构也有重大成果。

3. 天体力学数值方法。在快速电子计算机广泛用于天体运动课题后,发展更快。一方面对原有科威耳方法等进行改进,又提出了很多新计算方法。针对奇点附近情况又有正规化方法。由于计算时间长,又出现误差传播累积问题和稳定性问题,以及语言系统问题的研究。

4. 天体的形状和自转理论。由于空间探测和人造天体运动研究的不断改进,对天体形状和自转方面也有大量更准确的资料。除了地球形状,内部结构及自转理论不断精确外,对行星形状和自转模型和演化也提到日程。近十年来用天体力学方法对环状天体和星系形状结构的研究也活跃起来。

5. 天文动力学。是人造天体出现以后的新研究领域。按人造天体类型又分为:

① 人造地球卫星动力学。其中分为三段:发射段,轨道航行段和返航段。轨道航行段以地球引力为主,加上日月引力及大气阻力等摄动,是纯天体力学课题。发射段和返航段中要加上火箭飞行动力学。

② 月球火箭动力学:内容有各种类型(击中,航测,月球卫星和软着陆等)轨道的设计,轨道飞行动力学等。也分发射段,飞行段,着陆或定轨段;其中发射和着陆段以火箭推力为主。

③ 行星际航行动力学,包括各种类型行星际飞行器的轨道设计和飞行动力学。类型很多:只到达一个行星附近的飞行器已发射上百次,也分为发射段,轨道飞行段(主要考虑太阳引力)和进入目标行星作用范围段;近年发射了能一次探测多个行星的飞行器(如旅行者 1,2 号),轨道设计很复杂。由于行星际航行时间长,故除共同考虑节能轨道外,还要考虑缩短时间,而且还有导航问题。

6. 历书天文学。60 年代后有重大进展。为了提高历表精度,投入了大量人力。如美国为建立 DE 历表花费 20 年,于 1982 年完成 DE200/LE200;虽已在 1984 年国际上采用,但仍在继续改进。西欧长期建立太阳系天体的分析历表,现在月球的半分析历表 ALE2000 已采用,行星历表 VSOP 82 也实用化。由于精度高,不仅考虑多体问题和行状摄动,还要考虑相对论效应和参考系问题以及天文常数系统。

7. 多体问题。这是天体力学同一般力学和应用数学之间的共同研究领域,也就是质点组动力学。近 20 多年来在数值方法和定性研究上有重大进展。多体数值模拟已广泛用于星系动力学,三体问题定性研究有突破,都成为活跃领域。另外在限制性问题上,近年有新的开拓,把传统的限制性三体问题(二大一小),推广到 n 大 k 小的 $n+k$ 体问题,适用于小行星和天然卫星情况。

8. 恒星系统动力学。为天体力学和天体物理学的共同研究领域。对象为双星,聚星,星团,星系。天体力学只讨论动力学,而且不用统计方法。近 20 年来数值模拟方法广泛应用后有很大进展。

9. 动力演化。也是天体演化学的一个研究领域。由于很多天体系统都在相当长时期内是以力学作用为主(如太阳系及一些

聚星,星团),动力学演化成为主要课题。也可以把这个领域的课题分别归到多体问题,天体力学定性理论以及天体的形状和自转理论。

10. 相对论天体力学。是1972年前苏联勃龙别格(B. A. Брумберг, 1933—)首先提出,目标是要在广义相对论基础上建立天体的运动和形状理论。基础理论有相对论质点组动力学和相对论延伸体动力学,其中除参数化后牛顿多体问题以及高阶后牛顿二体问题有较好理论外,其他课题还不成熟。联系天体情况的领域有相对论太阳系动力学和相对论恒星系统动力学,都还在建立过程中。这也是与相对论天体物理学及引力理论共同的领域。

第二章 万有引力定律 和二体问题

第一节 万有引力定律的建立和发展

本书仍以牛顿力学为基础，首先是万有引力定律。牛顿的万有引力定律是力学和天文观测的结合产物。当时根据天文观测对行星运动的最准确描述是开普勒三大定律，下面我们用力学原理从开普勒三大定律推导出牛顿万有引力定律。

1. 开普勒三大定律的数学化。用现在的数学语言描述为：

第一定律：行星绕太阳运动的轨道为椭圆，太阳位于椭圆的一个焦点上。

因椭圆为平面曲线，用极坐标 (r, θ) 表示的轨道方程为

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad (2.1)$$

其中以太阳为极点， θ_0 为极轴到椭圆近点方向的转角， e 为椭圆偏心率，并有 $0 \leq e < 1$ ； p 为椭圆半通径。

第二定律：行星在椭圆轨道上运动时，向径所扫过的面积与经过的时间成正比。

这意味着行星向径扫过面积变率为常数。用 h 表示此常数的两倍，则有

$$r^2 \dot{\theta} = h \quad (2.2)$$

其中 $\dot{\theta} = d\theta/dt$ ，以后都这样表示。

第三定律：行星绕太阳公转周期平方与行星轨道椭圆半长径立方成正比。

用 T, a 表示行星公转(恒星)周期和轨道椭圆半长径, 即有

$$T^2 = k a^3 \quad (2.3)$$

其中 k 对所有行星而言是同一常数。

2. 牛顿万有引力定律的推导。由于轨道是平面曲线, 则可用极坐标中加速度 $\vec{a}$ 在径向和横向分量 a_r, a_θ 表达式:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \quad (2.4)$$

按照第二定律(2.2)式, $a_\theta = 0$, 表明加速度为径向, 即行星所受到的作用力始终在与太阳的联线上, 为有心力。力的大小为

$$F = m a_r = m (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2)$$

其中 m 为行星质量, 用(2.2)式及 $u = 1/r$ 可化为:

$$F = - m h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \quad (2.5)$$

这是有心力情况下著名的比内(Binet)公式。

再用第一定律(2.1)式代入(2.5)式得:

$$F = - \frac{m h^2}{p} u^2 = - \frac{m h^2}{p} \frac{1}{r^2}$$

这表示力的大小与行星同太阳距离的平方成反比, 负号表示力来自太阳方向, 即为引力。牛顿认为引力大小应与太阳质量 M 成正比, 故上式记为:

$$F = - G \frac{M m}{r^2}, \quad G = \frac{h^2}{p M} \quad (2.6)$$

G 就是万有引力常数。但这仅就一个行星运动而言, G 是否对所有行星都是同一常数?

面积常数 h 可用行星运动一周来求出, 行星公转一周需时为公转周期 T , 向径扫过面积为整个椭圆面积, 因此有

$$h = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{T}$$

代入(2.6)式得:

$$G = \frac{4\pi^2}{M} \cdot \frac{a^3}{T^2} \quad (2.7)$$

其中利用了关系 $p = a(1-e^2)$; 但根据第三定律(2.3)式, a^3/T^2 对所有行星而言是同一常数, 故 G 也是一样。

值得注意一点, 推导中只说了行星受太阳引力, 实际上太阳也受行星同样大小方向相反的引力, 故也有相应运动。用相对运动讨论时, (2.3)式中的常数 k 同行星质量有关, 将在后面说明。

3. 万有引力常数问题。牛顿万有引力定律中的常数 G 已测定过很多次, 现在仍采用地面实验的 1973 年所定值

$$G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ 米}^3 \cdot \text{公斤}^{-1} \cdot \text{秒}^{-2} = 6.672 \times 10^{-8} \text{ c.g.s.} \quad (2.8)$$

这只有 4 位有效数字。用天文观测只能定出 G 与某天体质量乘积; 如设 M, E 表示太阳和地球的质量, 1976 年天文常数定为:

$$\left. \begin{aligned} GM &= 1.32712348 \times 10^{20} \text{ 米}^3 \cdot \text{秒}^{-2} \\ GE &= 3.986005 \times 10^{14} \text{ 米}^3 \cdot \text{秒}^{-2} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

这些量的有效位数很多, 但无法单独定准 G 值。由此太阳和地球质量也只有 4 位有效数字。

由(2.8)式知 G 的单位, 故其数值与单位有关。在天文学中常用下面两种单位:

① 讨论行星运动时, 以太阳质量为单位, 平太阳日为时间单位, 天文单位(1976 年值为 $1.49597870 \times 10^{11}$ 米)为距离单位; 相应的 G 记为 k^2 , k 称为高斯(Gauss)常数, 1976 年定作定义常数:

$$k = 0.01720209895 \quad (2.10)$$

有时在理论推导中, 为简化起见, 时间单位取为 $1/k$ (58.132471)平太阳日, 相应的 $G = 1$ 。

② 在讨论人造地球卫星运动中,常取地球质量为单位,地球赤道半径(1976 年值为 6378140 米)为距离单位,时间单位用秒,则 $G = p^2$, $p = 1.2366449 \times 10^{-3}$; 若时间单位改用 $1/p$ 秒 = 808.6395 秒,则相应 $G = 1$ 。

在相对论天体力学中,取光速,万有引力常数及波耳茨曼(Boltzman)常数为单位。

近年来讨论万有引力常数是否为常数问题,从月球火箭飞行精确定位以及宇宙学中一些资料表明, G 在逐渐减少。按宇宙学理论为

$$\frac{\dot{G}}{G} = \sigma H_0 \quad (2.11)$$

其中 H_0 为宇宙学中的哈勃(Hubble)常数,根据最近的测定值约 0.5×10^{-10} 年⁻¹; σ 为无量纲参数,可用天文观测定出,近年从天文资料处理得到的结果列于表 2.1。

表 2.1 G 是否为常数的检验

方 法	σ 数值	作者
太阳演化	$ \sigma < 2$	Chin, Stothers(1976)
月食和月掩星	$ \sigma < 0.8$	Morrison(1973)
	$\sigma = -(0.6 \pm 0.3)$	Van Flandern(1978)
	$\sigma = -(0.5 \pm 0.3)$	Muller(1978)
	$\sigma = -(2.5 \pm 0.7)$	Newton(1979)
雷达观测行星和飞行器	$ \sigma < 8$	Shapiro(1971)
	$ \sigma < 3$	Reasenberg (1978)
激光测月	$ \sigma < 0.6$	Williams(1978)

已有很多种引力理论得到 G 在变化,但广义相对论还是认为 G 是常数。但是所有不同于广义相对论的引力理论,所得结果同观测资料的差别,最好的也与广义相对论相近。表 2.1 的值也说明 σ 在观测极限上。

4. 引力定律的发展。牛顿的万有引力定律出现后在天体力学的成功,公认为是宇宙的普遍适用定律。100年后,拉普拉斯把万有引力定律扩充为下面四点:

① 任何两个质点之间存在引力,大小与质量成正比,与距离平方成反比;

② 任意形状和结构的物体对外一质点的引力,等于物体内外各质点对外面质点引力的合力(向量和);

③ 引力传播速度为无穷大;

④ 引力与物体的运动状态无关。

其中前两条为引力定律本身的实用化,③是从当时发现的月球加速现象归结于引力传播速度有限产生的,并从加速度数值估计出引力传播速度大于光速的700万倍,可认为是无穷。现在看来,③、④已不能成立,但反映出拉普拉斯对引力本质的探索。他还把引力普遍化,认为分子运动,热,光的折射,甚至化学反应都是分子间的引力结果。

牛顿发现万有引力定律而创立了天体力学,但200年后的天体力学也发现了万有引力定律的偏差。海王星发现者勒威耶在巴黎天文台任职后,从多年的观测资料同天体力学理论计算结果比较中,发现水星近日点进动量不一致,观测值比理论值多38 /百年(1859年)。但他没有怀疑万有引力定律,而认为有可能是水内行星存在。后纽康根据更准的天文常数值,把这个偏差订正为43 .11 /百年,纽康首先怀疑反平方引力定律,认为定律中的 r^{-2} 应改为 $r^{-2-\epsilon}$,从水星近日点进动偏差值反推出 $\epsilon = 0.0000001574$ 。后又对其他大行星和月球运动情况讨论,发现各自得到的 ϵ 值不同。看来不是问题关键。

1915年,爱因斯坦提出广义相对论,是引力的一种全新的观点。认为引力是时空的特性,时空特性由表达它的度规决定,而度规是爱因斯坦场方程的解。在弱引力场和慢速运动情况下,可用

近似方法解出度规。零阶近似与牛顿力学结果一致，一阶近似就称为后牛顿近似。表达近似程度阶数的参量为 $\lambda = 2GM/c^2 r$ ，在太阳系情况中 M 为太阳质量， c 为光速， r 为所讨论的检验体到太阳距离。在水星轨道处的 $\lambda \simeq 10^{-7}$ ，这表示牛顿力学的偏差量级，与水星近日点进动的偏差一致。故在后牛顿近似下，较完满解释了水星近日点进动问题，成为广义相对论的第一个成功的检验。

60 年代中出现了大批新的引力理论和一些实验检验技术，形成了新学科——引力物理学，加深了对引力本质的研究。但到 80 年代初，这些上百种引力理论相继退出历史舞台，只剩下广义相对论和另外几种新理论在继续发展。

第二节 万有引力的位函数

万有引力定律只对质点，但天体中很大一部分不能看作质点，需要建立各种模型。

1. 质点组引力的位函数。在质点组动力学中，有质点组系统的势能和势函数定义。这里提出的位函数与势函数性质相似，但有两点不同：①量纲不同，位函数对坐标系的梯度代表受力质点的加速度；而势函数的梯度代表力。②势函数可以是整个质点组系统共同的量，位函数只能对某一质点而言。

设 P 为某一质点，质量为 m ；受到 N 个质点 P_i 的万有引力。设 m_i 、 $\vec{r}_i$ 为 P_i 的质量和到 P 点距离向量；在某惯性坐标系中，设 $\vec{r}$ 为 P 点的位置向量，根据牛顿力学可得 P 点在 P_i 引力作用下的加速度为

$$\ddot{\vec{r}} = - \sum_{i=1}^N \frac{Gm_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i} = - \sum_{i=1}^N \frac{Gm_i}{r_i^3} \vec{r}_i \quad (2.12)$$

设 (x, y, z) ， (x_i, y_i, z_i) 分别为 P 和 P_i 的坐标，有

$$\vec{r}_i = (x - x_i, y - y_i, z - z_i)$$

容易看出

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_i} \right) = - \frac{x - x_i}{r_i^3}$$

即

$$\nabla \left(\frac{1}{r_i} \right) = - \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \quad (2.13)$$

此可化(2.12)式为:

$$\vec{r} = \nabla U, \quad U = \sum_{i=1}^N \frac{Gm}{r_i} \quad (2.14)$$

这里的 U 是数量, 称为加速度向量的位函数。容易验证, 此位函数 U 满足拉普拉斯方程:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (2.15)$$

2. 球对称天体的引力位函数。一些天体的密度分布是或很接近于球对称, 如气壳, 近球状天体等。

先考虑均匀球壳情况。设 W 为均匀球壳, 厚度为 dr , 半径为 r , 密度为 ρ ; 设 P 点到球壳 W 的中心 O 点距离为 R 。把球壳看作质点组, 并分为无穷多个环带, 都与 $\vec{OP}$ 垂直, 每个环带上的点与 P 点距离相等。图 2.1 中为在 A 处的一环带, 环上各点到 P 点的距离为 x , 宽度为 $r d\theta$, 其中 $d\theta$ 为宽度对应的球心角, A 处此环带位置由 θ 角确定。

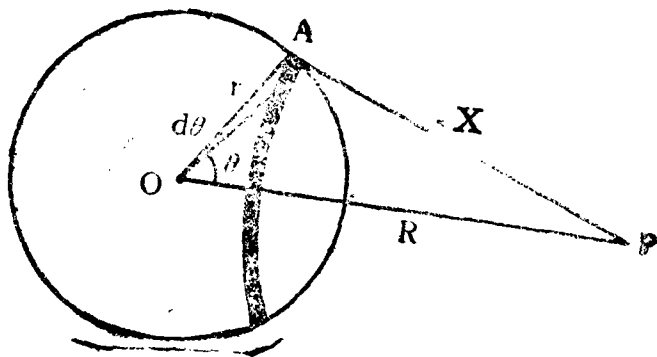


图 2.1

由于质点组对另一质点 P 引力的位函数 (2.14) 式只同距离和质量有关, 而环带各点与 P 点距离都是 x , 故对 P 点位函数应为

$$dU = \frac{GdM}{x}$$

dM 为环带质量, 应为 $\rho dr dS$, 其中 dS 为环带面积 $2\pi r^2 \sin\theta d\theta$ 。再用三角形 OAP 关系知

$$x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos\theta$$

可得 $x dx = Rr \sin\theta d\theta$ 。

代入 dU 式子成为

$$dU = 2\pi G \rho \frac{r}{R} dr dx$$

整个球壳对 P 点位函数为

$$U = \int_{x_1}^{x_2} dU = 2\pi G \rho \frac{dr}{R} \int_{x_1}^{x_2} dx \quad (2.16)$$

① 若 P 点在球壳外, $x_1 = R - r, x_2 = R + r$,

$$U = \frac{4\pi r^2 G \rho dr}{R} = \frac{GM}{R} \quad (2.17)$$

其中 M 为整个球壳质量。由此可知均匀球壳对外面一质点的引力与球壳质量集中在中心时情况相同。

② 若 P 点在球壳内, $x_1 = r - R, x_2 = r + R$,

$$U = 4\pi r G \rho dr = \frac{4\pi r^2 \rho G dr}{r} = \frac{GM}{r} \quad (2.18)$$

由于在此问题中 r 为常量, 与 P 点位置无关, 应有 $\nabla U = 0$ 。故有: 均匀球壳对内一质点的引力和为 0。

③ 若 P 点在球壳上时, (2.17)、(2.18) 式统一, 但应记为

$$U = \frac{GM}{R}, \quad \vec{R} = (x, y, z)$$

有

$$\nabla U = -G \frac{M \vec{R}}{R^3} \quad (2.19)$$

可知: 均匀球壳对其上一质点的引力位函数为常量, 但加速度不为 0, 指向球壳中心。

现在推广到球状天体情况, 可分为无穷多层均匀球壳, 球壳密度只与半径 r 有关, 即 $\rho = \rho(r)$ 。又可分为两种情况:

④ 有限厚度球对称体,如气壳,星系晕等。设外半径为 a ,内半径为 b ,则从(2.17)式对 r 积分可得它对外一质点引力的位函数为

$$U = \frac{G}{R} \int_b^a 4\pi r^2 \rho dr = \frac{G}{R} \int_b^a dm = \frac{GM}{R}。 \quad (2.20)$$

其中 dm 为半径为 r 的均匀球壳质量。可知有限厚度球对称体对外一质点的引力位函数,与质量集中在中心处的相同。

同理,从(2.18)式对 r 积分可得它对内部一质点引力的位函数为:

$$U = 4\pi G \int_a^b r \rho dr \quad (2.21)$$

此量仍为常量,与 P 点位置无关,故引力及相应加速度为 O 。

⑤ 球对称实体,即上述情况中 $b=0$ 。对外一点引力位函数与质量集中于中心(质心)情况相同;对内一质点(设距中心为 R)的引力,只要考虑 $r=R$ 的部份。

3. 一般延伸体的引力位函数。具有任意大小形状和内部结构的连续体称为延伸体,主要区别于质点。它对另一点的引力位函数应是每一体积元的位函数的总和,即有

$$U = G \iiint_W \frac{\rho dv}{\Delta} \quad (2.22)$$

其中 W 为延伸体, dv 为体积元, ρ 为此处密度, Δ 为体积元同另一质点 P 的距离。若设体积元相对延伸体质心 O 的位置向量为 $\vec{r} = (\xi, \eta, \zeta)$, P 相对 O 的位置向量为 $\vec{R} = (x, y, z)$,则有:

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (\vec{R} - \vec{r})^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \\ &= R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta, \end{aligned} \quad (2.23)$$

θ 为 $\vec{r}$, $\vec{R}$ 间交角。若 P 点在延伸体外,则容易证明势函数 U 满足拉普拉斯方程:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0。$$

第 P 点在延伸体内, 则相应的 U 应满足柏松(Poisson)方程:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi G\rho. \quad (2.24)$$

其中 ρ 为 P 点处的密度。

若 P 点离延伸体较远, 即 r/R 为小量时, 可作级数展开:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{R} \left(1 + \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{R} \cos \theta \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{R} \left[1 + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^s P_s(\cos \theta) \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

其中 $P_s(\cos \theta)$ 为 $\cos \theta$ 的 S 阶勒让德尔(Legendre)多项式, 代入(2.22)式后得

$$\begin{aligned} U &= G \left[\iiint \frac{\rho dv}{R} + \sum_{s=1}^{\infty} \iiint \left(\frac{r}{R} \right)^s \frac{P_s(\cos \theta)}{R} \rho dv \right] \\ &= \frac{GM}{R} + \frac{G}{R} \sum_{s=1}^{\infty} \iiint \left(\frac{r}{R} \right)^s P_s(\cos \theta) \rho dv \end{aligned} \quad (2.26)$$

其中 R 与体积积分无关, 可提到积分号外; M 为延伸体总质量。上式中第一项即为总质量集中在质心处对 P 点引力的位函数, 后面为改正项, 视 r/R 的大小和精度要求而取适当项数。在第七章中将对地球情况作较详细推导。

4. 均匀椭球体的位函数。在天体形状理论及一些特殊天体(如星系)的吸引问题中, 常把均匀椭球体作为近似模型。设均匀椭球体 W 的表面由方程:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1 \quad (2.27)$$

所确定; ρ 为密度, (ξ, η, ζ) 为其中任一体积元 dv 的坐标。先讨论 W 对内部一点 $P(x, y, z)$ 吸引的位函数, 按(2.22)式应为:

$$U = G\rho \iiint \frac{dv}{r} \quad (2.28)$$

式中 $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$ 。

取以 P 点为中心的球坐标系, 体积元 dv 的球坐标 (r, ϕ, θ) 同 (ξ, η, ζ) 关系为:

$$\left. \begin{aligned} \xi - x &= r \sin \theta \cos \phi \\ \eta - y &= r \sin \theta \sin \phi \\ \zeta - z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

相应体积元应为

$$dv = r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\phi \quad (2.30)$$

则

$$\begin{aligned} U &= G\rho \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r_1} r \sin \theta \, dr d\theta d\phi \\ &= G\rho \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{r_1^2}{2} \sin \theta \, d\theta d\phi \end{aligned} \quad (2.32)$$

式中 r_1 应为 W 的表面处的相应值, 是 θ, ϕ 的函数; 但表面上任一点的直角坐标要满足方程(2.27), 故有:

$$\begin{aligned} &\frac{(x + r_1 \sin \theta \cos \phi)^2}{a^2} + \frac{(y + r_1 \sin \theta \sin \phi)^2}{b^2} + \frac{(z + r_1 \cos \theta)^2}{c^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

可整理为

$$Ar_1^2 + 2Br_1 + C = 0 \quad (2.33)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \phi}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} \\ B &= \frac{x \sin \theta \cos \phi}{a^2} + \frac{y \sin \theta \sin \phi}{b^2} + \frac{z \cos \theta}{c^2} \\ C &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

由于 $P(x, y, z)$ 在 W 的内部, 应有 $C < 0$; 但显然可知 $A > 0$, 故(2.33)式有一正根为

$$r_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad (2.35)$$

代入(2-32)式得:

$$U = \frac{G\rho}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{2B^2 - AC}{A^2} - \frac{2B}{A^2} \sqrt{B^2 - AC} \right) \sin\theta d\theta d\phi$$

因 A, C 与 θ, ϕ 的象限无关, 而 B 在作变换 $\theta \rightarrow \pi - \theta, \phi \rightarrow \phi + \pi$ 后反号; 故把 ϕ 的积分区间 $(0, 2\pi)$ 分为两个: $(0, \pi), (\pi, 2\pi)$, 成为两个积分, 在上述变换下, 含 $\sqrt{B^2 - AC}$ 的部份正好反号消去。同理, B^2 中含 xy, yz, zx 的项也可消去。最后上式中只剩下 B^2 中含 x^2, y^2, z^2 项及 C/A 项, 以 C 的式子代入后可整理为:

$$U = U_0 + U_1 x^2 + U_2 y^2 + U_3 z^2 \quad (2.36)$$

而

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= \frac{G\rho}{2} \int_0^\pi \sin\theta \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{A} d\theta \\ U_1 &= \frac{G\rho}{2} \int_0^\pi \sin\theta \int_0^{2\pi} \left(\frac{2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{A^2 a^4} - \frac{1}{A a^2} \right) d\phi d\theta \\ U_2 &= \frac{G\rho}{2} \int_0^\pi \sin\theta \int_0^{2\pi} \left(\frac{2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi}{A^2 b^4} - \frac{1}{A b^2} \right) d\phi d\theta \\ U_3 &= \frac{G\rho}{2} \int_0^\pi \sin\theta \int_0^{2\pi} \left(\frac{2 \cos^2 \theta}{A^2 c^4} - \frac{1}{A c^2} \right) d\phi d\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

现在先积出 ϕ , 按 A 的表达式(2.34)改为

$$\left. \begin{aligned} A &= M \cos^2 \phi + N \sin^2 \phi \\ M &= \frac{\sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} \\ N &= \frac{\sin^2 \theta}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

再用积分关系:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{A} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{M \cos^2 \phi + N \sin^2 \phi} = \frac{2\pi}{\sqrt{MN}} \\ \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(M \cos^2 \phi + N \sin^2 \phi)^2} &= \frac{\pi}{\sqrt{MN}} \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \phi d\phi}{(M \cos^2 \phi + N \sin^2 \phi)^2} &= \frac{\pi}{\sqrt{MN}} \cdot \frac{1}{M} \\ \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \phi d\phi}{(M \cos^2 \phi + N \sin^2 \phi)^2} &= \frac{\pi}{\sqrt{MN}} \cdot \frac{1}{N} \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

式中 M, N 只是 θ 的函数, 代入(2.37)后各 U_i 是对 θ 的单积分。再作变换可化简, 以 U_0 为例:

$$\begin{aligned} U_0 &= G\rho\pi \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\sqrt{MN}} d\theta \\ &= 2G\rho\pi \int_0^{\pi/2} \frac{abc^2 \sin \theta d\theta}{\sqrt{(c^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)(c^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)}} \end{aligned}$$

作变换 $\theta \rightarrow s$ 为:

$$\cos \theta = \frac{c}{\sqrt{c^2 + s}}, \sin \theta d\theta = \frac{cds}{2(c^2 + s)^{3/2}} \quad (2.40)$$

代入上式可得:

$$U_0 = G\rho\pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \quad (2.41)$$

其中

$$\Delta = \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)} \quad (2.42)$$

同样可求出:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= -G\rho\pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)\Delta} \\ U_2 &= -G\rho\pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{(b^2 + s)\Delta} \\ U_3 &= -G\rho\pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{(c^2 + s)\Delta} \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

由此可得:

$$U = \pi G\rho abc \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s} \right) \frac{ds}{\Delta} \quad (2.44)$$

若 $P(x, y, z)$ 在 W 的表面, 上式无任何异常, 可认为是从内部逐渐趋于表面, 上式形式不变, 仍然成立。但要从(2.32)式出发直

接证明还有麻烦。

若 $P(x, y, z)$ 在 W 的外面, 可用艾沃里(Ivory)方法将它化为内部问题, 直接引用(2.44)式(具体方法可参看《天体力学》, 赵进义编著, 易照华修订, 上海科技出版社 1983 年出版), 这里只给出结果。由于 $P(x, y, z)$ 在 W 之外, 如 W 表面仍用(2.27)式表达, 则有

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} > 1$$

可取适当正数 u , 使得

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1 \quad (2.45)$$

其实在 (x, y, z) 和 a, b, c 给定时, 上式是 u 的三次方程, 容易判断它只有一个正根, 解出可得。 W 对 $P(x, y, z)$ 的位函数为:

$$U = G\rho\pi abc \int_u^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s}\right) \frac{ds}{\Delta} \quad (2.46)$$

$u=0$ 时, P 点在 W 面上, 上式与(2.44)一致。

第三节 二体问题的运动方程和积分

讨论天体在空间运动的动力学模型是多体问题, 即牛顿万有引力下的质点组动力学。其中二体问题已解决, 并成为进一步讨论摄动的基础。三体问题在近 20 年内有重大进展, 将在第六章讲述。一般多体问题的分析解法, 至今仍用摄动方法进行, 将在第四, 五章讲。这里先讲二体问题, 作为全书基础。

1. 运动方程。二体问题是讨论两个质点的孤立系统, 在相互万有引力作用下的运动规律。如太阳同某行星(或彗星), 行星同一个小卫星, 双星等; 是研究天体空间运动的最简单模型。

设二体 P_0, P 的质量为 m_0 和 m , 它们的相对位置向量 $\overrightarrow{P_0P} =$

$\vec{r}(x, y, z)$, 其中 (x, y, z) 相对于惯性标架(无旋转), 则 P, P_0 受到的引力 $\vec{F}, \vec{F}_0$ 和加速度 $\vec{a}, \vec{a}_0$ 为:

$$\vec{F} = -\frac{Gmm_0}{r^3}\vec{r}, \quad \vec{F}_0 = -F, \quad \vec{a} = \ddot{\vec{r}}, \quad \vec{a}_0 = \frac{Gm}{r^3}\vec{r}$$

由于 P_0 有加速度 $\vec{a}_0$, 故 P 相对 P_0 的运动方程应加上惯性力改正 $m\vec{a}_0$ 为:

$$m\ddot{\vec{r}} + m\vec{a}_0 = \vec{F} = -\frac{Gmm_0}{r^3}\vec{r}$$

即得

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}, \quad \mu = G(m_0 + m) \quad (2.47)$$

此式为 P 相对于 P_0 的运动方程, 它也可用二体在惯性坐标系中的方程经坐标平移后推出。

2. 面积积分。要解运动方程(2.47), 先寻找出积分。如能求出含有六个(运动方程阶数)独立积分常数的六个积分, 则可解出。

先用 $\vec{r}$ 对(2.27)式两边取向量积:

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} \times \vec{r} = 0$$

可积分为:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{h} \quad (2.48)$$

其中 $\vec{h}$ 为常向量, 设它在三个坐标轴上的分量为 (A, B, C) , 则它们就是积分常数。按分量表示的(2.48)式为运动方程的三个首次积分。由于 $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ 是面积速度的两倍, 故称(2.48)式为运动方程的面积积分, 实际上是相对运动动量矩守恒的反映。用(2.48)式可得到一些有用结果。

用 $\vec{r}$ 对(2.48)式两边取数量积可得:

$$0 = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \cdot \vec{h} = Ax + By + Cz \quad (2.49)$$

此表明 P 相对 P_0 是在一个通过 P_0 点(原点)的固定平面上运动, 可简化为二维问题。 A, B, C 的数值可确定此轨道平面同坐标面的关系。在天体力学中, 习惯上用轨道面对坐标面 (xy 面) 的倾角 i 和升交点(由 z 从负增加到正时所经过的交点)经度 Ω 表示平面方位。

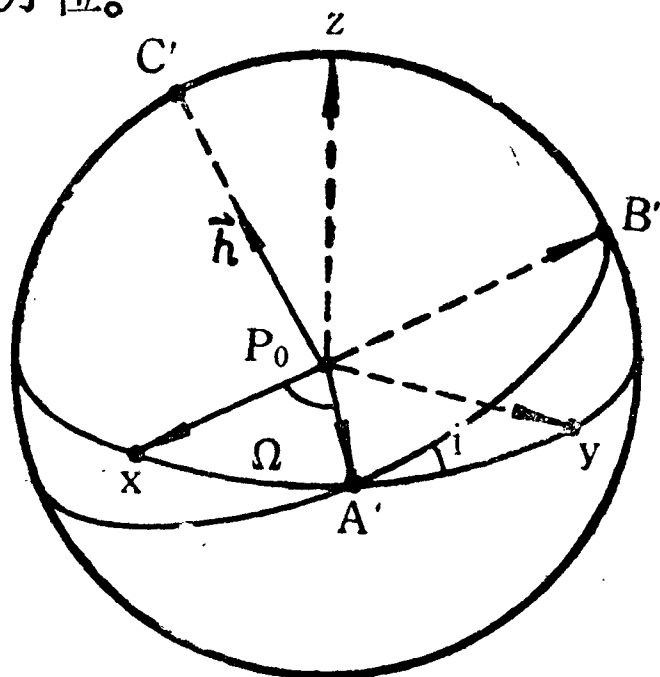


图 2.2

图 2.2 中为以 P_0 为中心的天球, $\vec{P_0x}, \vec{P_0y}, \vec{P_0z}$ 为坐标轴; A' 为轨道面对 xy 平面的升交点, Ω, i 为升交点经度和轨道倾角; $A'B'$ 为轨道面在天球上截出大圆, C' 为它的极, $\vec{h}$ 应指向 $\vec{P_0C'}$ 。 $\vec{P_0B'}$ 在运动方向前距 $\vec{P_0A'}$ 90° 。用球面三角方法可求出分量 A, B, C

同 Ω, i 及 h 的关系。

为了后面统一应用, 引入旋转矩阵方法。若 xy 平面绕 z 轴逆时针方向旋转角度 θ , 则任一点的新坐标 (x', y', z') 同旧坐标 (x, y, z) 的关系为

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$z' = z$$

用向量矩阵符号表示为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Z(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

其中 $Z(\theta)$ 就叫绕 Z 轴逆时针转 θ 角的旋转矩阵。同理可定义出绕 X 轴, Y 轴逆时针转 θ 角的旋转矩阵为:

$$Y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, X(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

这些矩阵都是正交矩阵,容易证明下面关系:

$$\left. \begin{aligned} X(\theta)X(\phi) &= X(\theta+\phi) = X(\phi)X(\theta) \\ \text{逆矩阵 } X^{-1}(\theta) &= X(-\theta), Y, Z \text{ 相同} \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

但 $X(\theta)Y(\phi) \neq Y(\phi)X(\theta)$

用旋转矩阵可简单求出 $\vec{h}$ 在 xyz 系中的分量 (A, B, C) 同 A', B', C' 系中分量 $(0, 0, h)$ 的关系为:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = Z(-\Omega)X(-i) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \sin \Omega \sin i \\ -h \cos \Omega \sin i \\ h \cos i \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

后面要常用到旋转矩阵方法。由此,积分常数 A, B, C 可用 h, Ω, i 来代替。

3. 轨道积分。由于运动是二维,可取轨道面为 xy 平面。则面积积分成为

$$x \dot{y} - y \dot{x} = h \quad (2.54)$$

化为极坐标: $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 后为

$$r^2 \dot{\theta} = h \quad (2.55)$$

表明 P 所受的力为有心力。由(2.47)式可得加速度的径向分量为

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}$$

用(2.55)式,并令 $u = 1/r$,可化为

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2} \quad (2.56)$$

积分得 $\frac{1}{r} = u = \frac{\mu}{h^2} [1 + e \cos(\theta - \omega)]$

或

$$\mathbf{r} = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)}, \quad p = \frac{h^2}{\mu} \quad (2.57)$$

其中 e, ω 为积分常数, 可认为 $e > 0$ 。

(2.57) 式为二体相对运动的轨道方程, 故称为轨道积分, 表示圆锥曲线。 e 为偏心率, p 为半通径, 容易看出 $\theta = \omega$ 时, r 为极小, 故 ω 为近点处的极角, 称为近点角距。

在天体力学中, 常用半主径 a 代替 p , 关系为

$$p = a(1 - e^2) \quad (2.58)$$

4. 活力积分。在(2-27)式两边对 $\dot{\mathbf{r}}$ 取数量级得,

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = - \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

即

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{r} \right)$$

积分后为

$$v^2 = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{2\mu}{r} + E \quad (2.59)$$

其中 E 为积分常数, $v = |\dot{\mathbf{r}}|$ 。容易证明, E 不是新的独立常数, 可用前面的常数表达。

取在近点处的值: $r = p/(1 + e) = a(1 - e)$, $\dot{\mathbf{r}} = 0$; 相应的 $v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = r^2 \dot{\theta}^2 = h^2/r^2 = \mu p/a^2(1 - e)^2$, 代入(2.59)式可求出

$$E = v^2 - \frac{2\mu}{r} = - \frac{\mu}{a}$$

即(2.39)式成为:

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (2.60)$$

此式为能量守恒的反映, 传统称呼为活力 (Force Vive) 积分, 即动能积分。具有广泛用途, E 又可称为能量常数或总能量,

但量纲不同。

5. 拉普拉斯积分。用 $\vec{h}$ 对(2.47)式两边取向量积得：

$$\begin{aligned}\vec{h} \times \ddot{\vec{r}} &= -\frac{\mu}{r^3} \vec{h} \times \vec{r} = -\frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{r} \\ &= -\frac{\mu}{r^3} [(\vec{r} \cdot \vec{r}) \dot{\vec{r}} - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{r}] \\ &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu \vec{r}}{r} \right)\end{aligned}$$

积分后可得：

$$\vec{h} \times \dot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r} \vec{r} + \vec{F} \quad (2.61)$$

其中 $\vec{F}$ 为常向量，它的三个分量 (F_1, F_2, F_3) 为积分常数。容易证明，这三个常数也不是新的独立常数，可用前面出现的常数表达（见习题）。此式称为拉普拉斯积分，也有很大用途。

上面一共求出了四种共 8 个积分，包含有 9 个积分常数。但其中只有 5 个独立，即 A, B, C, e, ω ；或 a, e, i, Ω, ω 。故至少还要有一个包含新独立常数的积分，才能解出二体问题的运动方程。又因解应为坐标及速度表为时间的函数，而上面所得积分都不显含时间 t ，由此可知必须有显含 t 的积分。这最后一个含新独立常数及时间 t 的积分要分别情况求出，将在下节讲述。

第四节 二体问题的轨道分类，开普勒方程

上面已知二体问题的轨道为圆锥曲线，但圆锥曲线有椭圆（包括圆），抛物线，双曲线及退化情况。其中退化情况不讨论，作为特殊情况处理。下面对前三种分别讨论。

1. 椭圆轨道。此时偏心率 $e < 1$ ，因半通径 p 是实际长度永远为正（为 0 时为退化情况），故由 $p = a(1 - e^2)$ 知 $a > 0$ ，能量常数

$E < 0$, 从活力积分知 $v^2 < 2\mu/r$ 。

利用二体问题结果可修正开普勒第三定律。由于椭圆轨道是周期运动, 可用周期 T 和椭圆面积 $\pi a^2 \sqrt{1-e^2}$ 求出 h 值。

$$h = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{T}$$

再由关系(2.57)式可得

$$\frac{4\pi a^4(1-e^2)}{T^2} = h^2 = \mu p = \mu a(1-e^2)$$

由此可得

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2} \quad (2.62)$$

这就是修正后的开普勒第三定律: 椭圆轨道半长径三次方与周期平方成正比, 但比例常数同所讨论的行星质量有关, 即在太阳系中不是同一常数。此差别的原因是开普勒运动定律中认为太阳是固定不动的; 而按牛顿力学, 太阳也在行星引力作用下在运动, 故相对运动中应有所讨论行星质量。

现在来求出最后一个积分。如用 $r^2 \dot{\theta} = h$, 利用轨道方程也可求积, 但不能直接用初等函数表达。现由活力积分出发, 也用关系 $r^2 \dot{\theta} = h$ 化为

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

可得

$$\dot{r}^2 = \frac{\mu}{r^2 a} [a^2 e^2 - (r-a)^2]$$

根据(2.62)式, 定义平均角速度

$$n = \frac{2\pi}{T}, \text{ 则有}$$

$$n^2 a^3 = \mu \quad (2.63)$$

上式可化为:

$$ndt = \frac{rdr}{a\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}} \quad (2.64)$$

其中开方时正负号只与 P 点在轨道上运行方向有关, 故取正号不失一般性。

在椭圆运动中, 有 $|r-a| \leq ae$, 故可定义辅助量 E 如下:

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (2.65)$$

代入(2.44)式得

$$ndt = (1 - e \cos E) dE$$

积分得

$$E - e \sin E = nt + M_0 = n(t - \tau) \quad (2.66)$$

M_0 或 τ 为新积分常数, 此积分显含时间 t , 为椭圆运动的一个新积分。 τ 的意义明确, 当 $E=0$ 时, $t=\tau$; 而从(2.65)式知, $E=0$ 时 r 最小, 即在近点。故 τ 为 P 点过近点时刻。

(2.46)式又称为开普勒方程, 是开普勒在十七世纪初用几何方法首先推出。辅助量 E 称为偏近点角; $M = n(t - \tau) = nt + M_0$ 称为平近点角, 因为它从近点起算随时间均匀变化; 而轨道方程中 $\theta - \omega = f$ 称为真近点角。这三种近点角在椭圆运动中占有重要地位。

真近点角 f 的几何意义很明确, 是任意时刻 t 时 P 点向径 $\vec{r}$ 与近点方向的交角 (从近点沿运动方向到 $\vec{r}$); E 也有几何意义。

图 2.3 中, O 为椭圆中心, P_0 为相对静止的一体, 在椭圆焦点上; A 为近点, P 为 t 时相对运动体的位置; $\vec{P_0P} = \vec{r}$, 同

$\vec{P_0A}$ 之间的夹角为真近点角 f 。 $OA = a$, $OP_0 = ae$; 外圆 AQ 为椭

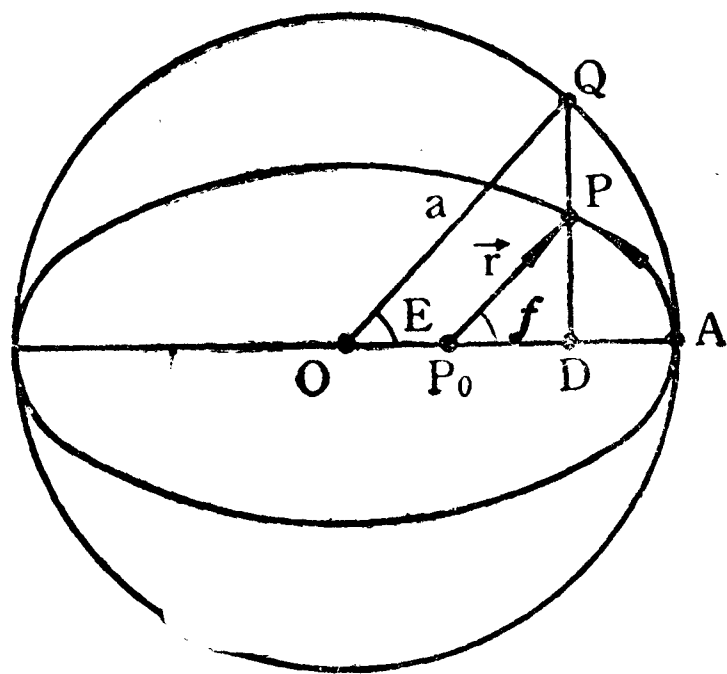


图 2.3

圆的外辅圆。 PD 垂直于 OA , Q 为 DP 延线与外辅圆的交点。则 AOQ 角就是偏近点角 E 。因为从 $OD = OP_0 + P_0D$ 知

$$a \cos E = ae + r \cos f \quad (2.67)$$

再从轨道方程可得 $r \cos f = (p - r)/e$, 代入上式即化为

$$r = a(1 - e \cos E)$$

这就是偏近点角 E 的定义。

2. 抛物线轨道。此时偏心率 $e = 1$, 而 $p = a(1 - e^2)$ 为有限长度, 故必须 $a \rightarrow \infty$; 相应的能量常数为 0, 即 $v^2 = 2\mu/r$; 此速度 v 就称在距离 r 处的抛物线速度。抛物线的轨道方程可简化为:

$$r = \frac{p}{1 + \cos f} = q \sec^2 \frac{f}{2}, q = \frac{p}{2} \quad (2.68)$$

其中 $f = \theta - \omega$ 仍为真近点角。抛物线轨道的新积分可从面积积分积出。由于

$$r^2 \dot{\theta} = r^2 \dot{f} = h = \sqrt{\mu p} = \sqrt{2\mu q}$$

用(2.68)代入可化为

$$\sec^4 \frac{f}{2} df = l dt, \quad l = \sqrt{2\mu q}^{-3/2}$$

积分后得

$$2 \operatorname{tg} \frac{f}{2} + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{f}{2} = l(t - \tau) \quad (2.69)$$

其中 τ 为新的独立积分常数, 也是 P 点经过近点的时刻。(2.69) 式也可称为抛物线情况的开普勒方程。

3. 双曲线轨道。此时 $e > 1$, 因 p 永远为正, $a < 0$; 故常记为 $p = a_1(e^2 - 1)$, $a_1 = -a > 0$ 。能量常数为正, $v^2 > 2\mu/r$ 。相应的面积和活力积分成为:

$$\left. \begin{aligned} r^2 \dot{\theta} &= h = \sqrt{\mu a_1 (e^2 - 1)} \\ v^2 &= \mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.70)$$

对应于椭圆运动的(2.69)式成为:

$$a_1 n_1 dt = \frac{r dr}{\sqrt{(a_1 + r)^2 - a_1^2 e^2}}, \quad n_1 = \sqrt{\mu} a_1^{-3/2} \quad (2.71)$$

定义辅助量 F 为:

$$r = a_1 (e \cos hF - 1) \quad (2.72)$$

代入上式可积出:

$$n_1(t - \tau) = e \sin hF - F \quad (2.73)$$

这就是双曲线情况的开普勒方程, 其中 τ 是新积分常数, 也是 P 点过近点时刻。

4. 轨道根数。不管哪一种轨道, 都是运动方程 (2.47) 式的解, 都应有六个独立的积分常数, 它们同运动的初值一致。在天体力学中, 常选择一组相互独立的六个积分常数, 它们的意义明确, 代表了运动轨道的基本量, 称为轨道根数。由于绝大多数用二体问题的天体轨道都是椭圆, 现按椭圆情况给出常用的轨道根数:

$$a, e, i, \Omega, \omega, \tau \quad (2.74)$$

其中 a, e, τ 的意义已说明; Ω, i 代表轨道面相对坐标面 (xy 面) 的指向。天体力学中的坐标面有不同选择: 在讨论行星运动中, 常取 xy 面为某固定时刻的日心黄道面 (如 1900.0 或 2000.0 黄道), z 轴指向同一历元的春分点; 讨论卫星运动中, 常取所在行星的赤道面, z 轴指向行星赤道上某固定点。 ω 称为近点角距, 一般明确指升交点到近点的角距, 即把极坐标的极轴取为升交点方向。在黄道或赤道坐标系中, z 轴都以向北为正。故升交点是 P 点由南向北穿过 xy 平面时的交点, 另一点是降交点。倾角 i 是在升交点处, xy 平面按逆时针旋转到轨道面的角度, 故有 $0 \leq i \leq 180^\circ$; 当 $i \leq 90^\circ$ 时称为顺行, $i > 90^\circ$ 时称逆行。

双曲线轨道情况相同, 只是用 $a_1 = -a$ 代替 a 。抛物线为特殊轨道, $e = 1$, 故只有五个轨道根数:

$$p, \Omega, i, \omega, \tau$$

轨道根数的任意六个函数 (还可以加上其他参数), 只要是相

互独立的,都可选作轨道根数。

第五节 二体问题的解的常用形式

上面讨论是求出了二体问题运动方程的积分,其中包含了六个相互独立的积分常数,即轨道根数。只表明这个六阶常微分方程组(2.47)式是可积的,利用这些积分可以得到解。但解应表为 $\vec{r} = f(c_i, t)$, $\dot{\vec{r}} = g(c_i, t)$ 的形式,才便于在已知积分常数 c_i 后,求出任何时刻的坐标和速度 $\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$ 。下面以太阳系行星运动为背景,讨论在日心黄道坐标系中的解。

1. 计算在轨道面上的坐标公式,先讨论椭圆轨道。设 P_0 为太阳,用 S 表示, P 为某行星。以 S 为中心建立直角坐标系 $S-\xi\eta\zeta$; ξ 轴指向近日点方向, η 轴指向真近点角 $f = 90^\circ$ 处的通径方向, ζ 轴指向轨道面法线方向,但使 $\xi\eta\zeta$ 三轴成右手系。若已知任何时刻 t 时 P 的 r, f 值,它在此坐标系的坐标为

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos f \\ r \sin f \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

从(2.47)式可得:

$$r \cos f = a(\cos E - e) \quad (2.76)$$

由此利用(2.45)式可得

$$r \sin f = \pm \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 f} = \pm a \sqrt{1 - e^2} \sin E$$

但从 E 和 f 变化可知: E 在第一、二象限时, f 也是; E 在第三、四象限时, f 也是;反过来也成立。故 $\sin f$ 与 $\sin E$ 永远同号,即有

$$r \sin f = \sqrt{1 - e^2} \sin E \quad (2.77)$$

从这两式及(2.45)式可得出 E 和 f 的很多关系式。这里只列出

几个常用结果,证明都很简单:

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \sin f = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E} \quad (2.78)$$

$$\cos E = \frac{\cos f + e}{1 + e \cos f}, \sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin f}{1 + e \cos f} \quad (2.79)$$

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \quad (2.80)$$

由这些关系可知,只要知道 t 时的偏近点角 E, r, f, ξ, η 都可求出。

2. 开普勒方程的解法。偏近点角 E 同时间 t 的联系是开普勒方程:

$$E - e \sin E = nt + M_0 = M$$

可用它从给定的 t 解出 E 。由于这是代数和超越函数的混合方程,没有封闭的分析解。只能用数值解法或级数解。级数解不在这里介绍;数值解法很多,各种解这种类型的计算方法都可应用,如牛顿法,微分改正法等。这里只说一种常用的迭代法。取 $E_1 = M$,

$$E_k = M + e \sin E_{k-1}$$

一直迭代下去,直到 $|E_k - E_{k-1}|$ 达到所需精度为止。在 e 不接近于 1, 用计算机可很快算出。但 e 接近于 1 时,收敛性差,可改用其他方法计算。双曲线情况的开普勒方程不能用这种方法,因 $e > 1$, 要用其他数值解法。抛物线的开普勒方程可用 $\operatorname{tg} f/2$ 的三次方程来解。开普勒方程解法问题,现在还有人在研究。

3. 解的常用表达式。现在把 P 在任一时刻 t 时的坐标变换为日心黄道坐标 (x, y, z) 。取 xy 面为固定历元(现在用 2000.0)时的日心黄道面, x 轴指向同一历元的春分点。仍用 Ω, i, ω 表示行星轨道相对 xy 面的根数,关系见图 2.4, 以 S 为中心的天球,大圆 xNy 为黄道, x 为春分点; NAP 为行星轨道面在天球上截出的大圆, N, A, P 为升交点,近日点和 t 时行星位置方向; Ω, ω, f, i 在图

$$= \begin{pmatrix} -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i \\ -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i \\ \cos \omega \sin i \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

它们为三个轨道根数 Ω, ω, i 的函数, 是常向量。(2.82)式中除偏近点角 E 外, 都是常量; 而 E 通过开普勒方程(2.66)式:

$$E - e \sin E = nt + M_0$$

表示为时间 t 的函数。由开普勒方程可根据轨道根数 $a(n), e, M_0(\tau)$ 算出任何时刻 t 时的 E 值及变率

$$\dot{E} = \frac{dE}{dt} = \frac{n}{1 - e \cos E} = \frac{an}{r} \quad (2.85)$$

由此可得速度公式:

$$\dot{\vec{r}} = -\frac{a^2 n}{r} \sin E \vec{P} + \frac{a^2 n}{r} \sqrt{1 - e^2} \cos E \vec{Q} \quad (2.86)$$

(2.82), (2.86)式连同开普勒方程(2.66)就是运动方程(2.47)式的通解(椭圆情况)形式, 即坐标和速度 $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ 表示为积分常数 $(a, e, i, \Omega, \omega, M_0)$ 及时间 t 的函数。

对于抛物线轨道, (2.62)式用 f 表示, 加上

$$\dot{\vec{r}} = -\frac{h}{2q} \sin f \cdot \vec{P} + \frac{h}{2q} (1 + \cos f) \vec{Q} \quad (2.87)$$

连同 f 与 t 关系(2.49)一起组成解。

对于双曲线轨道, (2.62)式可写为:

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= a_1(e - \cosh F) \vec{P} + a_1 \sqrt{e^2 - 1} \sinh F \vec{Q} \\ \dot{\vec{r}} &= -\frac{a_1^2 n_1}{r} \sinh F \vec{P} + \frac{a_1^2 n_1 \sqrt{e^2 - 1}}{r} \cosh F \vec{Q} \end{aligned} \right\} \quad (2.88)$$

连同(2.73)式一起组成解。

三种情况可统一写成:

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= r \cos f \vec{P} + r \sin f \vec{Q}, \\ \dot{\vec{r}} &= -\frac{h}{p} \sin f \vec{P} + \frac{h}{p} (e + \cos f) \vec{Q} \end{aligned} \right\} \quad (2.89)$$

只是 f 同时间 t 的关系各有不同。对用得最多的椭圆轨道情况,常用(2.82), (2.86)式及相应的开普勒方程(2.66)式作为解。

第六节 星历表基本公式

从数学或力学观点来看,到上节为止已解决二体问题。但从天文学观点来看还没有。因为还不能同观测比较。

现代天文观测的天体位置和速度的资料形式有很多种。有传统的星位观测,即测定天体在天球赤道坐标系中的赤经 α 和赤纬 δ ;也有用电磁波的多卜勒(Doppler)原理测定天体相对观测站的视向速度大小;还有同雷达或激光直接测出天体同观测站距离等。但星位,速度和距离之间有联系。下面只给出理论上计算星位的基本公式,利用二体问题的这些关系,同样可算出速度和距离。

这里仍以行星绕太阳运动为背景,给出计算星位和距离的方法和公式。

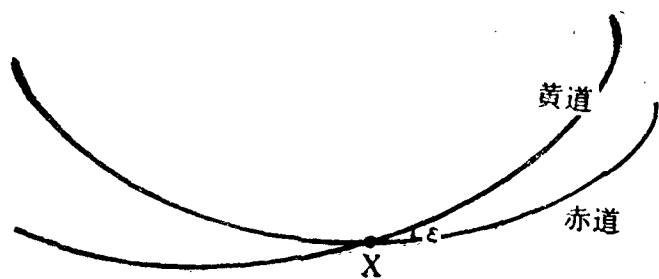


图 2.5

1. 计算日心赤道坐标
设同一历元的赤道和黄道关系如图 2.5。 ε 为黄赤交角, X 为同一历元的春分点,即此时黄道对赤道的升交点。由于此两种坐标系都是以春分点为 x 轴,都从黄道坐标

系到赤道坐标系只用一次旋转 $X(-\varepsilon)$ 。

设 (x_1, y_1, z_1) 为行星相对太阳在 t 时的赤道直角坐标,故可得:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = X(-\varepsilon) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \cos \varepsilon - z \sin \varepsilon \\ y \sin \varepsilon + z \cos \varepsilon \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

2. 计算地心赤道坐标。设 t 时太阳的地心赤道坐标为 $\vec{R} = (X, Y, Z)$; (x_2, y_2, z_2) 为行星的地心赤道直角坐标, (ρ, α, δ) 为相应的地心距, 赤经和赤纬, 则从平移关系可得:

$$\begin{pmatrix} \rho \cos \alpha \cos \delta \\ \rho \sin \alpha \cos \delta \\ \rho \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + X \\ y_1 + Y \\ z_1 + Z \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

其中 (X, Y, Z) 已载入天文年历, 故用上式可算出行星在 t 时的 ρ, α, δ 。

如行星离地球较近, 则还要把坐标原点平移到观测站才能更精确比较。

这里只给出二体问题理论结果, 真正同观测比较时还要作很多改正。首先是坐标系要完全一致, 有平位置和真位置区别和相应的岁差章动改正; 观测为视位置, 故有光行差改正; 实际行星位置用二体问题不够要作摄动计算等关于星位的各种改正, 可参阅球面天文学书籍; 关于摄动计算方法, 正是后几章内容。

第七节 初值和轨道根之间的关系

轨道根数是积分常数, 同运动方程的初值有直接关系, 这里给出这种关系, 仍以椭圆轨道为例, 分三种情况的初值进行讨论。

1. 某时刻的位置和速度 $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ 。共有六个分量, 可用它们同六个轨道根数建立对应关系。由轨道根数可算出任何时刻的 $\vec{r}$ 和 $\dot{\vec{r}}$, 用(2.82)、(2.86)及(2.66)式就行了。现在给出从已给某时刻 t 的 $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ 来计算轨道根数。

首先从 $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ 可算出 $r = |\vec{r}|, v = |\dot{\vec{r}}|$; 再由活力公式

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

算出 a 和 n 。另由

$$r = a(1 - e \cos E), \quad \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = a^2 e n \sin E$$

得

$$e \cos E = \frac{a}{r} - 1, \quad e \sin E = \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{a^2 n} \quad (2.92)$$

可算出 t 时的 E 和 e ; 并由此算出 $p, h = \sqrt{\mu p}$ 。再从开普勒方程 $E - e \sin E = nt + M_0 = n(t - \tau)$ 算出 M_0 或 τ 。

从 (2.86) 和 (2.86) 式可解出 $\vec{P}, \vec{Q}$ 为

$$\left. \begin{aligned} \vec{P} &= \frac{\cos E}{r} \vec{r} - \frac{\sin E}{an} \dot{\vec{r}} \\ \vec{Q} &= \frac{\sin E}{r\sqrt{1-e^2}} \vec{r} + \frac{\cos E - e}{an\sqrt{1-e^2}} \dot{\vec{r}} \end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$

用 $\vec{P}, \vec{Q}$ 的已知六个分量, 容易从 (2.83), (2.84) 式算出 Ω, i, ω 。这样就全部算出轨道根数。

2. 人造卫星的发射位置和速度。一般用发射地点的地心位置

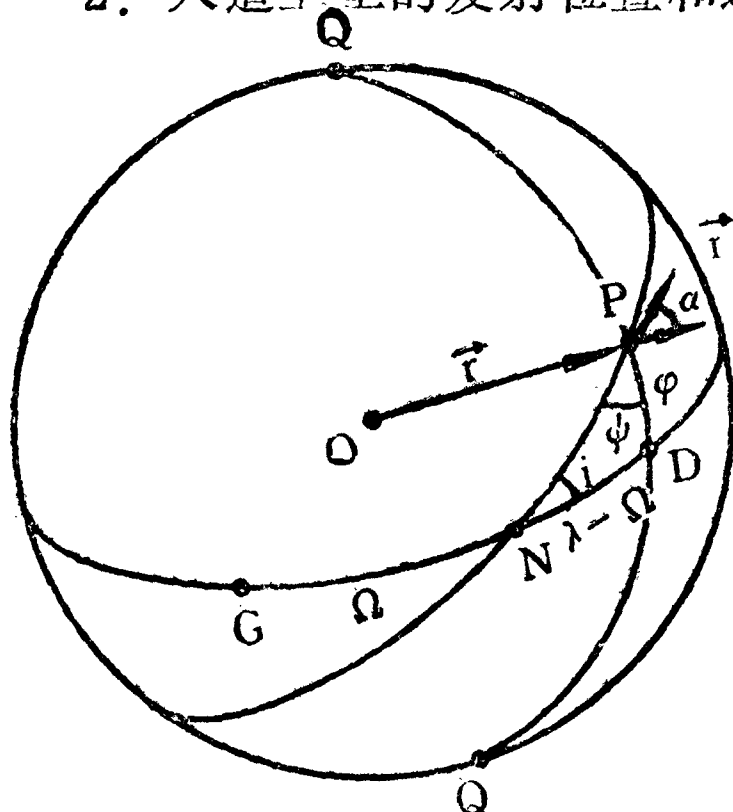


图 2.6

置为 $\vec{r} = (r, \lambda, \varphi)$, 其中 λ, φ 为经纬度; 发射速度为 $\dot{\vec{r}} = (v, \alpha, \psi)$, 其中 α 为 $\vec{r}$ 与 $\dot{\vec{r}}$ 的交角, ψ 为 $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ 的平面同发射点子午面交角, 见图 2.6 的地心球面, 以发射地点地心距 r 为半径。大圆 GND 为赤道面, G 为格林尼治子午圈在赤道上交点, 故 $GD = \lambda$; 大圆 NP 为卫

星轨道面, N 为升交点, $GN = \Omega$; 过发射点子午圈为 Q (北极)

PDQ' (南极), 则 $DP = \varphi$, $NP = \omega + f$, P 点处的子午面和轨道面的交角为 ϕ (又称方位角); α 为 $\vec{r}$ 同 $\dot{\vec{r}}$ 交角, i 为轨道面对赤道面倾角。首先用关系

$$\sqrt{\mu p} = h = |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = r v \sin \alpha \quad (2.94)$$

算出 p ; 用活力积分算出 a ; 用(2.92)式解出 E , 并用开普勒方程算出 M_0 或 τ 。

另三个轨道根数可用图 2.6 中的直角球面三角形 NPD 给出关系:

$$\left. \begin{aligned} \cos i &= \cos \varphi \cos \phi \\ \sin(\omega + f) &= \frac{\sin \varphi}{\sin i} \\ \cos(\omega + f) &= \operatorname{ctg} \phi \operatorname{ctg} i \\ \sin(\lambda - \Omega) &= \sin(\omega + f) \sin \phi \\ \cos(\lambda - \Omega) &= \frac{\cos(\omega + f)}{\cos \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (2.94)$$

算出 i , $\omega + f$ 和 $\lambda - \Omega$ 。 f 可由 E 用(2.60)式算出, Ω 是由 G 起算的升交点经度, 如仍用春分点起算, 可用此时刻的格林尼治恒星时 S_0 加入改正。

3. 两个时刻 t_1, t_2 时的坐标 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ 。这里要用到一个关系, 称为朗贝特(Lambert)方程, 是两个时刻的向径 r_1, r_2 和弦长 $\sigma = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ 同时间 $t_2 - t_1$ 的关系。

先从开普勒方程给出两个时刻的有关量:

$$nt_1 + M_0 = E_1 - e \sin E_1$$

$$nt_2 + M_0 = E_2 - e \sin E_2$$

相减可得:

$$\begin{aligned} n(t_2 - t_1) &= E_2 - E_1 - e(\sin E_2 - \sin E_1) \\ &= 2q - [\sin(p + q) - \sin(p - q)] \\ &= \varepsilon - \delta - (\sin \varepsilon - \sin \delta) \end{aligned} \quad (2.95)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{2}(E_2 - E_1), \cos p = e \cos \frac{1}{2}(E_2 + E_1) \end{aligned} \right\} \quad (2.95)$$

$$e = p + q, \quad \delta = p - q$$

(2.95)式就称为朗贝特方程,里面出现的辅助量 ε 和 δ 可用 r_1, r_2 及弦长 σ 来表达。由

$$r_1 = a(1 - e \cos E_1), r_2 = a(1 - e \cos E_2)$$

可得

$$r_1 + r_2 = 2a(1 - \cos q \cos p) \quad (2.97)$$

再从(2.82)式可知

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = a(\cos E_2 - \cos E_1) \vec{P} + a\sqrt{1 - e^2}(\sin E_2 - \sin E_1) \vec{Q}$$

即

$$\sigma = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = 2a \sin q \sin p \quad (2.98)$$

与(2.97)式一起可得:

$$r_1 + r_2 \pm \sigma = 2a[1 - \cos(p \pm q)] = 4a \sin^2 \frac{p \pm q}{2}$$

故为

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\varepsilon}{2} &= \pm \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + \sigma}{4a}} \\ \sin \frac{\delta}{2} &= \pm \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - \sigma}{4a}} \end{aligned} \right\} \quad (2.99)$$

ε 和 δ 的象限判断很麻烦,这里只给出结果:

恒有 $\cos \delta/2 > 0$; 当 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ 在同一圈或相隔偶数圈时, $\sin \varepsilon/2 > 0$, 否则 < 0 ; 弦 σ 同 t_1 到 t_2 的弧组成的弓形包含主焦点(中心体)时, $\sin \delta/2 < 0$, 否则 > 0 ; 当上述弓形包含另一焦点时 $\cos \varepsilon/2 < 0$, 否则 > 0 。(详细讨论可参阅 H.C.Plummer, An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy, P. 50, Cambridge University Press, 1918)。一般情况下, 两时刻相距的弧段较短,

各量都为正。

如已知 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$, 则 $r_1, r_2, \sigma = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ 都可算出, 朗贝尔方程中只有 a (及 n) 未知, 可由此方程解出。但函数复杂, 不能直接用分析方法解, 只能用迭代法。先给 a 一个近似值 (可从 r_1, r_2 估计出), 用 (2.99) 式求出 ε, δ 代入朗贝特方程求出 n , 可得相应的 $a = (\mu n^{-2})^{1/3}$ 作为第二次近似值。如此循环作下去直到新求出的 a 与前一次相差达到精度要求为止。当然, 也可用其他近似解法。

a 求出后, 相应的 ε, δ 即求出, 可由

$$\begin{aligned}\cos E_2 &= \cos(E_2 - E_1 + E_1) \\ &= \cos(E_2 - E_1) \cos E_1 - \sin(E_2 - E_1) \sin E_1 \\ &= \cos(\varepsilon - \delta) \cos E_1 - \sin(\varepsilon - \delta) \sin E_1\end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned}e \sin E_1 &= \frac{e \cos E_1 \cos(\varepsilon - \delta) - e \cos E_2}{\sin(\varepsilon - \delta)} \\ &= \left[\left(1 - \frac{r_1}{a}\right) \cos(\varepsilon - \delta) - \left(1 - \frac{r_2}{a}\right) \right] / \sin(\varepsilon - \delta)\end{aligned}\quad (2.100)$$

同

$$e \cos E_1 = 1 - \frac{r_1}{a}$$

一起可解出 e, E_1 , 再由开普勒方程算出 τ 或 M_0 。其余三个轨道根数可从 (2.62) 式

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= a (\cos E_1 - e) \vec{P} + a \sqrt{1 - e^2} \sin E_1 \vec{Q} \\ \vec{r}_2 &= a (\cos E_2 - e) \vec{P} + a \sqrt{1 - e^2} \sin E_2 \vec{Q}\end{aligned}$$

解出 $\vec{P}, \vec{Q}$ 后, 再从它们的分量算出, 其中 $E_2 = \varepsilon - \delta + E_1$ 。

天体初值的形式很多, 但都可以从二体问题关系式把它们同轨道根数联系起来。

第八节 轨道计算原理

二体问题运动方程中的积分常数或轨道根数只能从观测资料中求出。从观测资料算出轨道根数称为轨道计算，这里利用定位观测资料 (α, δ) 介绍计算轨道根数的方法原理。

1. 拉普拉斯方法原理。首先是拉普拉斯在 1796 年提出，本世纪后经多次改进，现在仍在应用。原理是用三个时刻 $t_i (i=1, 2, 3)$ 的观测值 (α_i, δ_i) ，计算出中间时刻 t_2 时的日心坐标 $\vec{r}_2(x_2, y_2, z_2)$ 和速度 $\vec{v}_2(\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2)$ 。

在计算前要对观测资料 (α_i, δ_i) 进行预处理，在球面天文学中已讲，得到与 (x, y, z) 的坐标系一致。

由(2.71)式可得 t_i 时关系：

$$\left. \begin{aligned} \rho_i \cos \alpha_i \cos \delta_i &= x_i + X_i \\ \rho_i \sin \alpha_i \cos \delta_i &= y_i + Y_i \\ \rho_i \cos \delta_i &= z_i + Z_i \end{aligned} \right\} \quad (2.101)$$

以第一式除后两式消去 ρ_i 得：

$$\left. \begin{aligned} y_i &= U_i x_i + P_i \\ z_i &= V_i x_i + Q_i \end{aligned} \right\} \quad (2.102)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} U_i &= \operatorname{tg} \alpha_i, \quad V_i = \operatorname{tg} \delta_i \sec \alpha_i \\ P_i &= U_i X_i + Y_i, \quad Q_i = V_i X_i + Z_i \end{aligned} \right\} \quad (2.103)$$

都是已知量。故从(2.102)式给出 x_i, y_i, z_i 之间关系，即 y_i, z_i 是 x_i 的函数。

这里要用到两个时刻 t_i, t_2 之间的坐标关系。为方便起见，取

$$\tau = \sqrt{\mu} t, \quad \tau_i = \sqrt{\mu} t_i, \quad \tau_{i2} = \sqrt{\mu} (t_i - t_2) \quad (2.104)$$

则运动方程简化为：

$$\frac{d^2 \vec{r}}{d\tau^2} = \frac{1}{\mu} \ddot{\vec{r}} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \quad (2.105)$$

当 $t_i - t_2$ 不太大时, 可作泰勒级数展开:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_{i2}^n}{n!} \left(\frac{d^n \vec{r}_i}{d\tau^n} \right)_{\tau=\tau_2} \quad (2.106)$$

根据运动方程, $\vec{r}$ 的二次微商可化为无微商, $\vec{r}$ 三次微商可化为 $\vec{r}$ 及其一次微商 $d\vec{r}/d\tau$ 的线性组合; 并可推广到任意次微商也是这样。可写为:

$$\vec{r}_i = F_i \vec{r}_2 + G_i \frac{d\vec{r}_2}{d\tau} \quad (2.107)$$

其中

$$\begin{aligned} F_i = & 1 - \frac{\tau_{i2}^2}{2r_2^3} + \frac{\tau_{i2}^3}{2r_2^4} \frac{dr_2}{d\tau} + \frac{\tau_{i2}^4}{24} \left[-\frac{2}{r_2^6} \right. \\ & \left. - \frac{15}{r_2^5} \left(\frac{dr_2}{d\tau} \right)^2 + \frac{3v_2^2}{r_2^5} \right] \\ & + \frac{\tau_{i2}^5}{120} \left[\frac{30}{r_2^7} \frac{dr_2}{d\tau} + \frac{105}{r_2^6} \left(\frac{dr_2}{d\tau} \right)^3 \right. \\ & \left. - \frac{45}{r_2^6} v_2^2 \frac{dr_2}{d\tau} \right] + \frac{\tau_{i2}^6}{720} \left[-\frac{22}{r_2^9} \right. \\ & \left. + \frac{66}{r_2^8} v_2^2 - \frac{45}{r_2^7} v_2^4 - \frac{420}{r_2^8} \left(\frac{dr_2}{d\tau} \right)^2 \right. \\ & \left. - \frac{945}{r_2^7} \left(\frac{dr_2}{d\tau} \right)^4 - \frac{630}{r_2^7} \left(\frac{dr_2}{d\tau} \right)^2 v_2^2 \right] \\ & + \dots \\ G_i = & \tau_{i2} - \frac{\tau_{i2}^3}{6r_2^3} + \frac{\tau_{i2}^4}{4r_2^4} \left(\frac{dr_2}{d\tau} \right) + \frac{\tau_{i2}^5}{120} \left[\frac{9}{r_2^5} v_2^2 \right. \\ & \left. - \frac{8}{r_2^6} - \frac{45}{r_2^5} \left(\frac{dr_2}{d\tau} \right)^2 \right] + \frac{\tau_{i2}^6}{72} \left[\frac{15}{r_2^7} \frac{dr_2}{d\tau} \right. \\ & \left. + \frac{42}{r_2^6} \left(\frac{dr_2}{d\tau} \right)^3 - \frac{18}{r_2^6} v_2^2 \frac{dr_2}{d\tau} \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.108)$$

都是用 t_2 时刻的 $\vec{r}_2$ 和 $\dot{\vec{r}}_2$ 的函数和时间表示。它们可从运动方程和活力积分推出, 现已用计算机文字运算推到 τ_{i2} 的 30 多次幂项。还可从(2.82)式推出封闭形式的分析式子(见习题)。这也是二体问题的一种级数解, 表示成时间的幂级数, 其中 $\vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_2$ 为初值, F_i, G_i 是时间幂级数, 而系数为初值的函数。

现在再来看轨道计算的拉普拉斯方法。现有(2.82)式 6 个方程及(2.87)式 6 个方程, 含有 12 个未知量 $\vec{r}_i, d\vec{r}_2/d\tau = \dot{\vec{r}}_2'$ 。故原则上可以解出, 下面进行降阶简化。

以(2.107)和(2.82)式消去 $\vec{r}_1, \vec{r}_3$ 及 y_2, z_2 可得:

$$\left. \begin{aligned} F_i(U_2 - U_i)x_2 + G_i y_2' - U_i G_i x_2' &= P_i - F_i P_2 \\ F_i(V_2 - V_i)x_2 + G_i z_2' - V_i G_i x_2' &= Q_i - F_i Q_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.109)$$

其中 $i=1, 3$ 共 4 个方程, 看作为 4 个未知量 x_2, x_2', y_2', z_2' 的线性函数。因 F_i, G_i 中也含有 x_2 和 $\dot{\vec{r}}_2'$, 故只能用迭代法求解。先给 $\vec{r}_2$ 一个近似值, 在(2.108)式中只取头两项给出 F_i, G_i 的第一次近似值; 再用它们代入(2.109)式解出 $x_2, \dot{\vec{r}}_2'$ 的第一次近似值, 又从(2.102)算出 y_2, z_2 , 一起代入(2.108)算出 F_i, G_i 的第二次近似值。如此循环迭代直到所得 $\vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_2'$ 与前一次近似的差达到精度要求为止。从 $\vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_2 = \sqrt{\mu} \dot{\vec{r}}_2'$ 算轨道数方法在上节已讲述。

2. 高斯方法原理。首先是高斯(C.F. Gauss, 1777—1855)在 1802 年提出, 本世纪经多次改进后至今仍在应用。原理是从三个时刻 $t_i (i=1, 2, 3)$ 的观测 (α_i, δ_i) 算出 $\vec{r}_1$ 和 $\vec{r}_3$ 。然后再用它们算出轨道根数。

由于轨道是平面曲线, 三个时刻向径应为线性相关, 即有关系

$$\vec{r}_2 = C_1 \vec{r}_1 + C_3 \vec{r}_3 \quad (2.110)$$

其中 C_1, C_3 为常数。根据(2.102)式, 只要知道 x_1, x_3 就可算出 y_1, y_3, z_1, z_3 。从(2.102), (2.110)式中消去 $x_2, y_2, z_2, y_1, y_3, z_1, z_3$ 得:

$$\left. \begin{aligned} C_1(U_1 - U_2)x_1 + C_3(U_3 - U_2)x_3 &= P_2 - C_1P_1 - C_3P_3 \\ C_1(V_1 - V_2)x_1 + C_3(V_3 - V_1)x_3 &= Q_2 - C_1Q_1 - C_3Q_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.111)$$

此式称为高斯方法的基本方程。式中除 C_1, C_3 为未定常数外，其余各量都为已知。

用(2.107)式代入(2.110)式得：

$$\vec{r}_2 = C_1(F_1\vec{r}_2 + G_1\vec{r}_2') + C_3(F_3\vec{r}_2 + G_3\vec{r}_2')$$

由此可得

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 \times \vec{r}_2' &= (C_1F_1 + C_3F_3)\vec{r}_2 \times \vec{r}_2' \\ \vec{0} &= \vec{r}_2 \times \vec{r}_2 = (C_1G_1 + C_3G_3)\vec{r}_2 \times \vec{r}_2' \end{aligned}$$

故有

$$C_1F_1 + C_3F_3 = 1$$

$$C_1G_1 + C_3G_3 = 0$$

可解出

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{G_3}{F_1G_3 - F_3G_1} \\ C_3 &= -\frac{G_1}{F_1G_3 - F_3G_1} \end{aligned} \right\} \quad (2.112)$$

故用(2.88)式可把 C_1, C_3 表示为时间的幂级数，系数是 $\vec{r}_2, \vec{r}_2'$ 的函数，也可以从 F_i, G_i 的值计算 C_1, C_3 。只能用迭代法求解。先给 $\vec{r}_2$ 一个近似值，由(2.108)式头两项算出 F_i, G_i 的第一次近似；再由(2.112)式算出 C_1, C_3 的第一次近似值，代入(2.111)式解出 x_1, x_3 ，又从(2.102)式算出 y_1, y_3, z_1, z_3 ，即得 $\vec{r}_1, \vec{r}_3$ 的第一次近似值。更准确的 F_i, G_i (或 C_1, C_3) 需要 $\vec{r}_2'$ 的值。可用数值微分方法从 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ 值算出 $\vec{r}_2'$ ，也可用拉普拉斯基本公式(2.109)解出。用 $\vec{r}_2, \vec{r}_2'$ 可从(2.88)式算出 F_i, G_i 及相应 C_1, C_3 的第二次近似值；再解(2.111)式，并算出 $\vec{r}_1, \vec{r}_3$ 的第二次近似值。如此循环迭代，直到所需精度为止。从 $\vec{r}_1, \vec{r}_3$ 算轨道根数的方法已在上节讲述。

一般情况下，速度 $\vec{r}_2$ 或 $\vec{r}_2'$ 的有效位数较少，直接用 $\vec{r}_2, \vec{r}_2'$ 算轨道根数会影响精度。故即使用拉普拉斯方法算出 $\vec{r}_2, \vec{r}_2'$ 后，也用(2.111)式及(2.102)式算出 $\vec{r}_1, \vec{r}_3$ ，再算轨道根数。

人造卫星上天后，出现了一些其他轨道计算方法。其中用微分改进办法建立的轨道改进方法有广泛应用，特别用测距和测速观测资料计算轨道时，一般都用此法。

第九节 引力作用范围

由于天体运动并不是二体问题，需要为二体问题的适用范围给一个大致的界限。一般对大质量 M 和小质量 m 的两个天体，在 m 的附近规定一个范围，在此范围内运动的小质点，主要考虑 m 体的引力；在范围外运动时主要考虑 M 体的引力。按不同要求，有三种范围定义。

1. 引力范围。

如图 2.7，在 m 附近的引力范围定义为：范围边界上质点 P 受到 m 和 M 的引力大小相等。

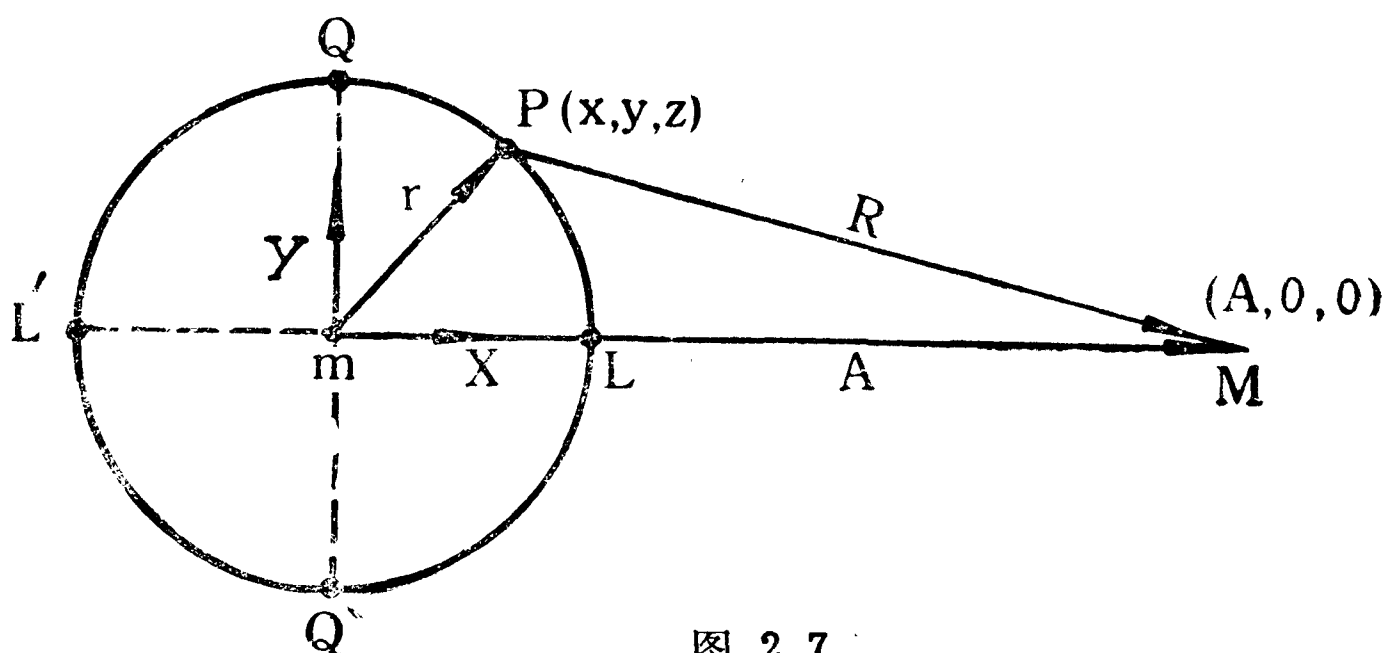


图 2.7

若取 $\overline{mM}$ 方向为 x 轴，纸面为 xy 平面， $\overline{mQ}$ 为 y 轴，则 z 轴

应垂直纸面向上。则 M 坐标为 $(A, 0, 0)$, A 为 m 与 M 的距离; 设 $\overrightarrow{PM} = \vec{R}$, P 点坐标为 (x, y, z) , 应有

$$\vec{R} = (A - x, y, z), \quad R^2 = (A - x)^2 + y^2 + z^2 \quad (2.113)$$

按引力范围定义有(约去小质点质量):

$$\frac{GM}{R^2} = \frac{Gm}{r^2}, \quad \vec{r} = (x, y, z)$$

即

$$(1 - \mu)r^2 + 2\mu Ax - \mu A^2 = 0, \quad \mu = \frac{m}{M} \quad (2.114)$$

此式为球面方程, 球心在 $\left(-\frac{\mu A}{1 - \mu}, 0, 0\right)$, 半径为 $\sqrt{\mu} \frac{A}{1 - \mu}$ 。

当 μ 很小时, 可近似地取引力范围是以 m 为中心的球面, 半径为

$$r_1 = \sqrt{\mu} A = \mu^{\frac{1}{2}} A \quad (2.115)$$

2. 作用范围。在很多问题中用另一种范围, 先引入引潮加速度。

由于 M 的引力, 使 P 相对 m 有相对加速度

$$\vec{a}_1 = GM \left(\frac{\vec{R}}{R^3} - \frac{\vec{A}}{A^3} \right) \quad (2.116)$$

称为 M 对 m, P 二体的引潮加速度; 同样 m 的引力也对 M, P 二体有引潮加速度

$$\vec{a}_2 = Gm \left(\frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{A}}{A^3} \right) \quad (2.117)$$

若 $|\vec{a}_1|$ 与 m 对 P 引力的加速度大小 Gm/r^2 之比小于 $|\vec{a}_2|$ 与 M 对 P 引力的加速度大小 GM/R^2 之比, 可认为 P 应看作主要受 m 吸引。此两个比值相等处就定义为 m 对 M 的作用范围边界。即有:

$$\frac{M}{m} r^2 \left| \frac{\vec{R}}{R^3} - \frac{\vec{A}}{A^3} \right| = \frac{m}{M} R^2 \left| \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{A}}{A^3} \right|$$

利用(2.113), (2.114)式可化为:

$$r^8 \left[1 - \frac{2(A-x)}{A^2} R + \frac{R^4}{A^4} \right] = \mu^2 R^8 \left(1 - \frac{2rx}{A^2} + \frac{r^4}{A^4} \right) \quad (2.118)$$

这是一个复杂的高阶代数曲面方程，可用数值方法绘出曲面图形。但这种范围不要求很精确，给出近似结果就行。容易看出此曲面旋转对称于 x 轴，只要近似讨论在 xy 平面上几个代表点 L, L', Q, Q' 处的 r 值就够了。

① 在 L 点, $x = r, R = A - r$; (2.118) 式可化为:

$$\begin{aligned} r^8 \left(\frac{2r}{A} - \frac{r^2}{A^2} \right)^2 &= \mu^2 R^8 \left(1 - \frac{r^2}{A^2} \right)^2 \\ &= \mu^2 A^8 \left(1 - \frac{r}{A} \right)^8 \left(1 - \frac{r^2}{A^2} \right)^2 \end{aligned}$$

一般情况 r/A 为小量, 略去高次项可得:

$$r \simeq \frac{A}{\sqrt[5]{2}} \mu^{2/5} \quad (2.119)$$

② L' 情况相同, $x = -r, R = A + r$, 有

$$r^8 \left(\frac{2r}{A} + \frac{r^2}{A^2} \right)^2 = \mu^2 A^8 \left(1 + \frac{r}{A} \right)^8 \left(1 - \frac{r^2}{A^2} \right)^2$$

可近似地取

$$r \simeq \frac{A}{\sqrt[5]{2}} \mu^{2/5}$$

③ Q, Q' 都是 $x = 0, R^2 = A^2 + r^2$; (2.98) 式为

$$\begin{aligned} r^8 \left[1 - 2 \left(1 + \frac{r^2}{A^2} \right)^{1/2} + \left(1 + \frac{r^2}{A^2} \right)^2 \right] \\ = \mu^2 A^8 \left(1 + \frac{r^2}{A^2} \right)^4 \left(1 + \frac{r^4}{A^4} \right) \end{aligned}$$

略去 r/A 高次项后为

$$r \simeq A \mu^{2/5} = r_2 \quad (2.120)$$

因 $|x| \leq r$, 故 x 取其他值时, 容易看出对应的 r 值也与上面给出的值很接近, 而 $\sqrt[5]{2}$ 又接近于 1, 大家约定取 (2.120) 的值为作用范

围半径。而 $0 < \mu < 1$, 故 $r_2 > r_1$, 即作用范围比引力范围大。

3. 希耳范围。在讨论运动范围和稳定性问题中, 小质点 P 在 m, M 引力下, 若初始条件符合某种要求, 会在 m 附近形成一个范围; 若初始时刻 P 点在范围内, 则永远不会逃出。此范围最大时接近于以 m 为中心的球面, 半径为

$$r_3 \simeq A\mu^{1/3} \tag{2.121}$$

称为希耳范围。准确的曲面叫希耳曲面, 具体讨论参看第六章, 限制性三体问题一节。

4. 应用。根据上述三种范围定义, 在一些近似讨论的课题中 有用。下面先给出大行星对太阳, 月球对地球的三种范围大小的数据, 载于表 2.2; 然后再介绍几种应用。

表 2.2 大行星和月球的引力作用范围

天 体	引力范围 (万公里)	作用范围 (万公里)	希耳范围 (万公里)
水 星	2.4	11.2	22.1
金 星	6.9	61.6	100.8
地 球	26.0	92.8	149.7
火 星	12.8	57.7	108.3
木 星	2404.2	3917.8	5187.2
土 星	2409.9	5449.5	6410.7
天王星	1897.2	5166.6	6950.9
海王星	3234.9	8678.3	11516.7
冥王星	984.5	3539.1	5428.6
月 球	4.27	6.62	8.88

① 宇宙速度。第一, 二宇宙速度不用引力作用范围, 但第三宇宙速度要用。

第一宇宙速度 V_1 代表地面发射人造卫星的最小速度, 即半径为地球赤道半径 R_e 的轨道速度, 用活力公式有

M ——公差范围的中心值；
 $\bar{x}$ ——实际尺寸分布范围的中心值；
 ε ——分布中心与公差中心的绝对偏移量；
 T ——公差。

修正后工序能力指数 C_{PK} 为：

$$C_{PK} = \frac{T}{6s} \left(1 - \frac{2\varepsilon}{T} \right)$$

关于工序能力指数的判断见表14-8所示。

表14-8

C_p 值的大小	判 断
$C_p < 1.33$	工序能力可以充分满足要现，如果 C_p 值过大，则应对公差要求及工艺条件加以分析，避免设备精度的浪费
$C_p = 1.33$	理想状态
$1 \leq C_p < 1.33$	也比较理想，但当 C_p 很接近 1 时，则有产生超差的危险，应加强控制
$C_p < 1$	尺寸分布不能满足公差的要求，应立即采取措施，改变工艺条件，或严格进行全数检查，也考虑放宽标准
$C_p < 0.67$	已产生大量废品，必须立即停止生产，采取措施

五、控制图法

控制图又叫管理图，它是用来分析和判断工序是否处于稳定状态，所使用的带有控制界限的一种图表。它是一种动态的质量分析与控制的方法。作为质量分析和控制的控制图法，首先需要作出分析用的控制图，通过收集数据，计算出控制图的中心线和上下控制界限，画出控制图，利用控制图及时显示出生产过程产品质量的波动情况，以预防废品的发生。

1．控制图的基本形式

控制图的基本形式，如图14- 8 所示。

发射月球火箭用两次二体问题，由地面飞到月球作用范围边界，可看作地球和飞行器的二体问题；进入月球作用范围后，再看作飞行器同月球的二体问题。

到其他大行星附近的飞行器轨道设计，要用三次二体问题：由地面飞出地球作用范围前是飞行器同地球的二体问题；飞出地球作用范围后是同太阳的二体问题；进入目标行星作用范围后是同目标行星的二体问题。

如要一次飞行多探测几个行星，则是更多次的二体问题。如美国发射的旅行者一，二号就是如此。

③ 太阳系边界问题。太阳系最外已知行星为冥王星，轨道半径约 40 天文单位；再外面仅知有彗星，现在已知最远的远日距离达 40 万天文单位(如 1898 Ⅶ，1902 Ⅲ)。推断太阳系的动力学边界最好用太阳对银河系的引力作用范围。

太阳以内的银河系总质量取为 1.3×10^{11} 太阳质量，到银心距离取作 8200 秒差距，约 16.5×10^8 天文单位，算出得：

引力范围	4500 天文单位
作用范围	60000 天文单位
希耳范围	230000 天文单位

奥耳特(Oort)彗星云估计延伸到希耳范围边界，已越过 1 秒差距。即使用引力范围，已比冥王星轨道半径大 100 多倍，故以后发现冥外行星是很自然的。

第十节 椭圆运动的几个重要展开式

椭圆运动中的各种量都可分别表示为近点角的函数。在后面讨论摄动时，需要把各量统一表达为时间(即平近点角 $M = nt + M_0$)或同一近点角的显函数，以便积分。由于 E ， M ， f 之间的关

系是超越函数，故一般的量只能用级数展开方法进行。现在已有普遍的展开方法，将在天体力学方法中讲述，这里只介绍几个要用到的展开式

1. E 和 f 之间的展开。从(2.80)式

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}$$

出发，引入复变量

$$\xi = \exp(if), \eta = \exp(iE) \quad (2.124)$$

上式可化为：

$$\frac{\xi-1}{\xi+1} = \frac{1+\beta}{1-\beta} \frac{\eta-1}{\eta+1}, \beta = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}} \quad (2.125)$$

由此可解出：

$$\xi = \frac{\eta(1-\beta\eta^{-1})}{1-\beta\eta}, \quad \eta = \frac{\xi(1+\beta\xi^{-1})}{1+\beta\xi} \quad (2.126)$$

第一式取自然对数得：

$$if = iE + \ln(1-\beta\eta^{-1}) - \ln(1-\beta\eta)$$

因 $|\beta\eta^{-1}| = |\beta\eta| = \beta < e < 1$ ，后两项可展开得：

$$\begin{aligned} if &= iE - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \beta^n \eta^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \beta^n \eta^n \\ &= iE + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \beta^n (\eta^n - \eta^{-n}) \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad f = E + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \beta^n \sin nE \quad (2.127)$$

同样可从(2.106)第二式展开为：

$$E = f + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \beta^n \sin nf \quad (2.128)$$

2. E 同 M 间的展开。它们之间关系是开普勒方程

$$M = E - e \sin E$$

它就是 M 表达为 E 的函数式；另外可由循环式

$$E = M + e \sin \{M + e \sin [M + e \sin (M + \dots \dots \quad (2.129)$$

可导出准到 e 的任意阶的展开式;若用泰勒级数也可展开:

$$E = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \left(\frac{d^n E}{de^n} \right)_0 \quad (2.130)$$

其中脚数 0 表示求完微商后令 $e = 0$, $E = M$, 而各阶微商可用开普勒方程求出。下面给出准到 e^6 的结果为:

$$\begin{aligned} E = M + e \sin M + \frac{e^2}{2!} \sin 2M \\ + \frac{e^3}{2^2 \times 3!} (3^2 \sin 3M - 3 \sin M) \\ + \frac{e^4}{2^3 \times 4!} (4^3 \sin 4M - 4 \times 2^3 \sin 2M) \\ + \frac{e^5}{2^4 \times 5!} \left(5^4 \sin 5M - 5 \times 3^4 \sin 3M + \frac{5 \times 4}{2} \sin M \right) \\ + \frac{e^6}{2^5 \times 6!} \left(6^5 \sin 6M - 6 \times 4^5 \sin 4M + \frac{6 \times 5}{2} 2^5 \sin 2M \right) \end{aligned} \quad (2.131)$$

同样可求出:

$$\begin{aligned} \sin E = \frac{1}{e} (E - M) \\ \cos E = \cos M + \frac{e}{2} (\cos 2M - 1) \\ + \frac{e^2}{2^2 \times 2!} (3 \cos 3M - 3 \cos M) \\ + \frac{e^3}{2^3 \times 3!} (4^2 \cos 4M - 4 \times 2^2 \cos 2M) \\ + \frac{e^4}{2^4 \times 4!} \left(5^3 \cos 5M - 5 \times 3^3 \cos 3M + \frac{5 \times 4}{2} \cos M \right) \\ + \frac{e^5}{2^5 \times 5!} \left(6^4 \cos 6M - 6 \times 4^4 \cos 4M \right. \\ \left. + \frac{6 \times 5}{2} \times 2^4 \cos 2M \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.132)$$

及 $\frac{r}{a} = 1 - e \cos E$ 。

3. f 和 M 间的展开式。 f 与 M 只有开普勒第二定律作为直接联系：

$$\frac{df}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} = \frac{na^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2}$$

即 $\frac{df}{dM} = \sqrt{1-e^2} \frac{a^2}{r^2} = \sqrt{1-e^2} (1 - e \cos E)^{-2} \quad (2.133)$

可展开为 e 的幂级数, 系数为 $\cos E$ 的幂次, 用(2.112)代入, 可整理为 M 的三角多项式, 系数为 e 的级数; 然后对 M 积分可得

$$\begin{aligned} f = M &+ \left(2e - \frac{e^3}{4} + \frac{5}{96}e^5 + \frac{107}{4068}e^7 \right) \sin M \\ &+ \left(-\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{192}e^6 \right) \sin 2M \\ &+ \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5 + \frac{95}{512}e^7 \right) \sin 3M \\ &+ \left(\frac{103}{96}e^4 - \frac{451}{480}e^6 \right) \sin 4M + \frac{1223}{960}e^6 \sin 6M \\ &+ \frac{47273}{32256}e^7 \sin 7M + \dots \end{aligned} \quad (2.14)$$

此式又称为中心差 f - M 公式。

习 题

1. 若取二体质心为坐标原点，试列出二体对质心的运动方程；并讨论运动方程的积分以及运动轨道与二体相对运动有何异同。

2. 若万有引力定律改为：

$$F = GMm f(r)$$

试列出相应的二体运动方程，并讨论哪些积分还存在。

3. 试证明第2题中 $f(r) = r$ 时，二体相对运动轨道仍为圆锥曲线。

4. 在(2.5)式中，若轨道曲线方程为 $r = 2a \cos \theta$ ，试求出 $f(r)$ 。

5. 试找出一些函数 $f(r)$ ，使相应的二体运动方程可以积分出来。

6. 在椭圆轨道上运动速度为 $\vec{v}$ ，与向径 $\vec{r}$ 的交角设为 α ，试证明下列关系：

$$v^2 = \frac{\mu}{p}(1 + e^2 + 2e \cos f) \quad (2.135)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= r \frac{df}{dr} = \frac{1 + e \cos f}{e \sin f} \\ \cos \alpha &= \frac{e \sin f}{\sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}} \\ \sin \alpha &= \frac{1 + e \cos f}{\sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.136)$$

7. 设 β 为 $\vec{v}$ 与 $\vec{p}$ (长轴指向近点方向) 之间的交角, 试证明下列关系:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= -\frac{\cos f + e}{\sin f} \\ \cos \beta &= -\frac{\sin f}{\sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}} \\ \sin \beta &= \frac{\cos f + e}{\sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.137)$$

8. 第二节中(2.61)式出现的拉普拉斯积分常向量 $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ 与其他积分常数有函数关系, 试证明:

$$\left. \begin{aligned} F^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 &= -\frac{\mu}{a}h^2 + \mu^2 \\ \vec{F} \cdot \vec{P} &= -\mu e, \quad \vec{F} \cdot \vec{Q} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.138)$$

并指出 $\vec{F}$ 的大小方向。

9. 利用椭圆运动中的近点角关系证明:

$$\textcircled{1} \quad \sqrt{r} \cos \frac{f}{2} = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{E}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad \sqrt{r} \sin \frac{f}{2} = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{E}{2}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{df}{dE} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1 + \cos f}{1 + \cos E} = \frac{\sin f}{\sin E}$$

10. 在(2.98)式中的 F_i, G_i , 试导出它们的封闭表达式:

$$\left. \begin{aligned} F_i &= \frac{\cos(E_i - E_2) - e \cos E_2}{1 - e \cos E_2} \\ G_i &= \frac{1}{n} [\sin(E_i - E_2) - e(\sin E_i - \sin E_2)] \end{aligned} \right\} \quad (2.139)$$

11. 如用 $a, e, i, \Omega, \omega, M = nt + M_0$ 作轨道根数, 试证明:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial \vec{r}}{\partial a} &= \frac{\vec{r}}{a}, & \frac{\partial \vec{r}}{\partial M} &= \frac{\dot{\vec{r}}}{n} \\
\frac{\partial \vec{r}}{\partial e} &= -\frac{a}{r} \left[\cos E + \frac{e}{1-e^2} \sin^2 E \right] \vec{r} \\
&\quad + \sin E \left[2 - \frac{e}{1-e^2} (\cos E - e) \right] \frac{\dot{\vec{r}}}{n}
\end{aligned} \right\} \quad (2.140)$$

$$\frac{\partial f}{\partial e} = \left(\frac{a}{p} + \frac{a}{r} \right) \sin f, \quad \frac{\partial f}{\partial M} = \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2}$$

13. 按(2.62)式, 太阳系各大行星的轨道半长径立方与周期平方之比不是同一常数, 是否说明牛顿万有引力定律与开普勒第三定律矛盾?

14. 试说明, 从地面发射的飞行器到达月球作用范围边界时, 相对于月球的速度大于该处的月球脱离速度(即不能被月球俘获)。

15. 行星在椭圆轨道上从真近点角为 f_1 到 f_2 的时间怎样计算?

16. 若人造卫星的轨道根数已知, 试求出卫星以纬度 φ_1 到 φ_2 所需时间的计算方法。

17. 从地球轨道上发射航天器到另一行星, 试找出所需速度为最小的轨道(略去地球和行星的引力)。

18. 同上题, 求出计算此最小的速度式子; 以及考虑地球引力后相应的地面发射速度计算式子。

19. 给出在地球轨道上发射相对太阳为抛物线速度的飞行器到达另一行星轨道所需时间公式; 并与用最小速度轨道所需时间进行比较。

20. 当轨道根数 Ω, ω, i 有微小增量 $\Delta\Omega, \Delta\omega, \Delta i$ 时, 试给出计算的 $\vec{r}$ 相应增量公式。

第三章 正则方程组和 正则变换

第一节 数学符号，梯度向量

本章中用到 n 维向量 n 阶方阵很多, 为简化起见, 在符号上作出下面规定。

如不加说明, 小写拉丁字母 a, b, c 等代表 n 维向量, 其分量为脚数加数字, 如 $a = (a_i), i = 1, 2, \dots, n; x = (x_i)$, 而且代表列向量:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

这也是 1 列 n 行的矩阵。两个 n 维向量的数量积为:

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad (3.1)$$

若 β 为一数量, 则 $\beta a = (\beta a_i)$ 仍为一向量

大写字母 $A, B, C, \dots$ 以及希腊字母 Γ 等代表 n 阶方阵或一般矩阵, 如 $A = (a_k^i)$, 即

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots\dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots\dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots\dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

a_k^i 为第 i 列第 k 行的元素。 A^T 表示 A 的转置矩阵, 即若 $A = (a_k^i)$, 则 $A^T = (a_i^k)$ 。按线性代数中规定, n 阶方阵乘积 AB 也为 n 阶方阵, 且有 $(AB)^T = B^T A^T$ 。由于 n 维向量 a 为 1 行 n 列矩阵, 故 Aa 也为向量, aA 无意义, 且容易验证:

$$a \cdot (Cb) = b \cdot (C^T a) \quad (3.2)$$

用 $\det A$ 表示方阵 A 的行列式; 若 $\det A \neq 0$, 则称 A 为非异方阵。任何非异方阵 A 存在逆方阵, 记为 A^{-1} , 并有 $A^{-1}A = AA^{-1} = E$; 其中 E 表示单位方阵。若 $A^{-1} = A^T$, 则称 A 为正交方阵。若 $A^T = A$, 则称 A 为对称矩阵, $A^T = -A$ 时称为反对称矩阵。

向量和矩阵的分量或元素, 可以是数值, 也可以是一个或 n 个变量的函数(如不加申明, 都作为单值函数)。分量为函数的向量称为向量函数; 元素为函数的矩阵称为矩阵函数。函数的定义域为 n 维笛卡尔空间 R^n 中的非空开集。

设 $f = f(x)$ 为向量 x 的一个数量、向量或矩阵函数, 若在其定义域 D 中对 x 的每一个分量存在一阶到 k 阶连续偏导数, 则称函数属于 $C^{(k)}$ 类, 记为 $f(x) \in C^{(k)}$ 。向量或矩阵函数属于 $C^{(k)}$ 类, 是指它的每一个元素或分量都属于 $C^{(k)}$ 。

设 x, y 为 n 维向量, 则向量函数 $y = y(x)$ 为 x 空间到 y 空间的一个变换。若 $y(x) \in C^{(k)}$, 且变换的雅可比(Jacobi)行列式

$$\det y_x = \det(y_k^i) = \det\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right) \quad (3.3)$$

在 x 的定义域中某点不为 0, 则由隐函数存在定理知, 在此点对应的 y 空间中点的邻域内存在反函数 $x = x(y)$, 且 $x(y) \in C^{(k)}$; 此时称 $y(x) \in C^{[k]}$, 同样 $x(y) \in C^{[k]}$ 。

若 $f = f(x)$ 为向量 x 的数量函数, 即 $f = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$; 用 f_{x_i} 表示偏导数 $\partial f / \partial x_i$, 而用 f_x 表示向量函数 $(\partial f / \partial x_i)$, 称为 f 对 x 的梯度, 记为:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T \quad (3.4)$$

若 f 为 x 的向量函数, 则 f_x 代表 f 对 x 的雅可比矩阵:

$$f_x = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right)$$

若 $f(x)$ 为矩阵函数, 则 f 对某分量 x_k 的偏导数是元素为 f 中相应元素对 x_k 的偏导数组成的矩阵。

由于数量函数的梯度是向量函数, 下面引入在本章中有重要作用的梯度向量及其性质。

定义: 设向量 x 的向量函数 $y(x) \in C^{(1)}$, 且存在一数量函数 $S(x) \in C^{(2)}$, 使得 $y(x) = S'_x = \nabla S$, 则称 $y(x)$ 为梯度向量。

在讲梯度向量性质之前, 要先讲一个有关全微分条件的辅助定理。

辅理 向量 x 的向量函数 $y(x)$ 组成的微分式 $y \cdot dx$ 是全微分 [即存在数量函数 $f(x)$ 使 $y \cdot dx = df$] 的充要条件是 y_x 为对称方阵, 即

$$y_x = (y_x)^T \text{ 或 } \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \quad (3.5)$$

证: 先证必要性。若存在 $f(x)$, 使 $y \cdot dx = df = f'_x \cdot dx$; 由于微分的任意性可得 $y = f'_x$, 即有 $y_x = f'_{xx} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right) = (y_x)^T$ 。

现证充分性。用数学归纳法, 设 (3.5) 成立。 $n=1$ 无意义; $n=2$ 时 (3.5) 式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \\ \text{令 } \phi &= \phi(x_1, x_2) = \int y_1 dx_1, \quad z_2 = y_2 - \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

其中对 x_1 积分时, 视 x_2 为参量。则有

$$\frac{\partial z_2}{\partial x_1} = \frac{\partial y_2}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial y_2}{\partial x_1} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = 0$$

即 $z_2 = z_2(x_2)$, 再取

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \int z_2 dx_2 \\ f &= \phi + \psi \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

则可得

$$\begin{aligned} f_{x_1} &= \phi_{x_1} + \psi_{x_1} = y_1 \\ f_{x_2} &= \phi_{x_2} + \psi_{x_2} = (y_2 - z_2) + z_2 = y_2 \end{aligned}$$

这就表明 $y(x)$ 为梯度向量 ∇f 。

现从 $n-1$ 成立推出 n 成立, $n-1$ 成立时应有 $\phi = \phi(x_1, \dots, x_{n-1})$, 使 $n-1$ 维向量函数 $z(x_1 \cdots x_{n-1})$ 有

$$z \cdot dx = d\phi, \text{ 或 } z = \phi_x \quad (3.8)$$

在 n 时, 定义函数 $\phi = \phi(x_1 \cdots x_n)$ 为

$$\phi = \int y_n dx_n, \quad z_k = y_k - \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \quad (3.9)$$

积分时视 $x_1, \dots, x_{n-1}$ 为参数, $k=1, 2, \dots, n-1$ 。则有

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_n} = \frac{\partial y_k}{\partial x_n} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n \partial x_k} = \frac{\partial y_k}{\partial x_n} - \frac{\partial y_n}{\partial x_k} = 0$$

即 z_k 不含 x_n , 为 $x_1, \dots, x_{n-1}$ 的函数; 另有

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_k}{\partial x_i} &= \frac{\partial y_k}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial y_i}{\partial x_k} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(z_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial z_i}{\partial x_k} \end{aligned}$$

故此 $n-1$ 维向量 z 符合(3.5)式, 而由于已假定 $n-1$ 时成立, 即存在函数 $\phi = \phi(x_1, \dots, x_{n-1})$, 满足(3.8)式, 再定义

$$f = \phi + \psi$$

则有

$$\begin{aligned} f_{x_n} &= \phi_{x_n} + \psi_{x_n} = \phi_{x_n} = y_n \\ f_{x_k} &= \phi_{x_k} + \psi_{x_k} = (y_k - z_k) + z_k = y_k \end{aligned}$$

其中 $k < n$, 即 $y = f_x$, $y \cdot dx = df$ 。故充分性得证。下面用它来证明有关梯度向量的两个定理。

定理一 (3.5) 式是向量函数 $y = y(x)$ 为梯度向量的充要条件。

证 由辅理知, (3.5) 式是微分式 $y \cdot dx$ 为全微分的充要条件; 设全微分为 $dS, S = S(x_1, \dots, x_n)$, 等价于 $y = S_x$, 即 $y(x)$ 为梯度向量。定理得证。

定理二 设 $A(x) \in C^{(1)}$ 为矩阵函数, 则它能把任意梯度向量变化为梯度向量 (即对任一数量函数 $f(x) \in C^{(k)}$, 必存在另一数量函数 $\bar{f}(x) \in C^{(k)}$, 使得 $\bar{f}_x = Af_x$) 的充要条件为 $A(x) = \mu E$, 其中 μ 为与 x 无关的常数, E 为单位矩阵。

证 充分性显然, 因若 $A(x) = \mu E$, 可取 $\bar{f} = \mu f$, 有 $\bar{f}_x = Af_x$ 。

现证必要性, 只要能证明 $A(x)$ 将某些梯度向量仍变为梯度向量时, 必须具有 μE 形式就行了。分两步证出:

先设 $f = f(x_k)$ 为一个变量 x_k 的任意多项式, (k 为 1 到 n 的任一整数), 并用 $g(x_k) = f_{x_k}$, 也是任意多项式; 于是当 $i \neq k$ 时有 $f_{x_i} = 0$ 。应有

$$Af_x = (gA_k^1, gA_k^2, \dots, gA_k^n)^T$$

但根据假定 Af_x 应为梯度向量, 则有 $(Af_x)_x = (Af_x)^T$, 即有

$$\frac{\partial(gA_k^i)}{\partial x_k} = \frac{\partial(gA_k^k)}{\partial x_i} = g \frac{\partial A_k^k}{\partial x_i} \quad (i \neq k)$$

可得

$$g \left(\frac{\partial A_k^i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k^k}{\partial x_i} \right) + A_k^i \frac{dg}{dx_k} = 0$$

由于 g 的任意性, 可得

$$A_k^i = 0, \quad \frac{\partial A_k^k}{\partial x_i} = \frac{\partial A_k^i}{\partial x_k} = 0,$$

故得 A 的非对角线元素全为 0, 而且 A_k^k 只为 x_k 的函数。即 A 为对角矩阵, 对角线元素只能为 $A_1^1(x_1), A_2^2(x_2), \dots, A_n^n(x_n)$ 的形式。

其次取 $f = x_i x_k$, 其中 i, k 为 1 到 n 的任意整数; 则

$$A f_x = (0 \cdots A_k^k x_i, 0 \cdots A_i^i x_k, 0 \cdots 0)^T$$

条件 $(A f_x)_x = (A f_x)_x^T$ 成为

$$A_k^k = A_i^i$$

而且不能包含 x 的任一分量, 由 i, k 的任意性, 必然有 $A_1^1 = A_2^2 = \cdots = A_n^n = \mu$ (与 x 无关常数)。故 $A = \mu E$, 定理得证。

推理 设 $a = a(x)$ 为向量函数, $A(x)$ 为方阵, 而 $f = f(x) \in C^{(k)}$ 为数量函数; 则 $a + A f_x$ 为梯度向量的充要条件为: a 是梯度向量, $A(x) = \mu E$, 其中 μ 为与 x 无关的常数。

证 充分性显然, 因若 a 为梯度向量 g_x , $A = \mu E$, 则可取 $\bar{f} = g + \mu f$, 有 $a + A f_x = \bar{f}_x$ 为梯度向量。

现证明必要性。若 $a + A f_x$ 对任一 f 都是梯度向量, 则 $f = 0$ 亦成立, 即 a 为梯度向量, 记为 g_x ; 另外由定理条件知, 对任 $-f(x)$ 有 $\bar{f}(x)$, 使 $a + A f_x = \bar{f}_x$, 即 $A f_x = \bar{f}_x - g_x = (\bar{f} - g)_x$ 为梯度向量。用定理二知 $A = \mu E$, 定理得证。

第二节 哈密顿正则方程

在天体力学中, 常用哈密顿正则方程组表达各类天体的运动方程, 这是因为正则方程组具有简单的反对称形式, 并存在一些原则解法。本节不作原始推导(可参看分析动力学), 只在符号上统一。

设 $r = (r_1, r_2, \cdots r_n)^T$, $p = (p_1, p_2, \cdots p_n)^T$ 为 n 维向量; $H = H(p) \in C^{(2)}$ 为 p 的一个数量函数。定义 $H(p)$ 对 p 的哈斯行列式为:

$$\det(H_{pp}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^2}, & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_2}, & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_n} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_1}, & \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^2}, & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial p_1}, & \frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial p_2}, & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^2} \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

此行列式就是梯度向量 $H_p(p)$ 对 p 的雅可比行列式, 故若在 p 空间的某域内有 $\det(H_{pp}) \neq 0$, 则由函数 $r = r(p) = H_p(p)$ 定义的变化, 存在唯一的逆变换 (反函数) $p = p(r) \in C^{(1)}$, 即 $r = r(p) \in C^{(1)}$ 。由定义知 $r = r(p)$ 为梯度向量, 下面证明反函数 $p = p(r)$ 也是梯度向量。

定理 $r = H_p(p)$ 的反函数 $p = p(r)$ 也是梯度向量, 即存在数量函数 $L = L(r) \in C^{(2)}$, 有 $p = L_r(r)$; 并满足关系:

$$L_{rr} H_{pp} = E \quad (3.11)$$

证 定义函数 $L(r)$ 为:

$$L(r) + H(p) = r \cdot p \quad (3.12)$$

其中 p 看作 r 的函数, 两端对任一分量 r_i 求偏导数可得

$$L_{ri} + H_p \cdot p_{ri} = p_i + r \cdot p_{ri} = p_i + H_p \cdot p_{ri}$$

即 $L_{ri} = p_i$, 对 $i = 1, 2, \cdots, n$ 都成立, 也就是 $p = p(r) = L_r(r)$ 为梯度向量。又因 $H_{pp} = r_p$ 为 r 对 p 的雅可比矩阵, $L_{rr} = p_r$ 为反函数 p 对 r 的雅可比矩阵, 因此 (3.11) 式成立。

从上可知 $r = H_p(p)$ 的反函数 $p = p(r) = L_r(r)$ 是唯一确定的, 但 $L(r)$ 可以有任意附加常数。因一般只用到 L 的偏导数, 不会出现矛盾。

如果函数 H, L 中还含有 l 维向量 $s = (s_1, s_2, \cdots, s_l)^T$ 作为参量, 不影响它们对 r 或 p 的偏导数。即 $L = L(r, s), H = H(p, s)$, 并若对所含的 $n + l$ 个量而言属于 $C^{(2)}$, 则上面关系都成立, 有

$$p = L_r(r, s), \quad r = H_p(p, s) \quad (3.13)$$

$$L_{rr} H_{pp} = E \quad (3.14)$$

$$L(r, s) + H(p, s) = r \cdot p \quad (3.15)$$

其中(3.13)式可看作 (r, s) 空间同 (p, s) 空间的变换, 可把其中任一组例如 (r, s) 看作独立变量。故相应地在(3.15)式对 s 取偏导数可得:

$$L_s + H_s + H_p \cdot p_s = r \cdot p_s = H_p \cdot p_s$$

即得

$$L_s(r, s) + H_s(p, s) = 0 \quad (3.16)$$

用分析动力学中的符号, 取 $s = (q, t)$, 其中 n 维向量 q 代表所讨论动力系统的广义坐标, t 为时间; 并取 $r = \dot{q}$, p 为系统的广义动量。则相应的函数

$$L(r, s) = L(\dot{q}, q, t)$$

$$H(p, s) = H(p, q, t)$$

分别为此系统的拉格朗日函数和哈密顿函数, (3.16)式为它们之间的关系。此时(3.16)式可写为:

$$L_q(\dot{q}, q, t) + H_q(p, q, t) = 0 \quad (3.17)$$

$$L_t(\dot{q}, q, t) + H_t(p, q, t) = 0 \quad (3.18)$$

如定义系统的拉格朗日导数为

$$[L]_q = \frac{d}{dt} L_{\dot{q}} - L_q \quad (3.19)$$

则由(3.13)和(3.17)式可得:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= r = H_p(p, q, t) \\ \dot{p} &= \frac{d}{dt} L_{\dot{q}}(\dot{q}, p, t) = [L]_q + L_q \\ &= [L]_q - H_q(p, q, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

若此动力系统满足拉格朗日方程:

$$[L]_q = 0 \quad (3.21)$$

则由(3.20)式知, 必然满足方程:

$$\dot{q} = H_p(p, q, t), \quad \dot{p} = -H_q(p, q, t) \quad (3.22)$$

即哈密顿正则方程; q, p 称为**正则共轭变量**。 (q, p) 空间或 $(\dot{q}, q)$ 空间称为动力系统的相空间; 广义坐标 q 组成的空间称为**位形空间**, 广义动量 p 组成的空间称为**动量空间**。

为简单方便起见, 用 $2n$ 维向量 x 代表 (p, q) , 即 $x_1, \dots, x_n$ 为 $p_1, \dots, p_n$; $x_{n+1}, \dots, x_{2n}$ 为 $q_1, \dots, q_n$; 并定义 $2n$ 阶反对称方阵 I 为:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \quad I^{-1} = I^T = -I \quad (3.23)$$

其中 E 为 n 阶单位矩阵, 0 代表 n 阶元素全为 0 的零方阵。则 (3.22) 式可简写为:

$$\dot{x} + IH_x = 0 \quad (3.24)$$

其中 $H = H(x, t)$ 为哈密顿函数。

第三节 正则变换及其充要条件

由于在天体力学常用正则方程, 正则共轭变量的选择就成为重要手段。经常要从原有的正则共轭变量 x , 换为另一组正则共轭变量 y 。这就要引入正则共轭变量之间的变换; 后来发现, 正则变换成为哈密顿正则方程的原则解法之一。为了理论上严密性, 下面要给出正则变换的严格定义和充要条件。先从一般变换讲起。

设 x, y 都是 $2n$ 维向量, t 为数量; 向量函数 $y = y(x, t) \in C^{(2)}$ 为 x 空间到 y 空间的一个变换。若再设此变换的雅可比行列式 $\det y_x(x, t)$ 在 x 的某域内不为 0 , 则由隐函数存在定理知, 在 y 的对应域中存在反函数 $x = x(y, t)$, 与 $y = y(x, t)$ 都属于 $C^{[2]}$ 。

对属于 $C^{(1)}$ 的数量函数 $F = F(y, t)$, 通过变换 $y = y(x, t)$ 也可视作 x, t 的函数。用

$$\Gamma = y_x \quad (3.25)$$

表示变换的雅可比矩阵($2n$ 阶方阵), 则有

$$F_x = \Gamma^T F_y \quad (3.26)$$

而 F 对 t 求偏导数时, 必须说明 F 是 x, t 的函数还是 y, t 的函数, 二者结果不同。如 $\Gamma = y_x$ 看作 x, t 的函数时有:

$$(y_x)_t = (y_t)_x \quad (3.27)$$

这要假定 $\Gamma(x, t) \in C^{(1)}$ 。若右端中 y_t 经变换后已成为 y, t 的函数, 则 $(y_t)_x = (y_t)_y y_x = (y_t)_y \Gamma$, 与上式一起可得:

$$(y_t)_y = \Gamma_t \Gamma^{-1} \quad (3.28)$$

如 x, y 都是 t 的函数, 则由变换 $y = y(x, t)$ 可得:

$$\dot{y} = \Gamma \dot{x} + y_t \quad (3.29)$$

利用这些符号和关系, 正式给出正则变换的定义:

定义 相空间的变换 $y = y(x, t)$, 若对 x, t 的任一哈密顿函数 $H(x, t)$, 存在数量函数 $K = K(y, t)$, 使得:

$$\Gamma(\dot{x} + I H_x) = \dot{y} + I K_y \quad (3.30)$$

则称此变换 $y = y(x, t)$ 为正则变换。

这样的定义不是简单的直观式定义: 把正则共轭变量 x 变为正则共轭变量 y 的变换。但与直观定义联系在一起, 因从(3.30)可知, 若 x 为正则共轭变量, $H(x, t)$ 为其哈密顿函数, 则由(3.24)知 $\dot{x} + I H_x = 0$; 当然由(3.30)得到 $\dot{y} + I K_y = 0$, 表明新变量 y 也是正则共轭, 对应的哈密顿函数为 $K = K(y, t)$ 。而且从定义可看出 $y = y(x, t)$ 是否正则变换, 与函数 $H(x, t)$ 无关。

此定义虽然概念清楚, 但不便于应用。下面用一系列的充要条件来同此定义等价, 既深化正则变换性质, 又能扩大应用范围。

定理一 变换 $y = y(x, t)$ 是正则变换的充要条件为: 对任一哈密顿函数 $H = H(x, t) \in C^{(1)}$, 经变换后使向量

$$W(y, t) = I y_t + I^{-1} \Gamma I \Gamma^T H_y \quad (3.31)$$

为梯度向量。

证 若 $W(y, t)$ 为梯度向量, 即存在数量函数 $K = K(y, t)$, 使得 $W(y, t) = K_y(y, t)$, 代入上式后, 再利用(3.29)和(3.26)式可导出(3.30)式成立, 即变换 $y = y(x, t)$ 为正则变换。反之, 若 $y = y(x, t)$ 是正则变换, 则对 $H(x, t)$ 存在 $K(y, t)$, 且满足(3.30)式利用(3.29)及(3.26)式又可从(3.30)式导出:

$$K_y = I y_t + I^{-1} \Gamma I \Gamma^T H_y = W(y, t)$$

即 $W(y, t)$ 为梯度向量, 故定理得证。

定理二 相空间变换 $y = y(x, t) \in C^{[2]}$ 是正则变换的充要条件为: $\Gamma I \Gamma^T = \Gamma^T I \Gamma = \mu I$, 其中 μ 为与 x, y, t 无关的常数。

证 用定理一知, $y = y(x, t)$ 是正则变换的充要条件是对任一 $H(x, t)$ 有 $W(y, t)$ 为梯度向量。但从(3.31)式知, $W(y, t) = a + A f_y$ 形式, 其中 $a = I y_t$, $A = I^{-1} \Gamma I \Gamma^T$, $f_y = H_y$ 。又从第一节中的推理知, 若为正则变换, 此向量 $W(y, t)$ 为梯度向量, 即有

① $I y_t$ 是梯度向量, 即存在数量函数 $R = R(y, t)$, 使得

$$I y_t = R_y(y, t);$$

② $I^{-1} \Gamma I \Gamma^T = \mu E$, 或 $\Gamma I \Gamma^T = \mu I$, 而 μ 与 y 无关, 但可能与 t 有关, 记为 $\mu = \mu(t)$ 。

下面只要能证明 μ 与 t 无关, $\Gamma I \Gamma^T = \Gamma^T I \Gamma$ 就行了。由①, $I y_t$ 为梯度向量, 故满足充要条件(第一节的定理一):

$$(I y_t)_y = (I y_t)_y^T$$

但根据(3.28)式, 上式可化为

$$I \Gamma_t \Gamma^{-1} = (I \Gamma_t \Gamma^{-1})^T = (\Gamma^{-1})^T \Gamma_t^T I^T$$

利用关系 $I^T = -I$, $(\Gamma^{-1})^T = (\Gamma^T)^{-1}$, 上式又可化为

$$(\Gamma^T I \Gamma)_t = 0$$

但由②知 $\Gamma I \Gamma^T = \mu(t) I$, 因此只要能证明 $\Gamma^T I \Gamma = \Gamma I \Gamma^T$, 则 μ 与 t 无关, 在

$$\Gamma I \Gamma^T = \mu I$$

两端从右面乘上 $I \Gamma$ 得

$$\Gamma I \Gamma^T I \Gamma = \mu I I \Gamma = -\mu \Gamma$$

即得

$$\Gamma^T I \Gamma = \mu I = \Gamma I \Gamma^T \quad (3.32)$$

故定理必要性得证。反之,若(3.32)成立,可推出 $(\Gamma I \Gamma^T)_t = 0$,由此得 $I y_t$ 为梯度向量;另由(3.32)式可得 $I^{-1} \Gamma I \Gamma^T = \mu E$,故由第一节的推理知 $I y_t + I^{-1} \Gamma I \Gamma^T H y$ 为梯度向量,用定理一即得 $y = y(x, t)$ 为正则变换。故定理得证。

利用定理二不仅可以从变换 $y = y(x, t)$ 直接判断它是否为正则变换,而且还可找出新旧哈密顿函数之间的关系:

$$K_y = I y_t + I^{-1} \Gamma I \Gamma^T H_y = R_y + \mu H_y$$

即若不考虑只同 t 有关的附加项(在正则方程中不起作用),则有关系:

$$K = \mu H + R \quad (3.33)$$

其中 μ 称为正则变换的**乘子**,为常数。在函数 $y = y(x, t)$ 给定后,用(3.32)式验证它是正则变换时, μ 值自然求出。 $R = R(y, t)$ 称为正则变换的**余函数**,用 $I y_t$ 可唯一确定 R_y ,一般不必要求出 R ,因正则变换中只用到 R_y 。

若正则变换中不显含 t ,即 $y = y(x)$,此时有 $y_t = 0$,故可取 $R = 0$,则 $K = \mu H$ 。这种称为**保守正则变换**,在天体力学中也常碰到。若 $R = 0, \mu = 1$,则 $K = H$,即哈密顿函数在此变换下为不变量,称为**完全正则变换**。

两个正则变换的复合变换也应为正则变换。设 $y = y(x, t) \in C^{[2]}$ 为 x 空间到 y 空间的正则变换, Γ_1, μ_1, R_1 为相应的变换矩阵 $y_x(x, t)$,乘子和余函数; $x = x(z, t)$ 为 z 空间到 x 空间的正则变换,相应的量为 $\Gamma_2 = x_z(z, t), \mu_2, R_2$ 。则由 z 空间到 y 空间的复合变换 $y = y[x(z, t), t]$ 的变换矩阵 $\Gamma = y_z = y_x x_z = \Gamma_1 \Gamma_2$,而

$$\Gamma I \Gamma^T = \Gamma_1 \Gamma_2 I (\Gamma_1 \Gamma_2)^T = \Gamma_1 \Gamma_2 I \Gamma_2^T \Gamma_1^T = \mu_1 \mu_2 I$$

因此由定理二知,此变换为正则变换,乘子 $\mu = \mu_1 \mu_2$ 。余函数 R 有

$R_y = I y_t(z, t)$ (微商后再把 z 变换为 y 的函数)。但

$$y_t(z, t) = y_t(x, t) + y_x x_t(z, t)$$

可得

$$I y_t(z, t) = I y_t(x, t) + I y_x x_t(z, t)$$

即

$$\begin{aligned} R_y &= (R_1)_y + I \Gamma_1 I^{-1} (R_2)_x \\ &= (R_1)_y + I \Gamma_1 I^{-1} \Gamma_1^T (R_2)_y \\ &= (R_1)_y + I^{-1} \Gamma_1 I \Gamma_1^T (R_2)_y \\ &= (R_1)_y + \mu_1 (R_2)_y \end{aligned}$$

因此可取

$$R = R_1 + \mu_1 R_2$$

当然 x, y, z 空间的维数应相同。

容易证明, 正则变换的逆变换也是正则变换, 相应的乘子为原变换乘子的倒数; 恒等变换也是正则变换。因此若定义变换的乘法为复合变换, 则 $2n$ 维空间的全部正则变换构成一个乘法群; 而保守正则变换及完全正则变换构成其中的子群。

用定理二便于判断正则变换, 但并不能用它寻找正则变换。下面用拉格朗日括号和柏松括号表达的正则变换充要条件以及后面几节内容, 都是为了寻找某些需要的正则变换。

现在先定义在本节符号下的拉格朗日括号和柏松括号的定义和性质。

设 F, G 为两个 $2n$ 维向量 $x = (x_i)$ 的数量函数, 现定义一个 x 的数量函数为:

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= F_x \cdot I G_x \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(F, G)}{\partial(x_i, x_{i+n})} = -\{G, F\} \end{aligned} \quad (3.34)$$

称为 F, G 对 x 的柏松括号, 有下列性质:

① 设 F_1, F_2, F_3 都是 x 的函数, 属于 $C^{(1)}$, 则显然有:

$$\left. \begin{aligned} \{F_1 + F_2, F_3\} &= \{F_1, F_3\} + \{F_2, F_3\} \\ \{F_1 \cdot F_2, F_3\} &= \{F_1, F_3\} \cdot F_2 + \{F_2, F_3\} \cdot F_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

② 因 $\{F_1; F_2\}$ 也是 x 的函数, 故若 $F_1, F_2, F_3 \in C^{(2)}$, 则可组成 $\{\{F_1; F_2\}; F_3\}$ 。它由每项是 F_1, F_2, F_3 对 x 的偏导数乘积的三线性项组成; 其中一个为二阶导数, 另两个为一阶导数。并可分为两部份: 一部份是 F_1, F_3 为一阶偏导数, F_2 为二阶, 记为 $\{F_1, F_3, F_2\}$; 另一部份形式相同但 F_1 为二阶, F_2, F_3 为一阶, 而且与前部同形式的项反号, 故记为 $-\{F_2, F_3, F_1\}$, 即

$$\{\{F_1; F_2\}; F_3\} = \{F_1, F_3, F_2\} - \{F_2, F_3, F_1\}$$

同理可得 $\{\{F_3, F_1\}; F_2\}$ 和 $\{\{F_2; F_3\}; F_1\}$ 的结果, 三式相加即得著名的柏松恒等式:

$$\{\{F_1; F_2\}; F_3\} + \{\{F_3; F_1\}; F_2\} + \{\{F_2; F_3\}; F_1\} = 0 \quad (3.36)$$

③ 柏松括号还有正则不变性, 即在正则变换下仍保持相同形式。设 $y = y(x, t)$ 为正则变换, 用定理二知有 $\Gamma I \Gamma^T = \mu I$, $\Gamma = y_x$; 下面证明 x 的函数 F, G 组成的 $\{F, G\}^x$ 与变换为 y 的函数后组成的 $\{F; G\}^y$ 相同, 只差一个 μ 的因子。因由 (3.26) 式可知:

$$\begin{aligned} F_x &= \Gamma^T F_y, \quad G_x = \Gamma^T G_y \\ \text{则有} \quad \{F; G\}^x &= F_x \cdot I G_x = \Gamma^T F_y \cdot I \Gamma^T G_y \\ &= G_y \cdot (I \Gamma^T)^T \Gamma^T F_y \\ &= -G_y \cdot \Gamma I \Gamma^T F_y = -\mu G_y \cdot I F_y \\ &= \mu F_y \cdot I G_y = \mu \{F; G\}^y \end{aligned} \quad (3.37)$$

其中用了关系 (3.2) 式。由于相差一个常数因子, 故称为相对不变性; 在 $\mu = 1$ 时完全相等, 称为绝对不变性。

类似地给出拉格朗日括号定义。设 $2n$ 维向量 x 为两个变量 f, g 的函数, 拉格朗日括号记为

$$\begin{aligned} [f; g] &= x_f \cdot I x_g \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(x_i, x_{i+n})}{\partial(f, g)} = -[g; f] \end{aligned} \quad (3.38)$$

如在 (3.34) 式中把 F, G 作为 $2n$ 维向量 y 的两个分量 y_i, y_k ,

在变换 $y = y(x, t)$ 中都是 x 的函数, 可计算 $\{y_i; y_k\}$ 。把作为 $2n$ 阶方阵的 i 行 k 列元素, 则此方阵应为

$$(\{y_i; y_k\}) = y_x I y_x^T \quad (3.39)$$

同样, 在(3.38)式中分别取 f, g 为任意两个分量 y_i, y_k , 在逆变换 $x = x(y, t)$ 中, 可算出 $[y_i; y_k]$ 。并可组成另一 $2n$ 阶方阵为:

$$([y_i; y_k]) = x_y^T I x_y \quad (3.40)$$

但 $y_x = \Gamma, x_y = \Gamma^{-1}$, 因此上两式可表为:

$$\left. \begin{aligned} (\{y_i; y_k\}) &= (\Gamma I \Gamma^T) \\ ([y_i; y_k]) &= ((\Gamma^{-1})^T I \Gamma^T) = [(\Gamma I \Gamma^T)^T]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

上式表明, 此两个矩阵互为转置的逆矩阵。由此可得下面两个用柏松括号和拉格朗日括号表示的正则变换充要条件。

定理三 $y = y(x, t) \in C^{(1)}$ 是正则变换的充要条件为:

$$(\{y_i; y_k\}) = \mu I \quad (3.42)$$

证明可直接从定理二和(3.41)式看出。

这个结果可用通常的正则共轭变量, 或广义坐标和广义动量 q, p 表示。设旧变量 x 和新变量分量为

$$x = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

p, q, P, Q 都是 n 维向量, 则变换和逆变换 $y = y(x, t), x = x(y, t)$ 可写为下面形式:

$$\left. \begin{aligned} P &= P(p, q, t), \quad Q = Q(p, q, t) \\ p &= p(P, Q, t), \quad q = q(P, Q, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

相应的
$$\Gamma = \begin{pmatrix} P_p & P_q \\ Q_p & Q_q \end{pmatrix}, \quad \Gamma^T = \begin{pmatrix} P_p^T & Q_p^T \\ P_q^T & Q_q^T \end{pmatrix}$$

则有
$$\Gamma I \Gamma^T = \begin{pmatrix} P_p P_q^T - P_q P_p^T & P_p Q_q^T - P_q Q_p^T \\ Q_p P_q^T - Q_q P_p^T & Q_p Q_q^T - Q_q Q_p^T \end{pmatrix} = \mu I,$$

即
$$\left. \begin{aligned} P_p P_q^T - P_q P_p^T &= Q_p Q_q^T - Q_q Q_p^T = 0 \\ P_p Q_q^T - P_q Q_p^T &= E \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

按通常柏松括号记号有

$$\left. \begin{aligned} \{P_i; P_j\} &= \{Q_i; Q_j\} = 0 \\ \{P_i; Q_i\} &= \mu, \quad \{P_i; Q_j\} = 0 \quad (i \neq j) \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

因此条件(3.42)式与(3.46)式等价; 可用(3.46)式作为正则变换的充要条件。

这里有一个顺序问题; 上面把 $2n$ 维向量 x, y 的分量按(3.43)式安排, 即广义动量 p, P 放在前 n 个分量。而很多书上都把广义坐标 q 或 Q 放在前面, 即记为

$$x = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \quad (3.43)'$$

则相应的(3.46)式应写为:

$$\left. \begin{aligned} \{P_i; P_j\} &= \{Q_i; Q_j\} = 0, \\ \{Q_i; P_i\} &= \mu, \quad \{Q_i; P_j\} = 0 \quad (i \neq j) \end{aligned} \right\} \quad (3.46)'$$

柏松括号定义仍用(3.34)式。

定理四 $y = y(x, t) \in C^{(1)}$ 是正则变换的充要条件为:

$$([y_i; y_k]) = \frac{1}{\mu} I \quad (3.47)$$

证明也显然。若用正则共轭变量, 由(3.43)式表达, 则同柏松括号情况一样, 可把(3.47)式改写为:

$$\left. \begin{aligned} [P_i; P_j] &= [Q_i; Q_j] = 0 \\ [P_i; Q_i] &= \frac{1}{\mu}, \quad [P_i; Q_j] = 0 \quad (i \neq j) \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

同样, 如用(3.43)'式, 则上面应改为 $[Q_i; P_i] = 1/\mu$, 其余不变。

定理三、四可用于寻找某些特殊正则变换, 或验证某些特殊变换 (如函数关系中只是部份变量的函数等) 是否正则变换较为有利。

第四节 隐函数形式的正则变换

上节是用显函数形式的变换 $y = y(x, t)$ 讨论。在很多天体力学的理论和方法中,常出现一些隐函数形式的变换,如能在隐函数条件下就能判断是否正则变换,将会很有用。

设 x, y 为 $2n$ 维向量, t 为数量;先假定它们之间无任何关系。并设 $\mu(t, x, y), R(t, x, y)$ 为数量函数,可建立一个数量函数 $\omega(t, x, y)$ 为:

$$\omega = 2Rdt + \mu x \cdot Idx - y \cdot Idy \quad (3.49)$$

它是此 $4n + 1$ 个变量的线性微分式,又称为 t, x, y 的伐夫式(Pfaffian)。

若 x, y 之间存在 $2n$ 维向量函数关系

$$F(t, x, y) = 0, \quad F = (F_i) \quad (3.50)$$

并设 $F \in C^{(2)}, F_x, F_y$ 为非异矩阵(在某域中),则根据隐函数存在定理,可以解出 x 空间与 y 空间中的一个变换 $y = y(x, t)$ 或 $x = x(y, t) \in C^{(2)}$ 。这样可利用关系(3.50)式把(3.49)式简化为 $2n + 1$ 个变量的伐夫式。

如消去 dy ,可用函数 $y = y(x, t)$ 得:

$$dy = y_x dx + y_t dt = \Gamma dx + y_t dt$$

其中 $\Gamma = y_x$,代入(3.49)式可得

$$\begin{aligned} \omega &= 2Rdt + \mu x \cdot Idx - y \cdot I(\Gamma dx + y_t dt) \\ &= (2R - y \cdot I y_t) dt + (\mu x \cdot Idx - y \cdot I \Gamma dx) \end{aligned}$$

利用关系(3.2)式可得:

$$\begin{aligned} \mu x \cdot Idx &= \mu dx \cdot I^T x = -(\mu I x) \cdot dx \\ -y \cdot I \Gamma dx &= -dx \cdot (I \Gamma)^T y = (I^T I y) \cdot dx \end{aligned}$$

代入上式可得:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= Tdt + X \cdot dx \\ T &= 2R - y \cdot Iy_t, \quad X = -\mu Ix + \Gamma^T Iy \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

利用(3.50)可把 T, X 表示为 x, t 的函数。

如果不是消去 dy , 而是消去 dx ; 或消去 dx 及 dy 中各 n 个分量, 所用方法完全相同。下面讨论由隐函数形式(3.50)所定义的函数变换, $y = y(x, t)$ 或 $x = x(y, t)$ 等是正则变换的条件。

定理一 由(3.50)式定义的 x 空间与 y 空间之间的变换为正则变换的充要条件为: 存在数量函数 $R(t, x, y)$ 和常数 $\mu \neq 0$, 使 $2n+1$ 个变量的伐夫式(3.51)为全微分。此时 R 及 μ 分别为正则变换的余函数和乘子。

证 由于(3.51)式是全微分的充要条件为:

$$T_x = X_t, \quad X_x = X_x^T \quad (3.52)$$

于是只须证明(3.52)式等价于 $\Gamma I \Gamma^T = \mu I$, 即可用上节定理二完成证明。

由(3.52)式得:

$$\begin{aligned} T_x &= 2R_x - (y \cdot Iy_t)_x = 2\Gamma^T R_y - y_x^T Iy_t - (Iy_t)_x^T y \\ &= 2\Gamma^T R_y - \Gamma^T Iy_t + \Gamma_t^T Iy \end{aligned}$$

$$\text{而} \quad X_t = (\Gamma^T Iy)_t = \Gamma_t^T Iy + \Gamma^T Iy_t$$

$$\begin{aligned} X_x &= -\mu I + (\Gamma^T Iy)_x \\ &= -\mu I + \Gamma^T I\Gamma + (d_{ij}) \end{aligned}$$

其中 (d_{ij}) 为一矩阵, 它的 i 行 j 列元素为

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_j \partial x_i} y_{n+k} - \frac{\partial^2 y_{n+k}}{\partial x_i \partial x_j} y_k \right)$$

显然有 $d_{ij} = d_{ji}$, 即 (d_{ij}) 为对称矩阵有 $(d_{ij})^T = (d_{ij})$ 。因此(3.52)式等价于:

$$Iy_t = R_y, \quad \Gamma^T I\Gamma = \mu I \quad (3.53)$$

用上节定理知(3.52)式也是正则变换的充要条件。

如用正则共轭变量记号, 设

$$x = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

p, q, u, v 都是 n 维向量, 分别表示新旧广义动量和广义坐标, 则变换(3.50)可记为

$$F(p, q, u, v, t) = 0 \quad (3.55)$$

则有以下结果。

定理二 (3.55)式确定的 x 空间与 y 空间之间的变换是正则变换的充要条件为: 存在一个数量函数 $R = R(p, q, u, v, t)$ 和常数 $\mu \neq 0$, 使得下列四个伐夫式

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= Rdt + \mu p \cdot dq + v \cdot du \\ \omega_2 &= Rdt + \mu p \cdot dq - u \cdot dv \\ \omega_3 &= Rdt - \mu q \cdot dp - u \cdot dv \\ \omega_4 &= Rdt - \mu q \cdot dp + v \cdot du \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

中任何一个为全微分。此时正则变换的乘子和余函数就是 μ 和 R 。

证 在(3.55)式的记号下, (3.49)式可化为:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\omega &= Rdt + \frac{1}{2}\mu(p \cdot dq - q \cdot dp) \\ &\quad - \frac{1}{2}(u \cdot dv - v \cdot du) \end{aligned} \quad (3.57)$$

由定理一知, 此式为全微分是(3.55)式为正则变换的充要条件。又因全微分的和差仍为全微分, 故对任一函数 $f = f(p, q, u, v, t) \in C^{(1)}$,

$$\frac{1}{2}\omega \pm df$$

是全微分也是(3.55)式为正则变换的充要条件。现取

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2}\mu p \cdot q + \frac{1}{2}u \cdot v \\ f_2 &= \frac{1}{2}\mu p \cdot q - \frac{1}{2}u \cdot v \end{aligned} \right\} \quad (3.58)$$

则有

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\omega + df_1, \quad \omega_2 = \frac{1}{2}\omega + df_2$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}\omega - df_1, \quad \omega_4 = \frac{1}{2}\omega - df_2$$

于是定理得证。

定理二有很大用途,但用得更广泛的是 $\mu = 1$ 时的特殊情况。下面给出常用的形式。

定理三 对任意一个数量函数 $S = S(q, u, t) \in C^{(2)}$, 且在某域内哈斯行列式 $\det(S'_{qu}) \neq 0$, 则 $2n$ 维空间 (p, q) 与 (u, v) 的下列变换:

$$p = S'_q(q, u, t), \quad v = S'_u(q, u, t) \quad (3.59)$$

是一个正则变换;相应的乘子 $\mu = 1$, 余函数 $R = S_t(q, u, t)$ 。

证 令

$$\left. \begin{aligned} F &= p - S'_q(q, u, t) = 0 \\ G &= v - S'_u(q, u, t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.60)$$

为变量 (p, q, u, v) 和 t 之间的 $2n$ 个关系式, 即为隐函数形式的变换。而且此 $2n$ 个关系式对 (p, q) 或 (u, v) 的雅可比行列都是 $(-1)^n \det(S'_{qu})$, 在某域内不为零。故(3.60)式定义了 (p, q) 同 (u, v) 空间之间的一个变换。又因此时有

$$dS = S_t dt + S'_q \cdot dq + S'_u \cdot du = S_t dt + p \cdot dq + v \cdot du$$

故根据定理二的 ω_1 式知, 相应的变换为正则变换, 且乘子 $\mu = 1$, 余函数 $R = S_t$ 。定理得证。

(3.59)式定义的变换是由 q, u 和 t 的任意函数 $S(q, u, t) \in C^{(2)}$ 的偏导数生成, 故 S 又称为生成函数或母函数。由于它的任意性, 可用于选择不同需要的正则变换, 因而有广泛应用。在天体力学中常称为德洛勒-柴倍耳(Delaunay-Zeipel)变换。同样利用 $\omega_2, \omega_3, \omega_4$, 可得这种变换的另外三种形式。

推理 1 对任一数量函数 $S = S(q, v, t) \in C^{(2)}$, 且 $\det(S_{qv}) \neq 0$, 则关系:

$$p = S'_q(q, v, t), \quad u = -S'_v(q, v, t) \quad (3.61)$$

是一个正则变换, 相应的乘子 $\mu = 1$, 余函数 $R = S_t$ 。

推理 2 对任一数量函数 $S = S(p, v, t) \in C^{(2)}$, 且 $\det(S_{pv}) \neq 0$, 则关系

$$q = -S'_p(p, v, t), \quad u = -S'_v(p, v, t) \quad (3.62)$$

是一个正则变换, 对应乘子 $\mu = 1$, 余函数 $R = S_t$ 。

推理 3 对任一数量函数 $S = S(p, u, t) \in C^{(2)}$, 且 $\det(S_{pu}) \neq 0$, 则关系

$$q = -S'_p(p, u, t), \quad v = S'_u(p, u, t) \quad (3.63)$$

是一个正则变换, 对应乘子 $\mu = 1$, 余函数 $R = S_t$ 。

若上述所选择的函数 S 不显含 t , 则有 $R = 0$, 此时新旧哈密顿函数相同。这种特殊的正则变换是完全正则变换, 有些文献中称为**接触变换**。

第五节 正 则 扩 充

在讨论天体运动时, 运动方程常用正则方程形式。进行正则变换中, 有时先选定坐标变换, 再在坐标变换基础上组成包括动量在内的正则变换。这就是要把位形空间的变换, 扩充到相空间中的正则变换, 又称为正则扩充。这也是一种寻找实用正则变换的一种方法。这里只讲一种最简单的扩充方法。

设 p, q 是 n 维向量; 按普通习惯 q 代表广义坐标, p 是广义动量。对于某已知的一个坐标变换 $v = v(q, t) \in C^{(2)}$, 雅可比矩阵 $J = v_q$, 且有 $\det J \neq 0$ (在某域内)。若能找到一个向量函数 $u = u(p, q, t) \in C^{(2)}$, 使得 $v = v(q, t)$, $u = u(p, q, t)$ 为相空间 (p, q) 同

(u, v) 之间的一个正则变换, 则称此变换为坐标变换 $v = v(q, t)$ 的一个正则扩充。现在给出一个扩充方法。

定理 设 $v = v(q, t) \in C^{(2)}, J = v_q, \det J \neq 0$, 则

$$v = v(q, t), \quad u = (J^T)^{-1}p \quad (3.64)$$

是相空间 (p, q) 同 (u, v) 之间的一个正则变换。

证 由(3.64)式可得:

$$dv = v_t dt + v_q dq = v_t dt + J dq$$

于是有

$$u \cdot dv = (J^T)^{-1}p \cdot (v_t dt + J dq)$$

利用向量矩阵关系 $(Aa) \cdot (Bb) = a \cdot A^T B b$, 其中 A, B 为 n 阶方阵, a, b 为 n 维向量, 则上式可化为

$$\begin{aligned} u \cdot dv &= (J^T)^{-1}p \cdot J dq + (J^T)^{-1}p \cdot v_t dt \\ &= p \cdot dq + (J^T)^{-1}p \cdot v_t dt \end{aligned}$$

即

$$0 = (J^T)^{-1}p \cdot v_t dt + p \cdot dq - u \cdot dv \quad (3.65)$$

与上节定理二中的 ω_2 式比较可知, 相应的 $\omega_2 = 0$ 当然是全微分, 因此(3.64)式是正则变换, 对应的乘子 $\mu = 1$, 余函数 $R = (J^T)^{-1}p \cdot v_t$ 。若原坐标变换为保守的, $v = v(q)$, 则 $R = 0$, 即扩充后的正则变换是完全正则变换。

例如 $n = 2$ 时, 旧坐标和动量分别为:

$$q_1 = \xi, q_2 = \eta, p_1 = \varphi, p_2 = \psi$$

新的是

$$v_1 = x, v_2 = y, u_1 = X, u_2 = Y$$

坐标变换记为(保守情况)

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

$$\text{则} \quad J = \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix}, \quad (J^T)^{-1} = \frac{1}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} \begin{pmatrix} y_\eta & -y_\xi \\ -x_\eta & x_\xi \end{pmatrix}$$

于是正则扩充后的动量为

$$X = \frac{y_\eta \varphi - y_\xi \psi}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi}, \quad Y = \frac{-x_\eta \varphi + x_\xi \psi}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi}$$

若把结果用于直角坐标与极坐标之间的变换:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$\det J = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \neq 0$$

($r=0$ 除外), 则相应的

$$X = \frac{1}{r}(r\varphi \cos \theta - \psi \sin \theta), \quad Y = \frac{1}{r}(r\varphi \sin \theta + \psi \cos \theta)$$

第六节 解正则方程组的哈密顿-雅可比方法

正则方程组的原则解法中, 用得最多的是哈密顿-雅可比方法。有关方法的原理, 哈密顿-雅可比方程的推导, 及相应的雅可比定理都在分析动力学中已讲过, 这里不再重复。本节只从正则变换推出哈密顿-雅可比方程, 然后讲可用分离变量解此方程的条件。

1. 方法原理。由第四节的定理三知, 对任一函数 $S = S(q, u, t) \in C^{(2)}$, 只要 $\det(S'_{qu}) \neq 0$, 则(3.59)式是正则变换, 且新哈密顿函数 $K = H + S_t(q, u, t)$ 。

若要求新哈密顿函数 $K = 0$, 此时新变量 u, v 的正则方程组成为

$$\dot{u} = 0, \quad \dot{v} = 0$$

解为

$$u = \alpha, \quad v = \beta \quad (3.66)$$

其中 α, β 为 n 维常向量, 即每个分量都是常数。(3.66)式就是变换后新哈密顿方程的解, α, β 的 $2n$ 个分量是积分常数。相应的

(3.59)式成为:

$$p = S_q(q, \alpha, t), \quad \beta = S_\alpha(q, \alpha, t) \quad (3.67)$$

而函数 $S(q, \alpha, t)$ 需要满足关系式

$$H + S_t(q, \alpha, t) = K = 0$$

即

$$H(S_q, q, t) + S_t = 0 \quad (3.68)$$

这就是哈密顿-雅可比方程。只要得到此方程的解 $S = S(q, \alpha, t)$, α 为 n 维积分常数, 且行列式 $\det(S_{q\alpha}) \neq 0$ (其中包括要求 S 必需含有全部 n 个 q_i 和 n 个 α_i , 否则此行列式恒等于 0), 则变换 (3.67) 式就是原正则方程组

$$\dot{p} = -H_q, \quad \dot{q} = H_p$$

的解, α_i, β_i 为积分常数。

2. 特殊情况, 在解哈密顿-雅可比方程时, 首先考虑一些有用的情况。

① 若哈密顿函数 $H(p, q, t)$ 不显含 t , 则 $H = \text{常数}$ 为一积分, 设积分常数为 α_0 , 由 (3.68) 式可得

$$S_t = -\alpha_0, \quad S = -\alpha_0 t + S_1 \quad (3.69)$$

其中 S_1 不再显含 t , 而且只需含有 $n-1$ 个独立常数, 它相应满足的方程 (3.68) 式可简化为:

$$H\left(-\frac{\partial S_1}{\partial q}, q\right) = \alpha_0 \quad (3.70)$$

② 若哈密顿函数 $H(p, q, t)$ 中不含某坐标 q_i , 称此坐标为循环坐标。此时有

$$H_{q_i} = 0, \quad \text{即} \quad \dot{p}_i = 0$$

故 p_i 为常数, 记为 α_k , 由 (3.67) 式可得:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i = \alpha_k, \quad S = \alpha_k q_i + S_2 \quad (3.71)$$

其中 S_2 不再含有 q_i , 它满足的方程仍为 (3.68) 式, 但 p_i 用 α_k 代

替，解出时也只需要包含另外 $n-1$ 个积分常数。故原 $2n$ 阶正则方程组降为 $2n-2$ 阶。解出此 $2n-2$ 阶方程组后，再代入

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

积出 q_i 。

由此可看出，增加循环坐标是解正则方程组的一条途径。如能用正则变换不断增加循环坐标，到哈密顿函数只剩动量时，可全部积出。在一些特殊情况下可以作到。

3. 可分离变量的柳维(Liouville)系统。先设哈密顿函数不显含时间 t ，哈密顿-雅可比方程用(3.70)式，但 S_1 仍记为 S 。由于不需要得到此偏微分方程的通解，只要得到满足方程的函数 S 含有全部 n 个坐标 q 和 n 个独立积分常数 α (包括 α_0) 就行了。因此可在分离变量情况下解出 S 。

由于在保守系统中， H 为 p_i 的二次函数，可经过变换化为只含 p_i^2 项及不含 p 的项(二次型的标准化)。即

$$H = \sum_{i=1}^n [A_i(q) p_i^2 + B_i(q)]$$

若 H 可以写成下面形式：

$$H = \sum_{i=1}^n [A_i(q_i) p_i^2 + B_i(q_i)]$$

此时称为 H 可分离变量。相应的哈密顿-雅可比方程为：

$$\sum_{i=1}^n \left[A_i(q_i) \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \right)^2 + B_i(q_i) \right] = \alpha_0 \quad (3.72)$$

这样可设

$$S = \sum_{i=1}^n S_i(q_i) \quad (3.73)$$

其中 $S_j(q_j)$ 与 $A_i(q_j)$ ， $B_i(q_i)$ 一样，只是一个 q_j 的函数，代入(3.72)式后成为

$$\sum_{i=1}^n \left[A_i(q_i) \left(\frac{dS_i}{dq_i} \right)^2 + B_i(q_i) \right] = \alpha_0$$

可取

$$\left. \begin{aligned} A_i(q_i) \left(\frac{dS_i}{dq_i} \right)^2 + B_i(q_i) &= \alpha_i \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i &= \alpha_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.74)$$

故可积出

$$S(q_i) = \int \sqrt{\frac{\alpha_i - B_i(q_i)}{A_i(q_i)}} dq_i \quad (3.75)$$

代入(3.73)可得 S , 但这里的 S 是(3.69)式中的 S_1 , 整个系统的 S 即为:

$$S = -\alpha_0 t + \sum_{i=1}^n S_i(q_i) \quad (3.76)$$

已包含所有 n 个 q_i 及 n 个独立积分常数。注意其中 α_0 满足关系(3.74)。由此可得原哈密顿-雅可比方程的解为:

$$p_i = \frac{\partial S_i(q_i)}{\partial q_i}, \quad \beta_i = -t + \frac{\partial S_i(q_i)}{\partial \alpha_i} \quad (3.77)$$

当然, 并不是所有动力系统都满足可分离变量条件。可分离变量的系统都是可积系统, 其中柳维系统是用途很广的一种。

定理一(柳维定理) 保守动力系统中的哈密顿函数 $H = T - U$, T 为总动能, U 为势函数。若满足条件:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} V \sum_{i=1}^n A_i(q_i) \dot{q}_i^2 \\ U &= \frac{W}{V} \\ V &= \sum_{i=1}^n v_i(q_i), \quad W = \sum_{i=1}^n w_i(q_i) \end{aligned} \right\} \quad (3.78)$$

则此系统可用分离变量积出。

证 由 T 的式子可得广义动量

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = V A_i(q_i) \dot{q}_i$$

由此得

$$T = \frac{1}{2V} \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{A_i(q_i)}$$

相应的哈密顿-雅可比方程为:

$$\frac{1}{2V} \sum_{i=1}^n \frac{1}{A_i(q_i)} \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \right)^2 - \frac{W}{V} = \alpha_0$$

即

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2A_i(q_i)} \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \right)^2 - w_i(q_i) - \alpha_0 v_i(q_i) \right] = 0$$

成为可分离变量形式。用上面方法可令

$$S = \sum_{i=1}^n S_i(q_i)$$

则可积出

$$\left. \begin{aligned} S_i(q_i) &= \int \sqrt{2A_i(q_i) [\alpha_i + w_i(q_i) + \alpha_0 v_i(q_i)]} dq_i \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i &= 0 \end{aligned} \right\} (3.79)$$

对应的原哈密顿正则方程组的解仍为(3.77)式。

柳维系统在天体力学中有广泛应用。经典的两个不动中心问题, 现代人造卫星运动中采用的各种中间轨道, 如文梯(Vinti)问题, 斯特思(Stern)问题和阿克塞诺夫(Аксенов)问题等都是柳维系统。

4. 斯特克(Stäcker)系统。比柳维系统更广的可分离变量系统是斯特克提出的。有些文献上称之为最大的可分离变量的保守系统。下面仍用定理形式表达。

定理二(斯特克定理) 保守系统的哈密顿函数如只含动量 p_i^2 项, 则它是可分离变量系统的充要条件为: 存在 $n \times n$ 矩阵函数 $A = (a_{ik})$, 并且 $\det A \neq 0$, 和 n 维向量函数 $w = (w_k)$, 其中 a_{ik} 和 w_k 都只是一个坐标 q_k 的函数; 使得

$$Ac = (\delta_i^1), \quad w \cdot c = U \quad (3.80)$$

其中向量 $c = (c_i)$, $\frac{1}{2}c_i$ 为 H 中 p_i^2 的系数, U 为势函数; δ_i^1 在 $i=1$ 时为 1, $i \neq 1$ 时为 0。

证 先证必要性。设此系统为可分离变量, 即其哈密顿-雅可比方程:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k \left(\frac{\partial S}{\partial q_k} \right)^2 - U = \alpha, \quad (3.81)$$

可分离, 解 $S = S(q, \alpha)$ 可表为

$$S = \sum_{k=1}^n S_k(q_k, \alpha)$$

其中 S_k 只含一个坐标 q_k 及积分常数 α_i , 每一个 S_k 中至少有一个常数, 但整个 S 应有 n 个独立积分常数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 。代入上式可得

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k \left(\frac{\partial S_k}{\partial q_k} \right)^2 - U = \alpha_1 \quad (3.82)$$

对 α_i 取偏导数(注意 U, c_k 不含 α)知

$$\sum_{k=1}^n c_k \frac{\partial S_k}{\partial q_k} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_k} = (\delta_i^1) \quad (3.83)$$

若取矩阵函数 $A = (a_{ik})$ 为

$$a_{ik} = \frac{\partial S_k}{\partial q_k} \frac{\partial^2 S_k}{\partial \alpha_i \partial q_k}$$

它是一个坐标 q_k 的函数, 而且

$$\begin{aligned} \det A &= \frac{\partial S_1}{\partial q_1} \frac{\partial S_2}{\partial q_2} \dots \frac{\partial S_n}{\partial q_n} \det(S_{\alpha q}) \\ &= p_1 p_2 \dots p_n \det(S_{\alpha q}) \end{aligned}$$

一般情况下 $p_1, \dots, p_n$ 都不为 0, 而且 $\det(S_{\alpha q})$ 也不为 0。容易看出, (3.83) 式就是条件(3.80)中的第一式。

另外, 由(3.83)式取 $i=1$ 得

$$\sum_{k=1}^n c_k \frac{\partial S_k}{\partial q_k} \frac{\partial^2 S_k}{\partial \alpha_1 \partial q_k} = 1$$

即

$$\sum_{k=1}^n \alpha_1 c_k \frac{\partial S_k}{\partial q_k} \frac{\partial^2 S_k}{\partial \alpha_1 \partial q_k} = \alpha_1$$

故从(3.82)式可得:

$$\begin{aligned} U &= \alpha_1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k \left(\frac{\partial S_k}{\partial q_k} \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \left[\alpha_1 \frac{\partial S_k}{\partial q_k} - \frac{\partial^2 S_k}{\partial \alpha_1 \partial q_k} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_k}{\partial q_k} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.84)$$

即存在向量函数

$$w = (w_k), \quad w_k = \alpha_1 \frac{\partial S_k}{\partial q_k} - \frac{\partial^2 S_k}{\partial \alpha_1 \partial q_k} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_k}{\partial q_k} \right)^2$$

其中 w_k 只是一个坐标 q_k 的函数。

显然, (3.84) 式就是条件(3.80)的第二式, 因此条件(3.80)是必要的。

现证明充分性。若条件(3.80)成立, 即存在 a_{ik}, w_k 为一个坐标 q_k 的函数, 并满足(3.80)式。故有下列关系:

$$\sum_{k=1}^n a_{1k} c_k = 1$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} c_k = 0 \quad (i > 1)$$

$$\sum_{k=1}^n c_k w_k = U$$

则哈密顿-雅可比方程(3.81)式可化为:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k \left(\frac{\partial S}{\partial q_k} \right)^2 - \sum_{k=1}^n c_k w_k = \alpha_1 \sum_{k=1}^n a_{1k} c_k + \sum_{i=2}^n \alpha_i \sum_{k=1}^n a_{ik} c_k$$

其中 $\alpha_i (i = 2, \dots, n)$ 为任意常数。此式按 k 整理即为

$$\sum_{k=1}^n c_k \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial q_k} \right)^2 - \sum_{i=1}^n a_{ik} \alpha_i - w_k \right] = 0 \quad (3.85)$$

此式中每一方括号内的量只含一个坐标 q_k (S 除外), 因此也可以作为分离变量处理。

令

$$S_1 = \sum_{k=1}^n S_k(q_k)$$

代入上式后令每一方括号为 0，即可解出

$$S_k(q_k) = \int \sqrt{2 \left(w_k + \sum_{i=1}^n a_{ik} \alpha_i \right)} dq_k$$

相应正则方程组的解为：

$$\left. \begin{aligned} p_k &= \frac{\partial S_k}{\partial q_k}, \quad \beta_1 = -t + \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} \\ \beta_i &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \quad (i > 1) \end{aligned} \right\} \quad (3.86)$$

于是定理得证。

关于哈密顿-雅可比方程的解法，还有不少研究。近年来用孤立子(Soliton)来解有所成功，但并未扩大可积系统。

正则方程组原则解法之一的柏松方法，在天体力学中还不成功，在这里不全面介绍；另一种正则变换方法将在以后讲述。

第七节 用哈密顿-雅可比方法解二体问题

在天体力学中，用密哈顿-雅可比方法能完全解决的还不多。本节用于解二体问题，既可作为例子，更重要的是介绍给出在摄动理论中广泛应用的正则根数。

从第二章知二体问题相对运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= -\frac{\mu \vec{r}}{r^3} = \nabla U \\ U &= \frac{\mu}{r}, \mu = G(M + m) \end{aligned} \right\} \quad (3.87)$$

如以太阳和行星为例， $\vec{r} = (x, y, z)$ 是行星的黄道直角坐标。可以改为球坐 (r, ϕ, θ) ，其中 ϕ, θ 是黄经黄纬。若略去行星质量因子，行星运动的动能为

$$T = \frac{1}{2} \vec{r} \cdot \vec{r} = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

用坐标变换

$$x = r \cos \phi \cos \theta, y = r \sin \phi \cos \theta, z = r \sin \theta \quad (3.88)$$

即用 $q = (r, \phi, \theta)$ 作为广义坐标, 则有

$$T = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \cos^2 \theta \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2), U = \frac{\mu}{r}$$

容易验证, 符合柳维系统条件, 可用分离变量方法解出。

q 对应的广义动量 p 为:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \dot{r} \\ p_2 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = r^2 \cos^2 \theta \dot{\phi} \\ p_3 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = r^2 \dot{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.89)$$

由此可得

$$H = T - U = \frac{1}{2} \left[p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2 \cos^2 \theta} + \frac{p_3^2}{r^2} \right] - \frac{\mu}{r}$$

相应的哈密顿-雅可比方程为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \frac{\mu}{r} \\ = 0 \end{aligned} \quad (3.90)$$

由于 H 中不显含 t 和坐标 ϕ , 故可记 S 为

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_3 \phi + S'(r, \theta) \quad (3.91)$$

代入(3.90)式, 并可化为:

$$2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - r^2 \left(\frac{\partial S'}{\partial r} \right)^2 = \left(\frac{\partial S'}{\partial \theta} \right)^2 + \alpha_3^2 \sec^2 \theta$$

此式已为分离变量形式。因左端显然为正, 故可设等于常数 α_2^2 , 并令

$$S' = S_1(r) + S_2(\theta)$$

代入可得分离后的两个关系式。又因 S_1, S_2 只有一个变量，偏微商可改为常微商：

$$2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - r^2 \left(\frac{dS_1}{dr} \right)^2 = \alpha_2^2$$

$$\left(\frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 + \alpha_3^2 \sec^2 \theta = \alpha_2^2$$

即可得：

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \int_{r_1}^r \sqrt{2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2} \frac{dr}{r} \\ S_2 &= \int_0^\theta \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2 \theta} d\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.92)$$

相应的

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_3 \varphi + S_1 + S_2 \quad (3.93)$$

于是二体问题的解可表为：

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial S}{\partial r}, \quad \text{即} \quad \dot{r} = \frac{\partial S_1}{\partial r} \\ p_2 &= \frac{\partial S}{\partial \phi}, \quad \text{即} \quad r^2 \cos^2 \theta \dot{\phi} = \alpha_3 \\ p_3 &= \frac{\partial S}{\partial \theta}, \quad \text{即} \quad r^2 \dot{\theta} = \frac{\partial S_2}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.94)$$

以及

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -t + \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial S_2}{\partial \alpha_1} \\ \beta_2 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial S_2}{\partial \alpha_2} \\ \beta_3 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = \varphi + \frac{\partial S_2}{\partial \alpha_3} \end{aligned} \right\} \quad (3.95)$$

下面针对椭圆运动情况，具体讨论(3.95)式，以便求出 α, β 同轨道根数之间的关系。

S_1 是对 r 的积分，在这里只要不定积分就可以了。但若取适当积分下限，可使问题简化。因 r 为向径，在椭圆运动中有最大

最小值, 设为 r_2 和 r_1 ; 可取 r_2 和 r_1 为(3.92)式中 S_1 中二次函数

$$y = 2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2 = 0$$

时两个根。由根与系数关系知有

$$r_1 + r_2 = -\frac{\mu}{\alpha_1}, r_1 r_2 = -\frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1} \quad (3.96)$$

但椭圆运动中, 近日距 $r_1 = a(1-e)$, 远日距 $r_2 = a(1+e)$, 因此有关系:

$$\alpha_1 = -\frac{\mu}{2a}, \alpha_2 = \sqrt{\mu a(1-e^2)} \quad (3.97)$$

即 α_1, α_2 又同 a, e 有关, 且 $\alpha_1 < 0$ 。于是有

$$y = (-2\alpha_1)(r - r_1)(r_2 - r)$$

(3.95)的第一式为

$$\beta_1 + t = \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_1} = \int_{r_1}^r \frac{r dr}{\sqrt{y}} - \frac{\partial r}{\partial \alpha_1} \left[\frac{\sqrt{y}}{r} \right]_{r=r_1}$$

但因 r_1 为 $y = 0$ 的一个根, 故上式第二项为 0, 可得

$$\beta_1 + t = \frac{1}{\sqrt{-2\alpha_1}} \int_{r_1}^r \frac{r dr}{\sqrt{(r - r_1)(r_2 - r)}}$$

以(3.97)代入, 并令

$$r = a(1 - e \cos E), \mu = n^2 a^3$$

则上式可化为

$$\begin{aligned} n(\beta_1 + t) &= \int_0^E (1 - e \cos E) dE \\ &= E - e \sin E \end{aligned}$$

此式即开普方程, 并有

$$\beta_1 = -\tau = M_0/n \quad (3.98)$$

再从(3.95)式的第三式知

$$\beta_3 = \phi + \frac{\partial S_2}{\partial \alpha_3} = \phi - \int_0^\theta \frac{\alpha_3 \sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2 \theta}}$$

$$= \phi - \int_0^\theta \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{\frac{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}{\alpha_3^2} - \operatorname{tg}^2 \theta}}$$

因根号内的量不能为负,故有

$$\alpha_2^2 > \alpha_3^2$$

可设辅助量 ϕ 为:

$$\alpha_2^2 - \alpha_3^2 = \alpha_3^2 \operatorname{tg} \phi$$

即

$$\alpha_2^2 = \alpha_3^2 \sec^2 \phi \quad (3.99)$$

代入上式可积出:

$$\beta_3 = \phi - \int_0^\theta \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \phi - \operatorname{tg}^2 \theta}} = \phi - \arcsin\left(\frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \phi}\right)$$

或

$$\sin(\phi - \beta_3) = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \phi} \quad (3.100)$$

因 $|\sin(\phi - \beta_3)| \leq 1$, 而 θ 为黄纬, 只在 I, IV 象限, 故必有 $|\theta| \leq \phi$; 但黄纬极大值就是行星轨道面对黄道面倾角 i , 可取 $\phi = i$, 即

$$\alpha_3 = \alpha_2 \cos i = \sqrt{\mu a(1-e^2)} \cos i \quad (3.101)$$

又从(3.100)式知, 黄纬 $\theta = 0$ 时有

$$\sin(\phi - \beta_3) = 0$$

此时行星在交点上, 黄经应为 Ω 或 $\Omega + \pi$, 故可取

$$\beta_3 = \Omega \quad (3.102)$$

(3.100)式即为行星黄经黄纬同轨道根数 Ω, i 的关系:

$$\operatorname{tg} \theta = \sin(\phi - \Omega) \operatorname{tg} i,$$

最后从(3.95)式的第二式有

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial S_2}{\partial \alpha_2} \\ &= -\alpha_2 \int_{r_1}^r \frac{dr}{r \sqrt{y}} - \frac{\partial r_1}{\partial \alpha_2} \left[\frac{\sqrt{y}}{r} \right]_{r=r_1} + \alpha_2 \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2 \theta}} \end{aligned}$$

$$= I_1 + I_2$$

其中第二项应为 0, 故只有两项积分, 记为 I_1, I_2 。但 I_2 可化为:

$$I_2 = \int_0^\theta \frac{\alpha_2 \cos \theta d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2 \cos^2 \theta - \alpha_3^2}} = \int_0^\theta \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \theta}}$$

$$\approx \arcsin \left(\frac{\sin \theta}{\sin i} \right)$$

即

$$\sin \theta = \sin I_2 \sin i \quad (3.103)$$

但从图 3.1(日心天球)知; x 为春分点, xND 为黄道, NP 为行星轨道, N, P 为升交点和行星位置。在直角三角形 NPD 中, $PN = f + \omega$, PD 与 ND 垂直, 故 $\widehat{PD} = \theta i$ 角即为行星轨道对黄道的倾角。由正弦定律可得

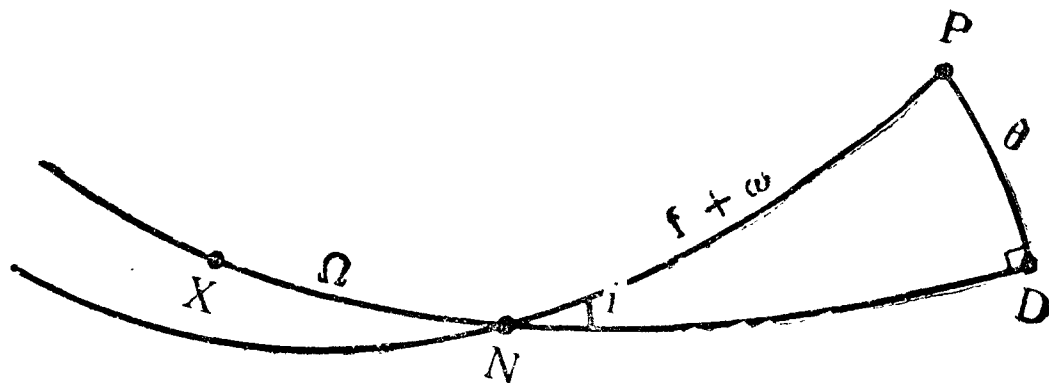


图 3.1

$$\sin \theta = \sin(f + \omega) \sin i$$

与(3.103)式比较知

$$I_2 = f + \omega \quad (3.104)$$

另外

$$I_1 = -\alpha_2 \int_{r_1}^r \frac{dr}{r \sqrt{y}} = -\frac{\alpha_2}{\sqrt{-2\alpha_1}} \int_{r_1}^r \frac{dr}{r \sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}}$$

$$\approx -\int_0^E \frac{\sqrt{1-e^2} dE}{(1-e \cos E)}$$

$$= -\int_0^E \frac{\sin f}{\sin E} dE$$

又由第二章习题 9 知, 上式即为

$$I_1 = - \int_0^f df = -f$$

因此

$$\beta_2 = f + \omega - f = \omega \quad (3.105)$$

这样得到了用正则方程组解出的积分常数 α, β 同轨道根数 $a, e, i, \Omega, \omega, \tau$ 的等价关系:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{\mu}{2a}, & \beta_1 &= -\tau = \frac{M_0}{n} \\ \alpha_2 &= \sqrt{\mu a(1-e^2)}, & \beta_2 &= \omega \\ \alpha_3 &= \sqrt{\mu a(1-e^2)} \cos i, & \beta_3 &= \Omega \end{aligned} \right\} \quad (3.106)$$

或

$$\left. \begin{aligned} a &= -\frac{\mu}{2\alpha_1}, & \Omega &= \beta_3 \\ e &= \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu}}, & \omega &= \beta_2 \\ i &= \arccos \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, & M_0 &= n\beta_1 = \frac{(-2\alpha_1)^{3/2}}{\mu} \beta_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.106)$$

因此称 α_i, β_i 为正则根数。

在有摄动时, 轨道根数是变量, 故用正则根数作变量就是一种正则共轭变量。

第八节 常用的几种正则共轭变量

现在以上节求出的椭圆运动的正则根数 α_i, β_i 出发推导出几种常用的正则共轭变量。

1. 德洛勒变量。是保留正则根数中的 $\alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3$; 用 $M = nt + M_0$ 代替 β_1 , 这样就把近点角中的时间 t , 隐含在变量中。设

α, β 为旧变量; 新变量为 Q, P , 其中五个都已知, 只有 Q_1 未知, 记为 $Q_1(\alpha_1, \beta_1, t)$ 。即变换为:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= Q_1(\alpha_1, \beta_1, t), & P_1 &= M = \frac{(-2\alpha_1)^{3/2}}{\mu}(t + \beta_1) \\ Q_2 &= \alpha_2, & P_2 &= \beta_2 \\ Q_3 &= \alpha_3, & P_3 &= \beta_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.107)$$

现按第四节的定理三, 选取函数 $S = S(\alpha, P, t)$ 。由于有关系

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} &= \beta_2 = P_2 \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} &= \beta_3 = P_3 \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} &= \beta_1 = \mu P_1 (-2\alpha_1)^{-3/2} - t \end{aligned}$$

故可以取

$$S = \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \mu P_1 (-2\alpha_1)^{-1/2} - \alpha_1 t \quad (3.108)$$

这样可保证原来五个变量符合要求, 而且

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1} = \mu (-2\alpha_1)^{-1/2} = \sqrt{\mu a} \quad (3.109)$$

根据第四节定理三知, 此变换为正则变换, 乘子为 1, 余函数

$$R = \frac{\partial S}{\partial t} = \alpha_1 = \frac{\mu^2}{2Q_1^2} \quad (3.110)$$

这一组变量是德洛勒在研究月球运动时首先提出的, 故称为德洛勒变量。通常专门用 $l, g, h; L, G, H$ 表示:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= L = \sqrt{\mu a}, & l &= M = P_1 \\ Q_2 &= G = \sqrt{\mu a(1-e^2)}, & g &= \omega = P_2 \\ Q_3 &= H = \sqrt{\mu a(1-e^2)} \cos i, & h &= \Omega = P_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.111)$$

2. 推广的德洛勒变量。因为很多天体的轨道偏心率 e 和轨道倾角 i 都是小量(如大行星及大卫星)。在讨论摄动时, 常把有

关函数展开为 e 和 $\sin i/2$ 的幂级数。故若直接把某些变量作为小量，在展开时有些方便。

容易看出：

$$G - L = -\sqrt{\mu a}(1 - \sqrt{1 - e^2}) = -\frac{Le^2}{1 + \sqrt{1 - e^2}}$$

$$H - G = -G(1 - \cos i) = -2G \sin^2 \frac{i}{2}$$

在 e, i 为小量时，它们都是小量。现设新变量为 L', G', H', l', g', h' 。

用第四节的定理三的推理 2，选函数 $S = S(l, g, h, L', G', H')$ 为简单的线性组合形式：

$$S = -lL' - g(L' + G') - h(L' + G' + H') \quad (3.112)$$

可保证

$$\left. \begin{aligned} L &= -\frac{\partial S}{\partial l} = L' \\ G &= -\frac{\partial S}{\partial g} = L' + G', \text{ 即 } G' = G - L \\ H &= -\frac{\partial S}{\partial h} = L' + G' + H', \text{ 即 } H' = H - G \end{aligned} \right\} \quad (3.113)$$

相应地有

$$\left. \begin{aligned} l' &= -\frac{\partial S}{\partial L'} = l + g + h \\ g' &= -\frac{\partial S}{\partial G'} = g + h \\ h' &= -\frac{\partial S}{\partial H'} = h \end{aligned} \right\} \quad (3.113)$$

新变量由生成函数 S 导出，相应的变换是正则变换；乘子仍为 1，而 S 不显含 t ，故余函数为 0。这组正则共轭变量由德洛勒变量的线性组合得出，故称为推广的德洛勒变量。

3. 邦加雷变量。邦加雷在三体问题研究中，为了避免过多

角变量，提出一组正则共轭变量，仍由德洛勒变量组成，定义如下：

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= L' = L, & l_1 &= l' \\ G_1 &= \sqrt{-2G'} \sin g', & g_1 &= \sqrt{-2G'} \cos g' \\ H_1 &= \sqrt{-2H'} \sinh h', & h_1 &= \sqrt{-2H'} \cosh h' \end{aligned} \right\} \quad (3.114)$$

这个变换可用第四节定理三，取生成函数

$$\begin{aligned} S &= L'l_1 + G' \arccos \frac{g_1}{\sqrt{-2G'}} + \frac{g_1}{2} \sqrt{-2G' - g_1^2} \\ &\quad + H' \arccos \frac{h_1}{\sqrt{-2H'}} + \frac{h_1}{2} \sqrt{-2H' - h_1^2} \end{aligned} \quad (3.115)$$

即可得

$$\left. \begin{aligned} l' &= \frac{\partial S}{\partial L'} = l_1 \\ g' &= \frac{\partial S}{\partial G'} = \arccos \frac{g_1}{\sqrt{-2G'}} \\ h' &= \frac{\partial S}{\partial H'} = \arccos \frac{h_1}{\sqrt{-2H'}} \\ L_1 &= \frac{\partial S}{\partial l_1'} = L' \\ G_1 &= \frac{\partial S}{\partial g_1} = \sqrt{-2G' - g_1^2} \\ H_1 &= \frac{\partial S}{\partial h_1} = \sqrt{-2H' - h_1^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.116)$$

显然(3.116)式与(3.114)式是等价的。因此利用 §3.4 定理三知(3.114)式为正则变换，即新变量 $L_1, G_1, H_1, l_1, g_1, h_1$ 仍为正则共轭变量；变换乘子为 1，余函数为 0。

上面两种德洛勒变量是最常用的正则共轭变量。其中 l, g, h_1 或 l', g', h' 是角度，又称为角变量；另外三个 L, G, H 或 L', G', H' 又称为作用变量。

第九节 正则变换概念的推广

上面讨论的正则变换,都是等维空间之间的变换,而且不涉及自变量的变换。在现代天体力学中,有时要遇到不等维空间之间的变换,而且变换后的新变量仍为正则共轭变量。另外也要遇到自变量改变情况。本节就是把上面讲过的正则变换推广到不等维以及有自变量变换的情况。

等维空间中的正则变换,变换前后的解集是一一对应的,不等维空间之间的变控情况不同,变换前后的解集一般不能一一对应,一个解集只对应一个的子集。

1. 增加空间维数的变换。对于正则共轭变量 (q, p) 和哈密顿函数 $H = H(q, p) \in C^{(2)}$ 的正则方程组

$$\dot{q} = H_p, \dot{p} = -H_q \quad (3.117)$$

其中 q, p 为 n 维向量。对于 H 显含时间 t 的情况,将在后面一起讲述。

现在作变换

$$p = p(u, v), q = q(u, v) \in C^{(2)} \quad (3.118)$$

其中 u, v 为 m 维向量,而 $m \geq n$ 。用此变换可将 p, q 的哈密顿函数直接变换为

$$\bar{H} = \bar{H}(u, v) = H(q(u, v), p(u, v)) \quad (3.119)$$

雅可比矩阵 p_u, p_v, q_u, q_v 都是 $n \times m$ 矩阵, $p_u^T, q_u^T, p_v^T, \dots$ 是 $m \times n$ 矩阵,因此它们之间可以取乘积 $p_u p_v^T, q_u q_v^T, \dots$ 成为 $n \times n$ 方阵。

以 $\bar{H}(u, v)$ 为哈密顿函数,可建立正则方程组:

$$\dot{v} = \bar{H}_u, \dot{u} = -\bar{H}_v \quad (3.120)$$

若此方程组能解出:

$$v = v(t), u = u(t) \quad (3.121)$$

现在讨论此解集与正则方程组(3.117)的关系。

定理一 若变换(3.118)式的雅可比矩阵 p_u, p_v, q_u, q_v 满足下列关系:

$$\left. \begin{aligned} p_u p_v^T - p_v p_u^T &= q_u q_v^T - q_v q_u^T = 0 \\ p_u q_v^T - p_v q_u^T &= E \end{aligned} \right\} \quad (3.122)$$

则(3.120)式的解(3.121)式代入(3.118)式后得到的

$$q = q(t), p = p(t) \quad (3.123)$$

是正则方程组(3.117)式的解。

证 根据变换(3.118)式和正则方程组(3.120)可得:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= q_v \dot{v} + q_u \dot{u} = q_v \bar{H}_u - q_u \bar{H}_v \\ \dot{p} &= p_v \dot{v} + p_u \dot{u} = p_v \bar{H}_u - p_u \bar{H}_v \end{aligned} \right\} \quad (3.124)$$

但由 $\bar{H} = \bar{H}(u, v) = H(p, q)$ 得

$$\bar{H}_u = q_u^T H_q + p_u^T H_p$$

$$\bar{H}_v = q_v^T H_q + p_v^T H_p$$

代入(3.124)式可得:

$$\dot{q} = (q_v q_u^T - q_u q_v^T) H_q + (q_v p_u^T - q_u p_v^T) H_p$$

$$\dot{p} = (p_v q_u^T - p_u q_v^T) H_q + (p_v p_u^T - p_u p_v^T) H_p$$

根据条件(3.122)式, 以及

$$q_v p_u^T - q_u p_v^T = (p_u q_v^T - p_v q_u^T)^T = E^T = E$$

即得:

$$\dot{q} = H_p, \quad \dot{p} = -H_q$$

故定理得证。但 $2m$ 阶方程组(3.120)式的解(3.121)有 $2m$ 个独立积分常数, 把它代入(3.118)式后所得的函数(3.123)式也含 $2m$ 个独立常数。可是根据 p, q 的初始条件, 决定了 $2m$ 个常数只满足 $2n$ 个关系式, 因此也只有 $2n$ 个独立常数在解(3.123)式中。

条件(3.122)式实际上是柏松括号表示的正则变换条件,对应的乘子为1。只是柏松括号是 $2n$ 个变量 p, q 对 $2m$ 个 u, v 的偏导数。

这里的结果只是说明 $2m$ 维正则方程组(3.120)的解(3.121)式在通过变换(3.118)后,并满足 p, q 初值条件的解就是原正则方程组的解,但反过来并不一定成立。因而所得解集只能说是原方程解集的子集。

2. 自变量的变换。现用增加维数办法把显含自变量 t 时,变成不明显含 t 的情况。即把非定常哈密顿系统化为定常系统。

若原方程

$$\dot{q} = H_p, \quad \dot{p} = -H_q \quad (3.125)$$

为非定常系统; p, q 为 n 维向量, $H = H(t, p, q)$ 。我们现在定义新哈密顿函数

$$\bar{H} = H(q_0, p, q) + p_0 \quad (3.126)$$

其中 $q_0 = t, p_0$ 为 q_0 相应的正则共轭变量。由此可得新正则方程:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_0 = \bar{H}_{p_0} = 1, \quad \dot{p}_0 = -\bar{H}_{q_0} = -H_t \\ \dot{q} = \bar{H}_p = H_p, \quad \dot{p} = -\bar{H}_q = -H_q \end{aligned} \right\} \quad (3.127)$$

显然(3.127)式是 $2n+2$ 阶方程组,对应正则共轭变量 (q_0, q) 和 (p_0, p) ,而且成为定常系统。下面给此方程组与原方程组(3.125)式的解之间的关系。

定理二 设方程组(3.127)式对应于初值:

$$\left. \begin{aligned} q(0), p(0) \\ q_0(0) = 0, p_0(0) = -H(0, p(0), q(0)) \end{aligned} \right\} \quad (3.128)$$

的解

$$\left. \begin{aligned} q = q(t), p = p(t) \\ q_0 = q_0(t), p_0 = p_0(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.129)$$

则有:① 方程组(3.127)的解(3.129)式中 $q(t), p(t)$ 。也是原方

程组(3.125)式的解。

$$\textcircled{2} \quad q_0(t) = t, p_0(t) = -H(t, p(t), q(t)).$$

$\textcircled{3} \quad \bar{H} = \text{常数}$ 为(3.127)式的一个积分,而且有

$$\bar{H} = 0$$

证 $\textcircled{1}$ 显然成立; $\textcircled{2}$ 可利用关系

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = H_t$$

直接可得。又因 $\bar{H}$ 不再显含自变量,故从定常系统(3.127)式可知 $\bar{H} = \text{常数}$ 是一个积分,但由初值条件(3.128)式知

$$\bar{H}(0) = p_0(0) + H(0, p(0), q(0)) = 0$$

故 $\textcircled{3}$ 得证。

现在讨论自变量的变换。设新自变量 s 与旧自变量 t 之间关系为:

$$\frac{ds}{dt} = w(p_0, q_0, p, q) \quad (3.130)$$

再定义一个新哈密顿函数

$$\tilde{H} = w \bar{H} = w[H(q_0, q, p) + p_0] \quad (3.131)$$

由此可建立一个新正则方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{ds} &= \tilde{H}_p, & \frac{dp}{ds} &= -\tilde{H}_q \\ \frac{dq_0}{ds} &= \tilde{H}_{p_0}, & \frac{dp_0}{ds} &= -\tilde{H}_{q_0} \end{aligned} \right\} \quad (3.132)$$

对此方程组,可得下面两个定理。

定理三 $\tilde{H} = \text{常数}$ 是(3.132)式的一个积分。

证 因有

$$\frac{d\tilde{H}}{ds} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} + \tilde{H}_q \frac{dq}{ds} + \tilde{H}_p \frac{dp}{ds} + \tilde{H}_{q_0} \frac{dq_0}{ds} + \tilde{H}_{p_0} \frac{dp_0}{ds}$$

但 $\tilde{H}$ 不显含 s , 故第一项为 0, 后四项利用方程组(3.132)式可得总和为 0, 因此 $\tilde{H} = \text{常数}$ 是一个积分。

定理四 若取 $t=0$ 时 $s=0$, 并取(3.128)式作为方程组(3.132)式的初值, 对应的解

$$q_0(s), p_0(s), q(s), p(s) \quad (3.133)$$

由 $q_0(s) = t$ 求出反函数 $s = s(t)$; 代入上式即得表为 t 的函数, 它就是方程组(3.127)式满足初始条件(3.128)式的解。

证 由定理三及初值条件可知, $\tilde{H} = 0$, 即

$$\overline{H}(q_0(s), p(s), q(s)) = \frac{1}{w} \tilde{H}(q_0(s), p_0(s), q(s), p(s)) = 0 \quad (3.134)$$

方程组(3.132)可化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{ds} &= \tilde{H}_p = w \overline{H}_p + \overline{H} w_p = w \overline{H}_p \\ \frac{dp}{ds} &= -\tilde{H}_q = -w \overline{H}_q - \overline{H} w_q = -w \overline{H}_q \\ \frac{dq_0}{ds} &= w \overline{H}_{p_0}, \quad \frac{dp_0}{ds} = -w \overline{H}_{q_0} \end{aligned} \right\} \quad (3.135)$$

再用 s 与 t 之间关系(3.130)式, 上式化为

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \overline{H}_p, & \dot{p} &= -\overline{H}_q \\ \dot{q}_0 &= \overline{H}_{p_0}, & \dot{p}_0 &= -\overline{H}_{q_0} \end{aligned}$$

这就是(3.127)式。于是定理得证。

第十节 用李氏级数表示的正则变换

在第四节中讲的隐函数形式的正则变换, 在天体力学中有广

泛应用。但因变换中新旧变换相混，也带来麻烦。在很多理论和应用课题中，变换为显函数形式更方便。在有小参数的力学系统中，用李氏级数表示的正则变换即是显函数形式，又在解法上具有一定优越性。特别在堀源一郎(G. Hori)和德普里(A. Deprit) 分别在1966, 1969年提出各自具体方法后，得到普遍重视。本节着重介绍李氏级数性质和由堀源一郎提出的方法原理。

1. 李氏级数定义和性质。由于要讨论收敛性，故采用复变函数。设 z 为 n 维复向量，其分量 $z_1, z_2, \dots, z_n$ 为复变量； $F(z)$ 为复函数，是在某一域 B 内的单值解析函数，则在域 B 内任一点 P 的邻域内可展开为 z_i 的收敛幂级数，并可设 P 为原点，不失去一般性，即

$$\left. \begin{aligned} F(z) &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=0}^{\infty} a_{i_1 i_2 \dots i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \cdots z_n^{i_n} \\ |z_i| &< \rho_i, \rho_i > 0, (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (3.136)$$

$F(z)$ 在闭域 $|z_i| \leq \rho_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 上有上界 M ，则有

$$|a_{i_1 i_2 \dots i_n}| \rho_1^{i_1} \rho_2^{i_2} \cdots \rho_n^{i_n} \leq M$$

若设

$$b_{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{M}{\rho_1^{i_1} \rho_2^{i_2} \cdots \rho_n^{i_n}},$$

则

$$|a_{i_1 i_2 \dots i_n}| \leq b_{i_1 i_2 \dots i_n} \quad (3.137)$$

用 $b_{i_1 \dots i_n}$ 作系数构造一函数

$$\left. \begin{aligned} G(z) &= \frac{M}{\left(1 - \frac{z_1}{\rho_1}\right) \left(1 - \frac{z_2}{\rho_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z_n}{\rho_n}\right)} \\ &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=0}^{\infty} b_{i_1 i_2 \dots i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \cdots z_n^{i_n} \\ &\quad |z_i| < \rho_i, (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (3.138)$$

$G(z)$ 就为 $F(z)$ 在哥西意义下的优函数。并若

$$|z_i| \leq y_i < \rho_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

则有

$$|F(z)| \leq G(y) \quad (3.139)$$

此不等式可推广到任意阶偏导数, 即

$$\left. \left| \frac{\partial^l F(z)}{\partial z_k^l} \right| \leq \frac{\partial^l G(y)}{\partial y_k^l}, \quad |z_k| \leq y_k < \rho_k \right\} \quad (3.140)$$

$$k = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2, \dots$$

同样可推广到微分算子。定义线性微分算子:

$$D = \sum_{i=1}^n h_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i} \quad (3.141)$$

其中 $h_i(z)$ 在域 $|z_i| \leq \rho_i$ 内为 z 的解析函数。用上面同样定义 $h_i(z)$ 的优函数, 只是上界记为 N_i 。则算子

$$\Delta = \left. \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\left(1 - \frac{y_1}{\rho_1}\right) \left(1 - \frac{y_2}{\rho_2}\right) \dots \left(1 - \frac{y_n}{\rho_n}\right)} \frac{\partial}{\partial y_i} \right\} \quad (3.142)$$

$$|z_i| \leq y_i < \rho_i, i = 1, 2, \dots, n$$

称为 D 的优算子, 并在上述域内有

$$|D^m F(z)| \leq \Delta^m G(y), m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.143)$$

$m = 0$ 时即为 (3.139) 式。显然, 函数 $F(z)$, $DF(z)$, $D^2F(z) = D(DF(z))$, $\dots$ 在同一域内都是解析函数, 定义李氏级数如下:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} D^m F(z) \quad (3.144)$$

定理一 上式定义的李氏级数在域

$$\left. \begin{aligned} &|z_i| \leq y < \rho, (i = 1, 2, \dots, n) \\ &|t| \leq \frac{\rho q}{(n+1)N} \left(1 - \frac{y}{\rho}\right)^{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (3.145)$$

内一致收敛, 其中

$$\rho = \min(\rho_i), N = \max(N_i), 0 < q < 1$$

因此在 $F(z)$ 的解析域 B 内存在一有界闭域 B_1 及一正数 T , 使李氏级数(3.144)式在 B_1 内任一点及 $|t| \leq T$ 时, 绝对而一致收敛, 为 z_i 及 t 的解析函数。

$$\text{证 取} \quad G(y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{y}{\rho}\right)^n} \quad (3.146)$$

为正实变量 y 的函数, 相应取算子

$$\Delta = \frac{N}{(1 - y/\rho)^n} \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.147)$$

其中 N, ρ 为定理中定义相同, $y < \rho$; 则在域 $|z_i| \leq y < \rho$ 内有

$$|D^m F(z)| \leq \Delta^m G(y) \quad (3.148)$$

直接计算可知

$$\Delta^m G(y) = \frac{(n; n+1; m) M N^n}{(1 - y/\rho)^{m(n+1)+n} \rho^m} \quad \left. \vphantom{\frac{(n; n+1; m) M N^n}{(1 - y/\rho)^{m(n+1)+n} \rho^m}} \right\} \\ \text{其中 } (n; d; m) = n(n+d)(n+2d) \cdots [(n+(m-1)d)] \quad (3.149)$$

根据级数判别法知, 级数

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \Delta^m G(y) \quad (3.150)$$

在(3.145)式所给的条件 下绝对收敛。又从优函数定义知李氏级数(3.144)式在同一范围内绝对且一致收敛。再根据波雷耳(Borel)有限复盖定理及维斯特拉斯(Weierstrass)关于一致收敛级数的定理, 可知李氏级数 $z \in B_1, t < T$ 内为 z_i, t 的解析函数。

由(3.141)式定义的算子 D 有下列性质:

- ① $D[f_1(z) + f_2(z)] = Df_1(z) + Df_2(z)$
- ② $D[f_1(z)f_2(z)] = f_1(z)Df_2(z) + f_2(z)Df_1(z)$
- ③ $D^m[c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)] = c_1 D^m f_1(z) + c_2 D^m f_2(z)$

其中 c_1, c_2 为与 z 无关的常数。

$$\text{④ } D^m[f_1(z)f_2(z)] = \sum_{k=1}^m C_k^m D^k f_1(z) D^{m-k} f_2(z),$$

其中 m, k 为正整数, 且组合

$$C_k^m = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}$$

利用上面关系容易证出下面李氏级数的性质:

$$\left. \begin{aligned} & C_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} D^m f_1(z) + C_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} D^m f_2(z) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} D^m [C_1 f_1(z) + C_2 f_2(z)] \\ & \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} D^m f_1(z) \right] \cdot \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} D^m f_2(z) \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} D^m [f_1(z) f_2(z)] \end{aligned} \right\} \quad (3.151)$$

下面用李氏级数定义变换。用 z_i 表示旧变量, 定义新变量 Z_i 为

$$Z_i = f_i(t, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} D^m z_i \quad (3.152)$$

显然 $f_i(t, z)$ 在 $t=0, z_i=0$ 的邻域中为 z_i 及 t 的解析函数, 并有初值

$$(Z_i)_{t=0} = f(0, z) = z_i \quad (3.153)$$

则这样定义的变换有下面重要性质:

定理二 若 $F(z)$ 为 $z_i=0$ 邻域内的任意一个解析函数, 则 $F(Z)$, 也为 Z_i 和 $t=0$ 邻域内的解析函数, Z 即由(3.152)式定义。且有

$$F(Z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} D^m F(z) \quad (3.154)$$

证 容易证明, 当 $F(z)$ 为 z_i 的多项式时, (3.154)式成立。然后再推广到 $F(z)$ 为 z_i 的解析函数, 即表示为 z_i 的无穷级数情况。

定理三 若 $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ 为算子 D 的解析区域内的一点, 则满足初值条件(3.153), 并由(3.152)式定义的 $Z_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为微分方程

$$\frac{dZ_i}{dt} = h_i(X), i = 1, 2, \dots, n \quad (3.155)$$

的唯一解析解, 其中 t 为自变量, Z_i 的初值为 z_i 。

证 将(3.152)式两端对 t 求微商得

$$\begin{aligned} \frac{dZ_i}{dt} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} D^m z_i = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} D^m (Dz_i) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} D^m h_i(z) = h_i(Z) \end{aligned}$$

根据微分方程解的唯一性定理, Z_i 为满足初始条件的唯一解析解。

定理四 $Z_i = f_i(t, z)$, f_i 由(3.152)式定义, 满足驻定条件: 若 $z_i = f_i(t_1, z)$, 则有

$$Z_i = f_i(t_2, w) = f_i(t_1 + t_2, z) \quad (3.156)$$

证 因 $Z_i = f_i(t, z)$ 为定常微分方程组(3.155)式的唯一解析解, 因而满足驻定条件。

定理五 (3.152)式定义的变换 $Z_i = f_i(t, z)$ 的逆变换为

$$z_i = f_i(-t, Z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t)^m}{m!} \overline{D}^m Z_i \quad (3.156)$$

其中算子 $\overline{D}$ 与 D 相同, 只是把其中的 $z_i \rightarrow Z_i$ 。

证 利用定理四, 取

$$Z_i = f_i(t, z)$$

则

$$f_i(-t, Z) = f_i(-t, f_i(t, z)) = f_i(0, z) = z_i$$

故定理得证。

2. 李氏级数表示的正则变换。设 q, p 是互为共轭的 n 维向

量, $W = W(q, p)$, $f = f(q, p)$ 为 q, p 的数量函数, 定义算子 L_W 为

$$L_W f = \{f; W\} \quad (3.157)$$

式中 $\{f; W\}$ 即为变量 q, p 的柏松括号, L_W 就称为(由母函数 W 生成的)李氏导数, 是一个微分算子, 与(3.141)式定义的算子 D 同样形式。因

$$\begin{aligned} L_W f &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial W}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial W}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial W}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial W}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) f \end{aligned}$$

即

$$L_W = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial W}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial W}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \quad (3.158)$$

若 W, V 为 q, p 的解析函数, 则可导出下列性质(f, g 为 q, p 的解析函数, C_1, C_2 为常数):

$$\left. \begin{aligned} L_W(C_1 f + C_2 g) &= C_1 L_W f + C_2 L_W g \\ L_W(fg) &= f L_W g + g L_W f \\ L_W\{f; g\} &= \{f; L_W g\} + \{L_W f; g\} \\ L_W L_V &= L_V L_W + L_{\{V; W\}} \end{aligned} \right\} \quad (3.159)$$

其中第三, 四式用柏松括号性质可证出。另外若定义

$$L_W^0 f = f, \quad L_W^1 f = L_W f, \quad L_W^2 f = L_W(L_W f)$$

$$L_W^n f = L_W^{n-1}(L_W f) \dots$$

反复用(3.159)式性质可得

$$\left. \begin{aligned} L_W^n(C_1 f + C_2 g) &= C_1 L_W^n f + C_2 L_W^n g \\ L_W^n(fg) &= \sum_{k=1}^n C_k^n L_W^k f L_W^{n-k} g \\ L_W^n\{f; g\} &= \sum_{k=1}^n C_k^n \{L_W^k f; L_W^{n-k} g\} \end{aligned} \right\} \quad (3.160)$$

根据这些性质,可以按(3.144)式,定义算子 L_W 和参数 ε 的李氏级数,并用指数函数符号:

$$\exp(\varepsilon L_W) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} L_W^n \quad (3.161)$$

利用(3.160)式的结果,容易得出有关李氏级数的性质:

$$\left. \begin{aligned} \exp(\varepsilon L_W)(C_1 f + C_2 g) &= C_1 \exp(\varepsilon L_W) f + C_2 \exp(\varepsilon L_W) g \\ \exp(\varepsilon L_W)(fg) &= [\exp(\varepsilon L_W) f][\exp(\varepsilon L_W) g] \\ \exp(\varepsilon L_W)\{f; g\} &= \{\exp(\varepsilon L_W) f; \exp(\varepsilon L_W) g\} \end{aligned} \right\} \quad (3.162)$$

下面用李氏级数(3.161)式对旧变量 q, p 进行变换;用 Q, P 记新变量,定义为:

$$Q = \exp(\varepsilon L_W) q, P = \exp(\varepsilon L_W) p \quad (3.163)$$

容易证明,这是正则变换。因 q, p 是正则共轭变量,对自身的柏松括号有

$$\{q_i; q_j\} = \{p_i; p_j\} = 0, \{q_i; p_j\} = \delta_{ij}$$

故利用性质(3.162)式可得:

$$\begin{aligned} \{Q_i; Q_k\} &= \exp(\varepsilon L_W) \{q_i; q_k\} = 0 \\ \{P_i; P_k\} &= \exp(\varepsilon L_W) \{p_i; p_k\} = 0 \\ \{Q_i; P_k\} &= \exp(\varepsilon L_W) \{q_i; p_k\} = \delta_{ik} \end{aligned}$$

此表明(3.163)式是正则变换,而且乘子为1,不显含时间 t ; 故为完全正则变换,哈密顿函数不变。变换完全是显函数形式,母函数 $W = W(q, p)$ 也是显函数,成为重要特色。(3.163)式就是一种特殊的李氏变换。利用定理2可知,对任一解析函数 $f(q, p)$, 经变换后有:

$$f(Q, P) = \exp(\varepsilon L_W) f(q, p) \quad (3.164)$$

现在从两方面推广。一是原哈密顿函数 H 和母函数 W 都显含时间 t ;二是 H, W 及 f 都显含参数 ε 。

含自变量 t 的情况可根据上节的方法,把时间 t 作

为 q_0 ，相应的共轭广义动量 $p_0 = -H(q, p, t) = -H(q, p, q_0)$ 。则用李氏级数表示的 $2n+2$ 维向量 (q_i, p_i) 到 (Q_i, P_i) ($i=0, 1, 2, \dots, n$) 的变换：

$$Q = \exp(\varepsilon L_W) q, \quad P = \exp(\varepsilon L_W) p$$

仍为正则变换，只是新哈密顿函数 $\bar{H} = H + P_0$ ，即余函数

$$R = P_0 = \exp(\varepsilon L_W) p_0 = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \cdot L_W^{n-1} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) \quad (3.165)$$

下一段讨论 H, W 及 f 含 ε 的情况。

3. 堀源一郎(Hori Gen ichiro)的方法。在李氏变换中，母函数 W 并没有具体规定，只限定为 q, p, t (有时含 ε) 的解析函数，可根据所讨论问题的需要来选择。

先考虑保守情况。设原共轭变量的哈密顿函数 $H = H(q, p, \varepsilon)$ 可展开为 ε 的收敛幂级数：

$$H(q, p, \varepsilon) = H_0(q, p) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k H_k(q, p) \quad (3.166)$$

为符号方便起见，把新旧变量之间的正则变换写为：

$$q = \exp(\varepsilon L_W) Q, \quad p = \exp(\varepsilon L_W) P \quad (3.167)$$

其中母函数 $W = W(Q, P, \varepsilon)$ 为新变量 Q, P 及参数 ε 的函数，且可展开为 ε 的收敛幂级数：

$$W(Q, P, \varepsilon) = W_0(Q, P) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k W_k(Q, P) \quad (3.168)$$

设新正则共轭变量 Q, P 的哈密顿函数 K 也能展开为 ε 的收敛幂级数：

$$K(Q, P, \varepsilon) = K_0(Q, P) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k K_k(Q, P) \quad (3.169)$$

用变换(3.167)式和关系(3.168)式，可将 H_k 展开为下面形式(准到 ε^3)

$$\begin{aligned} H_0(q, p) = & H_0(Q, P) + \varepsilon \{H_0; W_0\} + \varepsilon^2 \{H_0; W_1\} \\ & + \varepsilon^3 \{H_0; W_2\} + \frac{\varepsilon^2}{2} \{\{H_0; W_0\}; W_0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\varepsilon^3}{2} \{ \{H_0; W_1\}; W_0 \} + \frac{\varepsilon^3}{2} \{ \{H_0; W_0\}; W_1 \} \\
& + \frac{\varepsilon^3}{6} \{ \{ \{H_0; W_0\}; W_0 \}; W_0 \} \quad (3.170)
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
H_1(q, p) &= H_1(Q, P) + \varepsilon \{H_1; W_0\} + \varepsilon^2 \{H_1; W_1\} \\
H_2(q, p) &= H_2(Q, P) + \varepsilon \{H_2; W_0\} \\
H_3(q, p) &= H_3(Q, P)
\end{aligned} \right\} (3.171)$$

式中右端所有 H_k 都是在原 $H_k(q, p)$ 中, 直接将 q, p 换为 Q, P 。由于这是保守正则变换, 哈密顿函数不变, $H \equiv K$ 。比较两端 ε 的同次幂项可得(都是 Q, P 的函数):

$$K_0 = H_0, \quad K_1 = H_1 + \{H_0; W_0\} \quad (3.172)$$

$$\begin{aligned}
K_2 &= H_2 + \{H_0; W_1\} + \{H_1; W_0\} + \frac{1}{2} \{ \{H_0; W_0\}; W_0 \} \\
&= H_2 + \{H_0; W_1\} + \frac{1}{2} \{K_1 + H_1; W_0\} \quad (3.173)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_3 &= H_3 + \{H_0; W_2\} + \frac{1}{2} \{K_1 + H_1; W_1\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \{K_2 + H_2; W_0\} + \frac{1}{12} \{ \{H_1 - K_1; W_0\}; W_0 \} \quad (3.174)
\end{aligned}$$

因 H_k 是已知函数, 故 $K_0 = H_0$ 已知。现要由(3.172)式确定 W_0 和 K_1 ; 由(3.173)式确定 W_1 和 K_2 ; 由(3.174)式确定 W_2 和 K_3 。如还需要更高阶项, 可依次做下去。当然, 由一个式子不能唯一确定两个未知函数, 这也为实际需要而增加某些条件的自由度。

在天体力学中, 天体运动所满足的正则方程组的 H_0 都很简单(见第四章), 一般为 0 或只含一个变量。如果新哈密顿函数 K 的循环坐标多, 甚至不含坐标 Q , 则容易积出。现在就根据这个原则来确定 K_k 和 W_k 。

把 H_1 分为含 Q 和不含 Q 两部分:

$$H_1 = H_{1s} + H_{1p} \quad (3.175)$$

式中 H_{1s} 为不含 Q 的部份, 其余部份为 H_{1p} , 则可取

$$K_1 = H_{1s} \quad (3.176)$$

则由(3.172)式有

$$H_{1p} + \{H_0; W_0\} = 0 \quad (3.177)$$

这样已确定 K_1 , 而 W_0 可从(3.177)式解出。同理可确定 K_2, K_3, W_1, W_2 等。但(3.177)式是 W_0 的偏微分方程, 相应求 W_1, W_2 的也是, 一般情况下求解很困难。下向是堀源一郎为解决此困难提出的一种方法。

引入一参变量 τ , 由于 H_0 很简单, 且不含自变量; 故方程

$$\frac{dQ}{d\tau} = \frac{\partial H_0}{\partial P}, \quad \frac{dP}{d\tau} = -\frac{\partial H_0}{\partial Q} \quad (3.178)$$

一般是可积的, 设解为:

$$Q = Q(\tau, C), \quad P = P(\tau, C) \quad (3.179)$$

其中 $C = (C_1, C_2, \dots, C_{2n})$ 为积分常数。因(3.178)式为定常系统, 故必有一常数(如 c_1)可加在 τ 上, 故(3.179)式可反解出为

$$\tau + c_1 = f(Q, P), \quad c_j = f_j(Q, P) \quad (3.180)$$

其中 $j = 2, 3, \dots, 2n$ 。

现在讨论新哈密顿方程组

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q} \quad (3.181)$$

由于 $K \equiv H$ 为保守系统, 存在能量积分:

$$K = h(\text{常数}) \quad (3.181)$$

利用(3.179), 可把任何 Q, P 的函数化为 τ 的函数

$$\text{例如} \quad H_1(Q, P) = H_1(\tau, c) = M_{1s} + H_{1p} \quad (3.182)$$

其中 H_{1s} 为不含 τ 的部份, 可用平均法求出:

$$H_{1s} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T H_1(\tau, c) d\tau \quad (3.183)$$

对(3.172)——(3.174)式右端的所有已知函数都可这样分开。另外,

$W_0, W_1, \dots$ 等由(3.178)有

$$\begin{aligned}\frac{dW_0}{d\tau} &= \frac{\partial W_0}{\partial Q} \frac{dQ}{d\tau} + \frac{\partial W_0}{\partial P} \frac{dP}{d\tau} \\ &= \frac{\partial W_0}{\partial Q} \frac{\partial H_0}{\partial P} - \frac{\partial W_0}{\partial P} \frac{\partial H_0}{\partial Q} = -\{H_0; W_0\}\end{aligned}$$

同理

$$\frac{dW_k}{d\tau} = -\{H_0; W_k\}$$

故 K_k 和 W_k 可逐次由下面步骤定出:

$$K_0 = H_0$$

$$K_1 = H_{1s}, \quad H_{1p} = -\{H_0; W_0\} = \frac{dW_0}{ds}$$

$$W_0 = \int H_{1p} d\tau, \quad H_1 - K_1 = H_{1p} \quad (3.184)$$

$$K_2 = H_{2s} + \frac{1}{2}\{K_1 + H_1; W_0\}_s$$

$$H_{2p} + \frac{1}{2}\{K_1 + H_1; W_0\}_p = -\{H_0; W_1\} = \frac{dW_1}{ds}$$

$$W_1 = \int \left[H_{2p} + \frac{1}{2}\{K_1 + H_1; W_0\}_p \right] d\tau \quad (3.185)$$

$$K_3 = H_{3s} + \frac{1}{2}\{K_1 + H_1; W_1\}_s + \frac{1}{2}\{K_2 + H_2; W_0\}_s$$

$$+ \frac{1}{12}\{\{H_{1p}; W_0\}; W_0\}_s$$

$$H_{3p} + \frac{1}{2}\{K_1 + H_1; W_1\}_p + \frac{1}{2}\{K_2 + H_2; W_0\}_p$$

$$+ \frac{1}{12}\{\{H_{1p}; W_0\}; W_0\}_p = -\{H_0; W_2\} = \frac{dW_2}{d\tau}$$

$$\begin{aligned}W_2 &= \int \left[H_{3p} + \frac{1}{2}\{K_1 + H_1; W_1\}_p + \frac{1}{2}\{K_2 + H_2; W_0\}_p \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12}\{\{H_{1p}; W_0\}; W_0\}_p \right] d\tau \quad (3.186)\end{aligned}$$

这个过程可以继续下去, 直到所需阶数; 求出 W_k 和 K_k 为 τ 的函

数, 还包含原积分常数 $c = (c_1, c_2, \dots, c_{2n})$ 。然后用(3.180)式变换为 Q, P 的函数, 新哈密顿方程组完全确定。

至于非定常系统, 可先扩充为 $2n+2$ 维的定常系统; 取 $q_0 = t$, 对应的 $p_0 = -H(t, q, p, \varepsilon) = -H(q_0, q, p, \varepsilon)$ 。新哈密顿函数

$$\left. \begin{aligned} \bar{H} &= H(q_0, q, p, \varepsilon) + p_0 = \bar{H}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \bar{H}_k(q_0, q, p) \\ \bar{H}_0 &= H_0 + p_0 \end{aligned} \right\} (3.187)$$

李氏变换仍用(3.167)式。只是母函数 $W = W(Q_0, Q, P)$ 可认为不含 P_0 , 因此有

$$q_0 = \exp(\varepsilon L_W) Q_0 = Q_0 \quad (3.188)$$

变换后新哈密顿函数 $\bar{K}$ 也应为 $\bar{H}$ (仍为定常系统), 故讨论完全相同。后面的 $\bar{H}_k$ 只是直接把其中 q, p 变换为 Q, P 。则相应的堀源一郎的方程(3.178)式为

$$\frac{dQ}{d\tau} = \frac{\partial \bar{H}_0}{\partial P}, \quad \frac{dP}{d\tau} = -\frac{\partial \bar{H}_0}{\partial Q}$$

$\bar{H}_0 = H_0(Q_0, Q, P) + P_0$, 即有

$$\frac{dQ_0}{d\tau} = 1$$

可取 $Q_0 = \tau = q_0 = t \quad (3.189)$

由此可知上面定常系统的讨论同样成立, 只是可把其中的辅助量 τ 直接换为时间 t , 反而更简单一些。

习 题

1. 试列出人造卫星相对于随地球自转的地心赤道坐标运动的正则方程组(只考虑二体问题)。

2. 在 $2n$ 维相空间 x 到 y 的变换 $y = y(x, t) \in C^{[1]}$ 中, $\Gamma = y_x$ 。试证 $\det \Gamma = \text{常数}$ (且不为 0) 是 $y = y(x, t)$ 为正则变换的必要条件。

3. 若 $2n$ 维相空间之间的变换 $y = y(x, t)$ 为 x 的线性齐次函数, 试给出它为正则变换的条件。

4. 根据柏松括号的定义, 试证数量函数 $F = F(p, q, t) = \text{常数}$ 是正则方程组

$$\dot{q} = H_p, \quad \dot{p} = -H_q$$

的一个积分的充要条件为:

$$F_t = \{F; H\}$$

5. 同上题, 若两个数量函数 $F_1(p, q, t), F_2(p, q, t)$ 等于常数是上面正则方程组的两个积分, 试证 $\{F_1; F_2\} = \text{常数}$ 也是积分。

6. 第四节的定理三及各推理中, 都是在乘子 $\mu = 1$ 情况下讨论的; 若 $\mu \neq 1$ 时, 是否有类似的结果?

7. 利用第三章第四节的定理三, 试求出恒等变换相应的生成函数 $S = S(q, u, t)$ 。

8. 同上, 试求出广义动量不变的正则变换的生成函数形式。

9. 试用正则变换证明雅可比定理: 由哈密顿-雅可比方程

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0$$

得到的任一全积分 $S = S(q, \alpha, t)$ (其中包含全部 n 个坐标 q 及 n

个独立积分常数 α 和时间 t) 组成的关系式。

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad \beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha}$$

所对应的 $q = q(\alpha, \beta, t)$, $p = p(\alpha, \beta, t)$ 就是原哈密顿正则方程组

$$\dot{q} = H_p, \quad \dot{p} = -H_q$$

的解。

10. 正则变换 $y = y(x, t)$ 的乘子为 μ , 试证 $\det y_x = \mu^n$, 其中 x, y 是 $2n$ 维正则共轭变量。

11. 试讨论乘子为 μ 的正则变换与乘子为 $-\mu$ 的正则变换之间, 是否有一定关系。

12. 证明 §3.7 中由 $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ 到新变量 $(r, \phi, \theta, \dot{r}, r^2 \cos^2 \theta \dot{\phi}, r^2 \dot{\theta})$ 的变换为正则变换, 且哈密顿数不变。

13. 说明(3.94)的三个式子的意义。

第四章 受摄运动方程

第一节 摄动和吻切轨道

现在只讲过研究天体运动的近似模型——二体问题，虽然在理论上已全部解决，但不能用于解决天体运动的实际问题。因为任何一种具体天体的运动，都不是二体问题。二体问题仅能作为一级近似。

以行星为例。某行星在太阳引力作用下运动，可看作二体问题。但除太阳引力外还受到其他行星的引力，对所讨论行星运动有影响，使行星运动偏离二体问题轨道。

除引力外，有些天体还受到介质阻尼，辐射压力等各种影响，都会使天体运动偏离二体问题轨道。在天体力学中，把天体偏离二体问题的现象统称为**摄动**，二体问题称为**无摄运动**。也就是说，摄动是相对二体问题而言。如果不是以二体问题为基础，而是以另外一些可积系统为基础，同样可规定相对于这种系统的摄动。此可积系统称为无摄运动，它的轨道称为**中间轨道**。在天体力学，这种以某种中间轨道为基础再讨论摄动的方法，就叫做中间轨道方法。可惜成功的例子不多。绝大多数天体的运动，用二体问题作中间轨道仍然最有效。因此，如不加说明，天体力学中所讲的摄动，都是以二体问题为基础。

天体 P 相对中心体 S 的运动方程按二体问题应为：

$$m \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu m}{r^3} \vec{r}, \text{ 或 } \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \quad (4.1)$$

其中 $\vec{r} = \overrightarrow{SP}$, $\mu = G(M + m)$; M, m 为 S 和 P 的质量, G 为万有引力常数。在某惯性参考架下, $\vec{r} = (x, y, z)$ 。(4.1)式决定的运动就是无摄运动。

若除中心体作为质点的引力外, P 点还受到其它力的作用, 这些力的总作用 $\vec{F}$ 表示, 对 P 点产生的加速度用 $\vec{W}$ 表示。则 P 点的运动方程应写为:

$$m \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu m}{r^3} \vec{r} + \vec{F} \quad (4.2)$$

或

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} + \vec{W} \quad (4.2)$$

这个方程组就称为 P 点的受摄方程。 $\vec{F}$ 称为摄动力, $\vec{W}$ 称为摄动加速度。

按(4.1)式可解出(参看第二章)天体 P 的坐标和速度可表为时间 t 和轨道根数(积分常数)的函数:

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= a(\cos E - e) \vec{P} + a\sqrt{1-e^2} \sin E \vec{Q} \\ \dot{\vec{r}} &= -\frac{a^2 n}{r} \sin E \vec{P} + \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r} n \cos E \vec{Q} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

其中 $n = \sqrt{\mu} a^{-3/2}$, $E - e \sin E = nt + M_0$, $\vec{P}, \vec{Q}$ 为根数 Ω, ω, i 的函数。

对任一时刻 t , (4.3)式给出了此时坐标和速度($\vec{r}, \dot{\vec{r}}$)值与轨道根数之间的关系, 并可互相推算; 在这里是只给出椭圆情况。具体计算过程已在第二章第六节中讲述。

若有摄动存在, 则要用(4.2)式解出 P 点的坐标和速度, 与(4.1)式解出的($\vec{r}, \dot{\vec{r}}$)有差别; 记为

$$\vec{r} + \Delta \vec{r}, \dot{\vec{r}} + \Delta \dot{\vec{r}}$$

在任一时刻 t , 按受摄方程解出的坐标和速度 $(\vec{r} + \Delta \vec{r}, \dot{\vec{r}} + \Delta \dot{\vec{r}})$ 称为受摄坐标和受摄速度。与无摄运动方程解出的 $(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ 之差: $\Delta \vec{r}$ 和 $\Delta \dot{\vec{r}}$, 分别称为坐标摄动和速度摄动。

按微分方程解法中的常数变异法原理, 受摄方程 (4.2) 式的解, 仍可表为无摄运动方程的解 (4.3) 式的形式, 只是积分常数 (或轨道根数) 不再是常数, 而是时间 t 的函数。(4.3) 就成为变量 $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ 同轨道根数 $(a, e, i, \Omega, \omega, M_0)$ 之间的变换。可用受摄坐标和受摄速度在某时刻 t 时的值, 具体算出此时相应的轨道根数值。这些根数值与初始时刻 t_0 时的值不同; t 时轨道根数的值对 t_0 时值的增量 $\Delta a, \Delta e, \dots$ 就称为**轨道根数摄动**。 t 时的轨道根数称为**吻切轨道根数**, 相应的轨道叫吻切道轨 (为椭圆时叫吻切椭圆)。这是因为天体在 t 时对吻切轨道的坐标和速度 $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ 值, 与实际轨道上的值相同。对初值为椭圆的情况, 各时刻 t 时的吻切椭圆构成一个单参数 t 的椭圆轨道族, 由于天体在任一时刻 t 时的坐标 $\vec{r}$ 和速度 $\dot{\vec{r}}$ 值与在 t 时吻切椭圆上的相同。因此天体在受摄运动中的实际轨道, 就是吻切椭圆族的**包络线**。

建立计算各种摄动的天体受摄运动方程及其解法, 就组成天体力学的一个重要分支——**摄动理论**。

第二节 正则形式的受摄运动方程

在直角坐标系中, 若 (4.2) 式中的摄动力 $\vec{F}$ 或摄动加速度 $\vec{W}$ 是梯度向量, 即存在数量函数 $R = R(x, y, z, t)$, 后面称为**摄动函数**, 有

$$\left. \begin{aligned} \vec{W} = \nabla R &= \left(\frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z} \right) \\ \vec{F} &= m \nabla R \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

则(4.2)式可化为正则方程组。就用直角坐标作为广义坐标 $q = (x, y, z)$, 相应的广义动量为 $p = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, 则取

$$H = H_0 - R = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\mu}{r} - R \quad (4.5)$$

(4.2)的第二式可写为:

$$\dot{q} = H_p, \quad \dot{p} = -H_q \quad (4.6)$$

如用球坐标 (r, ϕ, θ) 和相应的广义动量 $(\dot{r}, r^2 \cos^2 \theta \dot{\phi}, r^2 \dot{\theta})$ 作为新变量, 在第三章第七节中已说明它们是正则共轭变量, 而且哈密顿函数不变。即若记 $Q = (r, \phi, \theta)$, $P = (\dot{r}, r^2 \cos^2 \theta \dot{\phi}, r^2 \dot{\theta})$, 则受摄方程为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{Q} &= H_p, \quad \dot{P} = -H_q \\ H &= H_0 - R \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

当 $R = 0$ 时为无摄运动, 在第三章第七节已解出相应的哈密顿-雅可比方程(其中 q, p 为这里的 Q, P):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_0(Q, S_Q, t) = 0 \quad (4.8)$$

解为

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_3 \phi + S_1 + S_2 = S(Q, \alpha, t) \quad (4.9)$$

并由此得到无摄运动的解为:

$$P = \frac{\partial S}{\partial Q}, \quad \beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} \quad (4.10)$$

其中 α, β 为三维向量, 分量是积分常数, 且为正则根数。

在 $R \neq 0$ 时, 为受摄情况, α, β 应为时间 t 的函数; 我们可取 Q, α 的函数就是上面(4.8)式解(4.9)式的 $S(Q, \alpha, t)$, 根据第三章第四节定理三的推理 1 知,

$$P = \frac{\partial S}{\partial Q}, \quad -\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} \quad (4.11)$$

为正则变换，且乘子为1，余函数为 S_i ，但(4.11)式与原来的解(4.10)式只差 β 反号，即新正则共轭变量为前面的 $\alpha, -\beta$ 。新哈密顿函数

$$\overline{H} = H + S_i = H_0 - R - H_0 = -R$$

因此，用新变量表示的受摄方程应为：

$$\dot{\alpha} = R_\beta, \quad \dot{\beta} = -R_\alpha \quad (4.12)$$

此式有普遍意义，用正则根数表示的受摄方程是哈密顿函数等于摄动函数 R 的正则方程组。天体力学中常用到的受摄方程，很多是从它导出，故有些文献上称为受摄运动基本方程。

根据第三章第八节中介绍的几种正则共轭变量，从(4.12)式出发，可写出这些变量相应的受摄正则方程组：

1. 德洛勒变量： $q = (L, G, H), p = (l, g, h)$ 受摄方程为：

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= \overline{H}_p, \quad \dot{p} = -\overline{H}_q \\ \overline{H} &= R + \frac{\mu}{2L^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

2. 推广的德洛勒变量： $q' = (L', G', H'), p' = (l', g', h')$ ，方程形式相同， $\overline{H}$ 不变。

3. 邦加雷变量： $\overline{q} = (L_1, G_1, H_1), \overline{p} = (l_1, q_1, h_1)$ ，方程形式相同， $\overline{H}$ 不变。

对于引力作用的摄动力，因为是保守力，总是梯度向量，存在摄动函数。故用正则形式的受摄方程是可能的。

第三节 拉格朗日行星运动方程

在天体力学中，常用轨道根数直接作为基本变量，所得结果比

较直观。

现用 $a_1, a_2, \dots, a_6$ 分别表示轨道根数 $a, e, i, \Omega, \omega, M_0$, 则 a_m 为 α, β 的函数, 由第三章第七节所给出为:

$$\left. \begin{aligned} a &= -\frac{\mu}{2\alpha_1^2}, & \Omega &= \beta_3 \\ e &= \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu}}, & \omega &= \beta_2 \\ i &= \arccos \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, & M_0 &= n\beta_1 = \frac{(-2\alpha_1)^{3/2}}{\mu} \beta_1 \end{aligned} \right\} (4.14)$$

可根据(4.12)式用此变换成用 a_m 的受摄方程。

因(4.14)式表明 a_m 为 α, β 的函数, 且不显含 t , 则有:

$$\begin{aligned} \dot{a}_m &= \frac{\partial a_m}{\partial \alpha} \cdot \dot{\alpha} + \frac{\partial a_m}{\partial \beta} \cdot \dot{\beta} \\ &= \frac{\partial a_m}{\partial \alpha} \cdot R_\beta - \frac{\partial a_m}{\partial \beta} \cdot R_\alpha \end{aligned}$$

但基本变量用 a_m 后, R 也应表示为 a_m 的函数, 根据函数关系有:

$$R_\alpha = \sum_{s=1}^6 \frac{\partial R}{\partial a_s} \frac{\partial a_s}{\partial \alpha}, \quad R_\beta = \sum_{s=1}^6 \frac{\partial R}{\partial a_s} \frac{\partial a_s}{\partial \beta}$$

代入上式得

$$\begin{aligned} \dot{a}_m &= \sum_{s=1}^6 \frac{\partial R}{\partial a_s} \left[\frac{\partial a_m}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial a_s}{\partial \beta} - \frac{\partial a_m}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial a_s}{\partial \alpha} \right] \\ &= \sum_{s=1}^6 \frac{\partial R}{\partial a_s} \{a_m; a_s\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

其中 $\{a_m; a_s\}$ 即为 a_m, a_s 对于 α, β 的柏松括号, 与第三章第三节所给的定义一致, 用关系(4.14)式可以算出全部柏松括号 $\{a_m; a_s\}$ 。

根据柏松括号的性质知

$$\{a_m; a_m\} = 0, \quad \{a_s; a_m\} = -\{a_m; a_s\}$$

故在 $m, s = 1, 2, \dots, 6$ 时只要算出 15 个 $s > m$ 情况的 $\{a_m; a_s\}$ 就行了。

取 $m = 1$, 而 $a_1 = a$, 其中只含 α_1 , 因此

$$\{a_1, a_s\} = \frac{\partial a}{\partial \alpha_1} \frac{\partial a_s}{\partial \beta_1}$$

而 a_s 中只有 $a_0 = M_0$ 才含有 β_1 , 故只有

$$\{a_1; a_0\} = \frac{\partial a}{\partial \alpha_1} \frac{\partial M_0}{\partial \beta_1} = \frac{2}{na}$$

其余 $\{a_1; a_s\}$ 全为 0。

同理可算出其他括号为:

$$\{e; M_0\} = \frac{\partial e}{\partial \alpha_1} \frac{\partial M_0}{\partial \beta_1} = \frac{1-e^2}{na^2e}$$

$$\{e; \omega\} = \frac{\partial e}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \omega}{\partial \beta_2} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}$$

其余 $\{e; a_s\} = 0$ 。

$$\{i; \omega\} = \frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}}, \quad \{i; \Omega\} = -\frac{\csc i}{na^2\sqrt{1-e^2}}$$

其余 $\{i; a_s\} = 0$ 。

$$\{\Omega; i\} = \frac{\csc i}{na^2\sqrt{1-e^2}}$$

其余 $\{\Omega; a_s\} = 0$ 。

$$\{\omega; e\} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}, \quad \{\omega; i\} = -\frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}}$$

其余 $\{\omega; a_s\} = 0$ 。

$$\{M_0; a\} = -\frac{2}{na}, \quad \{M_0; e\} = -\frac{1-e^2}{na^2e}$$

把这些结果代入(4.15)式得:

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M_0} \\ \dot{e} &= \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial M_0} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \omega} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\csc i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Omega} &= \frac{\csc i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \dot{\omega} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \dot{M}_0 &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

这就是著名的拉格朗日行星运动方程，是拉格朗日在研究行星运动时首先在 1780 年导出。不仅对大行星，对小行星，彗星，卫星，人造地球卫星等都能应用。

对于摄动函数 R ，要表示为时间 t 的显函数后才能进行积分。而一般情况下，时间都隐含在近点角中，不管是平近点角 M ，偏近点角 E 或真近点角 f ，作为时间 t 的函数，都要同平均角速度 n 有关。即近点角中都隐含 n ，也就是 a 。在 (4.16) 式的最后一式中， R 要对 a 求偏导数，这里要对 R 中显含的 a (包括显含的 n) 求，也要对隐含在近点角内的 $a(n)$ 求，在具体讨论时不方便。

现在提出一种处理方法，可使得 R 对 a 的偏导数不管隐含在近点角内的 a 。记

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) + \frac{\partial R}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial a}$$

其中带括号 () 的是不考虑隐含在近点角内的 a ，第二项为只考虑 R 中隐含在近点角中的 a 。

利用关系

$$M = M_0 + nt, \quad n^2 a^3 = \mu$$

上式可化为

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) + \frac{\partial R}{\partial M} t \frac{\partial n}{\partial a} = \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) + \frac{\partial R}{\partial M_0} t \frac{\partial n}{\partial a}$$

代入 (4.16) 式中的 $\dot{M}_0$ 式，并利用 $\dot{a}$ 式子可得：

$$\dot{M}_0 = -\frac{2}{na} \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M_0} t \frac{\partial n}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}$$

$$= -\frac{2}{na} \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) - \dot{a} t \frac{\partial n}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \quad (4.17)$$

现在定义 M_0' 为:

$$\begin{aligned} \dot{M}_0' &= \dot{M}_0 + \dot{a} t \frac{\partial n}{\partial a} \\ &= -\frac{2}{na} \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \end{aligned} \quad (4.18)$$

则由关系

$$\dot{n} = \frac{\partial n}{\partial a} \dot{a}$$

有

$$\dot{M}_0' = \dot{M}_0 + \dot{n} t = \dot{M}_0 + \frac{d}{dt}(nt) - n$$

即

$$\dot{M}_0 + \frac{d}{dt}(nt) = \dot{M}_0' + n$$

乘 dt 后对 t 积分可得平近点角为:

$$M = M_0 + nt = M_0' + \int n dt \quad (4.19)$$

这就表明,若用 M_0' 代替 M_0 ,则可用(4.18)式代替(4.16)式中的 $\dot{M}_0$ 式。只要求出 M_0' 后,要用(4.19)式计算平近点角 M ,由(4.19)还可看出

$$\frac{\partial R}{\partial M_0} = \frac{\partial R}{\partial M_0'}$$

即(4.16)式中的 $\dot{a}$ 式,其中对 M_0 的偏导数可以换为对 M_0' 的偏导数。这样只是把轨道根数 M_0 换为 M_0' ,相应的(4.18)式中, R 对 a 求偏导数时,不管近点角中隐含的 a ,为符号简单起见,以后仍用 M_0 表示 M_0' ,相应的(4.18)式中 R 对 a 的偏导数也去掉括号,即仍为(4.16)式,但理解为不管近点角中的 a ,可是在求出 M_0 后,要用

$$M = M_0 + \int n dt \quad (4.20)$$

来计算平近点角 M 。

在一些天体运动中,常用 p 代替 a (如抛物线, 双曲线轨道作为中间轨道); 用 M 代替 M_0 (如化为德洛勒变量); 用 $\tilde{\omega} = \omega + \Omega$ 代替 ω , 用 $\varepsilon_0 = \omega + \Omega + M_0$ 代替 M_0 等。利用有关函数关系可求出:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= (1 - e^2) \dot{a} - 2ae \dot{e} \\ &= \frac{2(1 - e^2)}{na} \frac{\partial R}{\partial M_0} - 2ae \left[\frac{1 - e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial M_0} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega} \right] \\ &= 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\partial R}{\partial \omega} \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\dot{M} = \dot{M}_0 + n = n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1 - e^2}{na^2 e} \quad (4.22)$$

在用 $\tilde{\omega}, \varepsilon_0$ 代替 ω, M_0 时, R 也要换为

$$R(a, e, i, \Omega, \omega, M_0) = \bar{R}(a, e, i, \Omega, \tilde{\omega}, \varepsilon_0)$$

并有:

$$\frac{\partial R}{\partial M_0} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \varepsilon_0}, \quad \frac{\partial R}{\partial \omega} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Omega} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \varepsilon_0}$$

以及

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\omega}} &= \dot{\omega} + \dot{\Omega} \\ \dot{\varepsilon}_0 &= \dot{\Omega} + \dot{\omega} + \dot{M}_0 \end{aligned}$$

则(4.16)式经过变换后可化为(为符号简单起见, 变换后的 $\bar{R}$ 仍记为 R):

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0} \\ \dot{e} &= -\frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} - \frac{e\sqrt{1 - e^2}}{na^2(1 + \sqrt{1 + e^2})} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0} \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}
\frac{di}{dt} &= -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \\
&\quad - \frac{\operatorname{tg} i/2}{na^2\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0} \right) \\
\dot{\Omega} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \\
\dot{\omega} &= \frac{\operatorname{tg} i/2}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} \\
\dot{\varepsilon}_0 &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg} i/2}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \\
&\quad + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})} \frac{\partial R}{\partial e}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

在(4.16)或(4.23)中,可看出一个特点:六个轨道根数可分为两组, (a, e, i) 为一组; (Ω, ω, M_0) 或 $(\Omega, \tilde{\omega}, \varepsilon_0)$ 为另一组。第一组方程中只含有 R 对第二组的偏导数,第二组根数的方程中,只含有 R 对第一组根数的偏导数。如果同正则根数 α, β 比较,也有同样情况。 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 只同 a, e, i 有关。所以上述关系是正则根数所满足的正则方程组特点的反映。 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 与 $(\Omega, \dot{\omega}, M_0)$ 或 $(\Omega, \tilde{\omega}, \varepsilon_0)$ 都是角度,也称为角变量; $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 或 (a, e, i) 相应称为作用变量,虽然 i 也是角度。

第四节 消除奇点后的受摄方程

在拉格朗日行星运动方程(4.16)或(4.23)中,可明显看出当 $e \rightarrow 0, i \rightarrow 0$ 时,方程右端会出现奇点。但在太阳系天体中,有很多天体轨道都是小 e 和小 i ,这就给理论上和实用上都产生困难。在

摄动理论中就称为小偏心率和小倾角的困难。但是在直角坐标的受摄方程中,不存在这种奇点。故奇点 $e=0, i=0$ 不是本性奇点,是研究方法带来的。另外,从方程直观上也可看出: $e \rightarrow 0$ 时, $\dot{\omega}$ 及 $\dot{M}_0$ 都有分母为 0 的项,可能到无穷大或不定,在几何上可以理解。因为 $e \rightarrow 0$ 时,轨道趋于圆形,近点方向是不定,相应用近点定义的量 (ω, M_0) 也成为不定。同样, $i \rightarrow 0$ 时轨道面同坐标面(如黄道)的交线不定,故以交线或升交点定义的量 (ω, Ω) 也成为不定。在采用根数 $\tilde{\omega}, \varepsilon_0$ 后,在 $\dot{e}, \dot{\varepsilon}_0$ 方程中已有部份项不再出现 e 为分母,但未消除尽。

为了消除这些奇点,必须对根数作变换,采用新的基本变量。根据多年的研究,用下面一些办法进行。

为消除 $e=0$ 这个奇点,采用新变量 h, k 代替 $e, \tilde{\omega}$, 定义为:

$$\left. \begin{aligned} h &= e \sin \tilde{\omega}, & k &= e \cos \tilde{\omega} \\ \text{即 } e &= \sqrt{h^2 + k^2}, & \sin \tilde{\omega} &= \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}, & \cos \tilde{\omega} &= \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

在 R 中的 $e, \tilde{\omega}$ 也应表示为 h, k ; 相应的偏导数也应改为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial e} &= \frac{\partial R}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial e} + \frac{\partial R}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial e} \\ &= \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \frac{\partial R}{\partial h} + \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \frac{\partial R}{\partial k} \\ \frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} &= \frac{\partial R}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{\partial R}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \tilde{\omega}} = k \frac{\partial R}{\partial h} - h \frac{\partial R}{\partial k} \end{aligned}$$

另外,由

$$\begin{aligned} \dot{h} &= \dot{e} \sin \tilde{\omega} + e \cos \tilde{\omega} \dot{\tilde{\omega}} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \dot{e} + k \dot{\tilde{\omega}} \\ \dot{k} &= \dot{e} \cos \tilde{\omega} - e \sin \tilde{\omega} \dot{\tilde{\omega}} = \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \dot{e} - h \dot{\tilde{\omega}} \end{aligned}$$

可导出下面结果：

$$\begin{aligned}
 \dot{h} &= \frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2} \left[\frac{\partial R}{\partial k} - \frac{h}{\sqrt{1-h^2-k^2}+1} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0} \right] \\
 &\quad + \frac{k \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-h^2-k^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \\
 \dot{k} &= -\frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2} \left[\frac{\partial R}{\partial h} + \frac{k}{1+\sqrt{1-h^2-k^2}} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0} \right] \\
 &\quad - \frac{h \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-h^2-k^2}} \frac{\partial R}{\partial i}
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

在式中, $\theta=0$ 不再是奇点, 但 $i=0$ 及 $i=\pi$ 还是奇点, 还需要同时解决。

为了消除 $i=0$ 的奇点(因在太阳系自然天体轨道中, 很少有 $i \rightarrow \pi$ 的情况), 常用 p, q 代替 i, Ω ; 定义为

$$\left. \begin{aligned}
 p &= \sin i \sin \Omega, \quad q = \sin i \cos \Omega \\
 \sin i &= \sqrt{p^2 + q^2}, \quad \cos i = \sqrt{1 - p^2 - q^2} \\
 \sin \Omega &= \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \quad \cos \Omega = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}
 \end{aligned} \right\} \tag{4.26}$$

相应地有

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R}{\partial i} &= \frac{p \sqrt{1-p^2-q^2}}{\sqrt{p^2+q^2}} \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{q \sqrt{1-p^2-q^2}}{\sqrt{p^2+q^2}} \frac{\partial R}{\partial q} \\
 \frac{\partial R}{\partial \Omega} &= q \frac{\partial R}{\partial p} - p \frac{\partial R}{\partial q} \\
 \dot{p} &= q \dot{\Omega} + \frac{p \sqrt{1-p^2-q^2}}{\sqrt{p^2+q^2}} \frac{di}{dt} \\
 \dot{q} &= -p \dot{\Omega} + \frac{q \sqrt{1-p^2-q^2}}{\sqrt{p^2+q^2}} \frac{di}{dt}
 \end{aligned}$$

于是可导出:

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= \frac{\sqrt{1-p^2-q^2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \left[\frac{\partial R}{\partial q} - \frac{p}{1+\sqrt{1-p^2-q^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0} \right) \right] \\ \dot{q} &= - \frac{\sqrt{1-p^2-q^2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \left[\frac{\partial R}{\partial p} + \frac{q}{\sqrt{1-p^2-q^2}+1} \left(\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

如果同时消除 $e=0, i=0$ 的奇点, 需要将(4.26)式中的 i, Ω 变换为 p, q , 相应的 R 对 i, Ω 偏导数也变为对 p, q 的偏导数; 在(4.27)式中也是一样, 把所有 $e, \tilde{\omega}$ 都变换为 h, k 。

但是 $i=\pi$ 的奇点仍然存在。特别是人造卫星中, 各种情况的 e, i 都会出现, 也有 $i \sim \pi$ 的轨道。故经很多人研究后, 建议采用能全部消除 $e=0, i=0, i=\pi$ 奇点的所谓无奇点变量。例如下面的一组 q_i 就是, 它们同轨道根数之间的关系为:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= p^{1/4} \cos \frac{i}{2} \cos \frac{1}{2}(\Omega + \omega + M) \\ q_2 &= p^{1/4} \sin \frac{i}{2} \cos \frac{1}{2}(\Omega + \omega + M) \\ q_3 &= p^{1/4} \sin \frac{i}{2} \sin \frac{1}{2}(\Omega + \omega + M) \\ q_4 &= p^{1/4} \cos \frac{i}{2} \sin \frac{1}{2}(\Omega + \omega + M) \\ q_5 &= e \cos M, \quad q_6 = -e \sin M \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

其中 $p=a(1-e^2)$, M 即平近点角; $\Omega + \omega + M$ 为平黄经, 即推广的德洛勒变量中的 l' 。

用 q_i 作基本变量, 相应的运动方程不再出现对应于 $e=0, i=0, i=\pi$ 的奇点。但用这组变量后, 又会增加其他麻烦, 故尚未普遍采用。总之, 奇点问题是受摄方程中的一个难题, 至今还解决得不够好。

第五节 摄动导数

上面得到的正则形式受摄方程和拉格朗日行星运动方程中,都要用到摄动函数 R ;这就要求摄动力或摄动加速度是梯度向量。对于引力而言,在牛顿力学中是保守力,一般存在势函数或位函数。但在一些天体运动中,会受到一些耗散性摄动力,例如介质阻尼等。因此需要导出一些不存在摄动函数时的受摄方程,以便更广泛应用。后面给出的受摄方程,是用摄动加速度 $\vec{W}$ 的分量表示。但在推导过程中,最好用一种特殊的微商运算讲述更为清楚,就称它为**摄动导数**。它不仅在这里有用,也可用于其他问题讨论,故在此作一些较详细介绍。

设在无摄运动中,天体运动方程为

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{W}_0 = -\frac{\mu \vec{r}}{r^3} \quad (4.29)$$

其中用分量即

$$\begin{aligned} \vec{W}_0 &= (X_0, Y_0, Z_0) \\ &= \left(-\frac{\mu x}{r^3}, -\frac{\mu y}{r^3}, -\frac{\mu z}{r^3} \right) \end{aligned}$$

存在摄动时,运动方程为:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{W}_0 + \vec{W} \quad (4.30)$$

其中摄动加速度

$$\vec{W} = (X, Y, Z)$$

各向量的分量可对任意的参考架,只要式中用统一参考架就行了。

按照微分方程解法的常数变异法原理,无摄方程(4.29)式的解(4.3)式也是受摄方程(4.30)式的解,只是其中的积分常数(轨道根数)要看作变量。事实上,就是把原无摄运动方程解的积分常

数作为受摄运动的新变量, (4.3)式就是旧变量 $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ 同新变量 $(a, e, i, \Omega, \omega, M_0)$ 之间的变换关系。在第四章第一节中已介绍了吻切轨道(椭圆)概念, 任何时刻 t 时的坐标 $\vec{r}$ 和速度 $\dot{\vec{r}}$ 值与此时吻切轨道根数对应, 它们之间的关系就是(4.3)式。

既然(4.3)式对无摄运动和受摄运动都成立, 则由此六个关系式组成的任何函数关系(不能对时间 t 求微商)对无摄和受摄运动也都成立。这是一个重要结果, 有广泛意义, 故用定理表达。

定理一 由(4.3)式的六个关系式组成的任何函数关系(不能对 t 求微商)式:

$$F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \sigma, t) = 0 \quad (4.31)$$

对无摄运动和有摄运动都成立, 其中 σ 为六维向量, 它的分量分别代表六个轨道根数。

由于(4.31)式对无摄运动成立, 故按无摄运动求微商得:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= F_t + F_{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + F_{\dot{\vec{r}}} \cdot \ddot{\vec{r}} = F_t + F_{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + F_{\dot{\vec{r}}} \cdot \vec{W}_0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

其中 $F_{\vec{r}} = (F_x, F_y, F_z)$, $F_{\dot{\vec{r}}} = (F_{\dot{x}}, F_{\dot{y}}, F_{\dot{z}})$ 。

但(4.31)式又对受摄运动成立, 按受摄运动求微商可得:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= F_t + F_{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + F_{\dot{\vec{r}}} \cdot \ddot{\vec{r}} + F_{\sigma} \cdot \dot{\sigma} \\ &= F_t + F_{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + F_{\dot{\vec{r}}} \cdot (\vec{W}_0 + \vec{W}) + F_{\sigma} \cdot \dot{\sigma} = 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

由于与(4.32)式都成立, 相减可得

$$F_{\dot{\vec{r}}} \cdot \vec{W} + F_{\sigma} \cdot \dot{\sigma} = 0 \quad (4.34)$$

这是一个重要结果, 由此引出摄动导数。

定义 对于某天体的坐标, 速度, 轨道根数和时间的任何函数 $F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \sigma, t)$, 若按(4.34)式运算作为 F 对时间 t 的导数, 称为

F 对 t 的摄动导数, 并记为:

$$\left(\frac{dF}{dt}\right) = F_{\dot{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + F_{\dot{\sigma}} \cdot \dot{\sigma} \quad (4.35)$$

这种求异数的运算是无论无摄运动, 只考虑摄动。即运算时对显含时间, 坐标都不管, 微商后出现的加速度, 用摄动加速度代替。

定理二 用 (4.3) 式组成的任何函数 (不对时间 t 微商) $F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \sigma, t) = 0$, 它对时间 t 的导数与摄动导数相等, 即有关系:

$$\frac{dF}{dt} = \left(\frac{dF}{dt}\right) = 0 \quad (4.36)$$

证 由 (4.33) 式即得

$$\frac{dF}{dt} = F_t + F_{\dot{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + F_{\dot{\sigma}} \cdot \dot{\vec{W}}_0 + \left(\frac{dF}{dt}\right) = 0$$

利用 (4.32) 式即得 (4.36) 式, 故定理成立。

为区别起见, 在无摄运动中的导数 (4.32) 式记为

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) = F_t + F_{\dot{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + F_{\dot{\sigma}} \cdot \dot{\vec{W}}_0$$

因此有

$$\frac{dF}{dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) + \left(\frac{dF}{dt}\right) \quad (4.37)$$

在二体问题中的所有关系式, 一般都可从 (4.3) 式导出, 因此在受摄运动中仍然成立, 对时间 t 求导数时, 都可用摄动导数运算, 可使运算大大简化。

例如在受摄运动中求各近点角对时间的摄动导数, 可用有关二体问题公式取摄动导数可得

$$\text{由} \quad M = nt + M_0$$

得

$$\left(\frac{dM}{dt}\right) = \dot{n}t + \dot{M}_0$$

由开普勒方程

$$E - e \sin E = M$$

可得

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE}{dt} \right) &= \frac{a}{r} \left(\frac{dM}{dt} \right) + \frac{ae}{r} \sin E \\ &= \frac{a}{r} (\dot{n}t + \dot{M}_0) + \frac{ae}{r} \sin E \end{aligned} \quad (4.38)$$

又由

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos f$$

可得

$$\frac{\dot{p}}{r} = \dot{e} \cos f - e \sin f \left(\frac{df}{dt} \right)$$

即

$$\left(\frac{df}{dt} \right) = \frac{\dot{e}}{e} \cot f - \frac{\dot{p}}{re \sin f} \quad (4.39)$$

如果在无摄运动中, 应有

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t} \right) = \frac{an}{r}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{p \dot{r}}{r^2 e \sin f}$$

可求出受摄运动的

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \left(\frac{dE}{dt} \right) + \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right) = \frac{a}{r} (n + \dot{n}t + M_0) + \frac{ae}{r} \sin E \\ \frac{df}{dt} &= \left(\frac{df}{dt} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{\dot{e}}{e} \cot f - \frac{\dot{p}}{re \sin f} + \frac{\dot{r}p}{r^2 e \sin f} \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

由此可从函数

$$F_1 = E - e \sin E - M$$

$$F_2 = \frac{p}{r} - 1 - e \cos f$$

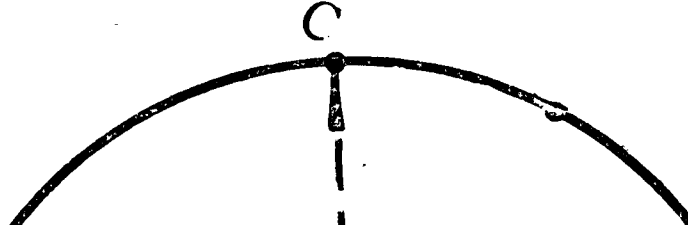
证明关系:

$$\frac{dF_1}{dt} = \left(\frac{dF_1}{dt} \right), \quad \frac{dF_2}{dt} = \left(\frac{dF_2}{dt} \right)$$

第六节 用摄动加速度分量表示的受摄方程

利用摄动导数可清楚简便地导出非保守摄动力情况的受摄方程。

对于天体的受摄运动,由于径向摄动力很多,故常把向径方向作为参考架之一。用得较多的是以轨道面上径向(与 $\vec{r}$ 一致)和横向(垂直于 $\vec{r}$ 并与天体运动方向一致)以及法向(轨道面法线方向,与前两方向成右手系)作为参考架方向,即图 4.1 中 $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ 。



设 XY 大圆为坐标面 (对行星是黄道面), $O-XYZ$ 为坐标架; $\overrightarrow{OA}$ 为天体向径方向, $\overrightarrow{ON}$ 为轨道升交点方向; 则 $NA = u = f + \omega$ 。 $\overrightarrow{OB}$ 指向 $u + 90^\circ$ 的方向; $\overrightarrow{OC}$ 即轨道面法线方向。

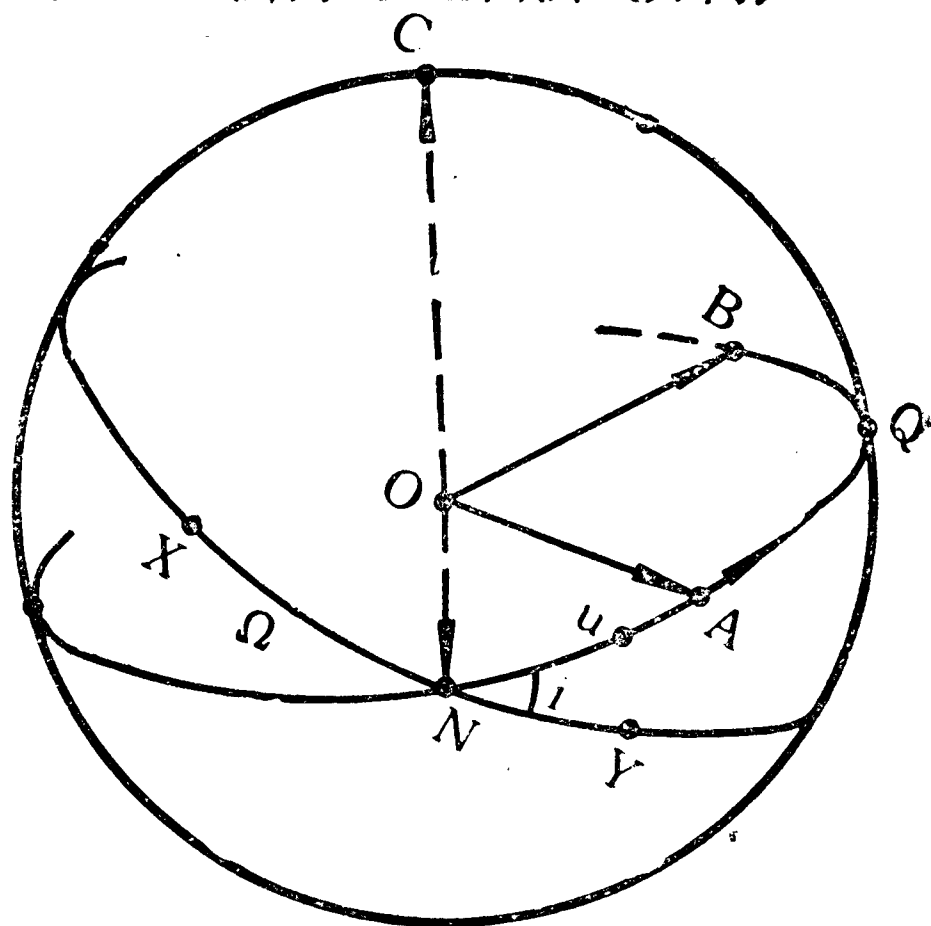


图 4.1

现在利用二体问题的已知关系式推导出以摄动加速度 $\vec{W}$ 在 $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ 上的分量 S, T, W 表达的受摄方程。

首先利用活力公式 (只含轨道数 a):

$$v^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

取摄动导数得:

$$2 \vec{r} \cdot \vec{W} = \frac{\mu \dot{a}}{a^2}$$

则

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\mu} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{W} \quad (4.41)$$

在参考架 $O-ABC$ 中

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} v \cos \alpha \\ v \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 α 为向径同切线正方向间交角, 参看(2.115)及(2.116)式可得

$$v \cos \alpha = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin f, \quad v \sin \alpha = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos f) \quad (4.42)$$

代入(4.41)式即得

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2a^2}{\sqrt{\mu p}} [e \sin f S + (1 + e \cos f) T] \\ &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left(e \sin f S + \frac{p}{r} T \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

由面积积分知

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{h}} = h \hat{h}$$

其中 $\hat{h}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$ 上的单位向量。取摄动导数得:

$$\vec{r} \times \vec{W} = \dot{h} \hat{h} + h \dot{\hat{h}} \quad (4.44)$$

在 $O-XYZ$ 参考架中有

$$\hat{h} = \begin{pmatrix} \sin \Omega \sin i \\ -\cos \Omega \sin i \\ \cos i \end{pmatrix}$$

$$\text{则} \quad \dot{\hat{h}} = \begin{pmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \sin i \dot{\Omega} + \begin{pmatrix} \sin \Omega \cos i \\ -\cos \Omega \cos i \\ -\sin i \end{pmatrix} \frac{di}{dt}$$

$$= \hat{n} \sin i \dot{\Omega} + \hat{q} \frac{di}{dt}$$

其中 $\hat{n}$, $\hat{q}$ 分别为图 4.1 中 $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OQ'}$ 方向的单位向量。在参考架 $O-ABC$ 中有

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \cos u \\ -\sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{q} = \begin{pmatrix} \sin u \\ -\cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

代入(4.44)式即得

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -rW \\ -rT \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \dot{p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{\mu p} \begin{pmatrix} \cos u \sin i \\ -\sin u \sin i \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\Omega} \\ + \sqrt{\mu p} \begin{pmatrix} -\sin u \\ -\cos u \\ 0 \end{pmatrix} \frac{di}{dt} \quad (4.45)$$

即可求出:

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} rT \\ \dot{\Omega} &= \frac{r \sin u}{\sqrt{\mu p} \sin i} W \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r \cos u}{\sqrt{\mu p}} W \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

(4.45)式还可用一些其他方法导出。这里提出两种, 都是能广泛应用的方法。

一是向量旋转法。设向量 $\vec{r}$ 绕一轴 $\vec{e}$ 旋转一微小角度 $\Delta\varphi$, $\vec{r}$ 相应的增量为 $\Delta\vec{r}$, 容易得到关系

$$\Delta\vec{r} = \Delta\varphi (\hat{e} \times \vec{r})$$

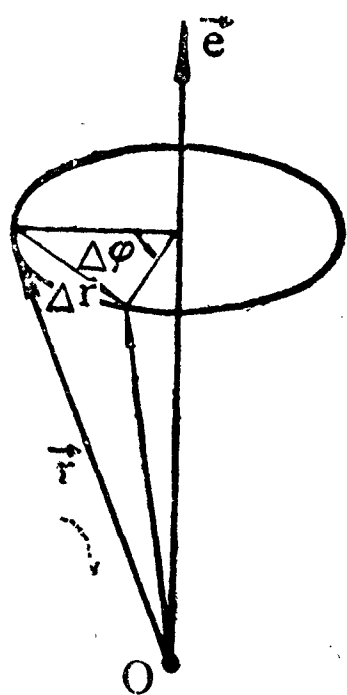


图 4.2

其中 $\hat{e}$ 为 $\vec{e}$ 方向的单位向量(见图4.2)。
同除以 Δt 后,取 $\Delta t \rightarrow 0$ 极限得

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\varphi} (\hat{e} \times \vec{r}) \quad (4.47)$$

现用此式讨论 $\dot{\hat{h}}$ 。向量 $\hat{h}$ 的变化为转动, 不管怎样转都可分解为围绕空间三个不共面轴的转动。现取空间三个轴为 $\vec{ON}$, $\vec{OZ}$ 和 $\vec{OC}$, 而绕此三轴转动的角速率分别为 di/dt , $\dot{\Omega}$ 及 $\dot{u}$ (见图4.1),

由此可得:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{h}} &= \dot{u} (\hat{h} \times \hat{h}) + \frac{di}{dt} (\hat{n} \times \hat{h}) + \dot{\Omega} (\hat{z} \times \hat{h}) \\ &= 0 + \frac{di}{dt} \hat{q} + \dot{\Omega} \sin i \hat{n} \end{aligned}$$

代入(4.44)式后,即可求出(4.45)式。

另一种方法是用第二章讲过的旋转矩阵。以 $\hat{h}$ 在 $O-XYZ$ 标架中的分量求导数, 然后用旋转矩阵化为以 $O-ABC$ 标架的分量, 即可得同样结果。这是一个很好的练习。

如不用 p 作基本变量, 可由 $p = a(1 - e^2)$ 求出

$$\dot{e} = \frac{(1 - e^2)a - p}{2ae}$$

然后以(4.43), (4.46)式中的 $\dot{a}$, $\dot{p}$ 代入可得

$$\dot{e} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} [\sin f S + (\cos f + \cos E) T] \quad (4.48)$$

求 $\dot{\omega}$ 和 $\dot{M}_0$ 较繁。先把二体问题的解写为

$$\vec{r} = r \cos f \vec{P} + r \sin f \vec{Q}$$

$$\text{其中 } \vec{P} = \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i \\ \sin \omega \sin i \end{pmatrix}$$

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i \\ -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i \\ \cos \omega \sin i \end{pmatrix}$$

写出 $\vec{r}$ 的 x, y, z 三个分量式子后,又可组合成:

$$x \cos \Omega + y \sin \Omega = r \cos(f + \omega) \quad (4.49)$$

$$-x \sin \Omega + y \cos \Omega = r \cos i \sin(f + \omega) \quad (4.50)$$

对(4.49)式取摄动导数,并利用(4.50)式得:

$$\begin{aligned} -r \sin(f + \omega) \left[\left(\frac{df}{dt} \right) + \dot{\omega} \right] &= (-x \sin \Omega + y \cos \Omega) \dot{\Omega} \\ &= r \cos i \sin(f + \omega) \dot{\Omega} \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad \left(\frac{df}{dt} \right) + \dot{\omega} = -\cos i \dot{\Omega} \quad (4.51)$$

用(4.39)式及(4.46), (4.48)式中的 $\dot{p}$ 和 $\dot{e}$ 结果得:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\frac{\cos f}{e} S + \frac{\sin f}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) T \right] \\ &\quad - \frac{r \cos u \cos i}{\sqrt{\mu p} \sin i} W \end{aligned} \quad (4.52)$$

对 $\dot{M}_0$ 只能用开普勒方程

$$E - e \sin E = nt + M_0$$

取摄动导数可得:

$$\dot{n} t + \dot{M}_0 = \frac{r}{a} \left(\frac{dE}{dt} \right) - \dot{e} \sin E \quad (4.53)$$

而由第三节中 M_0' 的定义可知,上式左端就是 $\dot{M}'$ 。

再由

$$r = a(1 - e \cos E)$$

取摄动导数可求出

$$\left(\frac{dE}{dt} \right) = \frac{1}{ae \sin E} \left[a \dot{e} \cos E - \frac{r}{a} \dot{a} \right]$$

代入(4.53)式, 并以 $\dot{a}$, $\dot{e}$ 的结果代入可得

$$\begin{aligned}\dot{M}_0' &= \frac{1-e^2}{nae \sin f} [\cos f \sin f S + \cos f (\cos f + \cos E) T] \\ &\quad - \frac{2r}{na^2 e \sin f} \left(S e \sin f + \frac{p}{r} T \right) \\ &= \left(\frac{1-e^2}{nae} \cos f - \frac{2r}{na^2} \right) S \\ &\quad - \frac{1-e^2}{nae} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin f T\end{aligned}\quad (4.53)$$

正如在第三节中已说明, 直接用 M_0' 作轨道根数更方便。下面统一写出, M_0' 仍记为 M_0 。

$$\left. \begin{aligned}\dot{a} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[e \sin f S + \frac{p}{r} T \right] \\ \dot{e} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} [\sin f S + (\cos f + \cos E) T] \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r \cos u}{na^2 \sqrt{1-e^2}} W \\ \dot{\Omega} &= \frac{r \sin u}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} W \\ \dot{\omega} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[-\cos f S + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin f T \right] \\ &\quad - \frac{r \operatorname{ctg} i \sin u}{na^2 \sqrt{1-e^2}} W \\ \dot{M}_0 &= \left(\frac{1-e^2}{nae} \cos f - \frac{2r}{na^2} \right) S \\ &\quad - \frac{1-e^2}{nae} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin f T\end{aligned} \right\} \quad (4.54)$$

这就是以摄动加速度分量表示的天体受摄运动方程, 最初是由牛顿提出方案, 后由拉普拉斯等完成, 故有些文献中称为牛顿方程。

若把 $\vec{W}$ 在标架 $O-XYZ$ 中的分量记为 (X, Y, Z) , 在 $\vec{W}$ 为梯

度向量时即为 $\vec{W} = \nabla R$, R 为摄动函数。利用旋转矩阵也可以求出 (X, Y, Z) 和 (S, T, W) 之间的相互关系。由此也可将(4.54)式右端的摄动加速度分量化为 X, Y, Z ; 再进一步针对 $\vec{W}$ 为梯度向量时, 把 $(X, Y, Z) = (R_x, R_y, R_z)$ 化为 R 对轨道根数的偏导数, 并可进一步导出拉格朗日方程(4.16)式。反之, 也可以从(4.16)式导出(4.54)式。这表明两种受摄方程实质上是等价的。在 $\vec{W}$ 为梯度向量时, 同样可采用(4.54)式。

有时采用轨道面上的切线方向和内法线方向作参考架, 与 $\vec{OC}$ 方向一起仍组成右手系。 $\vec{W}$ 在此标架上的分量记为 U, N, W 。这里的 W 与前面相同。记向径和切线正方向间的交角为 α , 可得关系:

$$\left. \begin{aligned} S &= U \cos \alpha - N \sin \alpha \\ T &= U \sin \alpha + N \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (4.55)$$

根据第二章的(2.115), (2.116)式可知

$$\cos \alpha = \frac{e \sin f}{\sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{1 + e \cos f}{\sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}}$$

代入(4.55)式后, 再代入(4.54)式, 即可得用摄动加速度分量 U, N, W 表示的受摄方程:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2\sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}}{n\sqrt{1 - e^2}} U \\ \dot{e} &= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na} \frac{2(\cos f + e)U - \sqrt{1 - e^2} \sin EN}{\sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r \cos u}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} W \\ \dot{\Omega} &= \frac{r \sin u}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i} W \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= \frac{\sqrt{1-e^2} [2 \sin f U + (\cos E + e) N]}{nae\sqrt{1+2e \cos f + e^2}} \\ &\quad - \frac{r \cot i \sin u}{na^2\sqrt{1-e^2}} W \\ \dot{M}_0 &= \frac{1-e^2}{nae\sqrt{1+2e \cos f + e^2}} \left[-2 \sin f \left(1 + \frac{e^2 r}{p}\right) U \right. \\ &\quad \left. + (e - \cos E) N \right]\end{aligned}\tag{4.56}$$

对于沿切向的摄动力,用此式更简便。

第七节 天体力学中常见的摄动力

在天体运动过程中,若以二体问题轨道为无摄运动,则会受到很多种摄动力。以人造地球卫星为例。以地球质量集中于地球质心对卫星的引力作为中心力,人造卫星在中心力作用下的运动为无摄运动(二体问题)。此外,还受到下列各种摄动力:日月行星对人造卫星的引力产生的摄动叫日月行星摄动;大气阻力叫阻尼摄动(耗散性);地球非球对称引起的摄动叫形状摄动;太阳光的压产生光压摄动,有时卫星进入地球影中,出现光压摄动的地影效应;地球流体和固体部分的潮汐对卫星轨道的影响叫潮汐摄动;地球电磁场对卫星轨道的影响叫电磁摄动;采用广义相对论或其他新引力理论会出现引力摄动,只准到后牛顿项时,相应叫后牛顿摄动。此外在有些课还要考虑电离层折射,地壳板块移动,地面反射的辐射,日冕对电磁波的折射等产生的摄动。这里只对几种起重大作用的常见摄动简单分析。

1. 其他天体的引力摄动。以行星为例,太阳和所讨论行星的相互引力为中心力,行星 P 在中心力下的运动方程为

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{G(M+m)}{r^3} \vec{r} = 0 \tag{4.57}$$

其中 $M, m, G, \vec{r}$ 的意义同第二章。另一个行星 P_i 对太阳和行星 P 也有引力。设 $m_i, \vec{r}_i, \vec{\Delta}_i$ 分别表示 P_i 的质量, 太阳到 P_i 的距离向量和 PP_i ; 则 P_i 对 P 及太阳引力产生的加速度为

$$Gm_i \frac{\vec{\Delta}_i}{\Delta_i^3}, \quad Gm_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}$$

由此产生的 P 相对太阳的加速度为

$$Gm_i \left(\frac{\vec{\Delta}_i}{\Delta_i^3} - \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right) = \vec{W}_i \quad (4.58)$$

这就是 P_i 的引力产生的摄动加速度, 实际上是对 P 点运动的引潮加速度。

若产生摄动的行星不只一个, 设为 k 个, 产生的摄动加速度为各自的向量和, 故 P 的受摄方程应为

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{G(M+m)}{r^3} \vec{r} = \sum_{i=1}^k Gm_i \left(\frac{\vec{\Delta}_i}{\Delta_i^3} - \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right) \quad (4.59)$$

容易看出, $\vec{\Delta}_i = \vec{r}_i - \vec{r}$, 右端向量为梯度向量, 相应的摄动函数为:

$$R = \sum_{i=1}^k Gm_i \left(\frac{1}{\Delta_i} - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}}{r_i^3} \right) \quad (4.60)$$

(4.60) 式即可写为:

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{G(M+m)}{r^3} \vec{r} = \nabla R \quad (4.61)$$

用受摄方程(4.59)或(4.61)讨论的力学模型即为多体问题。这种摄动又称为多体引力摄动, 是最普遍存在的一种摄动。

2. 阻尼摄动。天体在介质中运行时, 受到阻力。特别是超声速运动中, 波阻力占主要地位。根据大量气体动力学实验, 一般天体运动中阻力产生的加速度用下列式子表达

$$\vec{W} = -\frac{1}{2} SC \rho v^2 \hat{T} \quad (4.62)$$

式中 S 为天体沿切线方向的最大截面积, ρ 为天体所在处的介质

密度, v 为天体运动速度(相对于介质), $\hat{T}$ 为运动切线方向单位向量; C 为阻尼系数, 在人造卫星和很多天体情况都很接近于 2, 故常直接取为

$$\vec{W} = -A\rho v^2 \hat{T} \quad (4.63)$$

A 为常数。

摄动加速度(4.63)式的分量 $U = W = 0$, 只有 T , 大小为 $-A\rho v^2$ 。用它代入(4.56)式可得

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{Ana^2}{(1-e^2)^{3/2}} \rho (1+2e\cos f+e^2)^{3/2} \\ \dot{e} &= -\frac{Ana(\cos f+e)}{\sqrt{1-e^2}} \sqrt{1+2e\cos f+e^2} \rho \\ \frac{di}{dt} &= \dot{\Omega} = 0 \\ \dot{\omega} &= -\frac{Ana\sin f}{e\sqrt{1-e^2}} \rho \sqrt{1+2e\cos f+e^2} \\ \dot{M}_0 &= \frac{Anr^2\sin f}{ae(1-e^2)} \rho (1+2e\cos f+e^2)^{3/2} \end{aligned} \right\} \quad (4.64)$$

由此直接可看出, 阻尼摄动对轨道平面没有影响; 对 ω, M_0 两个根数主要是周期影响。而对 a, e 两根数则有长期影响(随时间增强)。因可看出永远有

$$\dot{a} < 0$$

即轨道不断变小; 而且在近点附近 $\dot{e} < 0$, 但介质密度 ρ 一般在近点最大(如地球大气), 是产生摄动的主要部分; 因而运动一周的总摄动是 $\dot{e} < 0$, 即轨道不断变圆。人造卫星运动正是这种情况, 在大气阻力作用下, 轨道不断变小, 即高度降低; 又不断变圆, 最后近入稠密大气层烧毁。

3. 形状摄动。由于一般天体都是非球对称的延伸体, 在相互距离较近时, 不能看作质点来讨论引力。按(2.26)式, 延伸体对外面一点的位函数为

$$U = \frac{GM}{R'} + \frac{G}{R'} \sum_{s=1}^{\infty} \iiint \left(\frac{r}{R'} \right)^s P_s(\cos \theta) \rho dv \quad (4.65)$$

其中 R' 为延伸体质心 O 到所讨论外面质点 P 的距离, $\vec{r}$ 为延伸体内体积元 dv 处的向径, ρ 为此处密度; θ 为 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\vec{r}$ 之间交角, $P_s(\cos \theta)$ 为 s 阶勒让德多项式。若 $R' \gg r$, (4.65) 式第二项很小。 P 点在延伸体引力下的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\vec{R}} &= \nabla U = -\frac{GM}{R'^3} \vec{R}' + \vec{W} \\ \vec{W} &= \nabla \left[\frac{G}{R'} \sum_{s=1}^{\infty} \iiint \left(\frac{r}{R'} \right)^s P_s(\cos \theta) \rho dv \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.66)$$

其中 $\vec{W}$ 即为形状摄动加速度, (4.65) 式第二项是相应的摄动函数。在讨论天然卫星时, R' 比 r 大得多, 摄动函数容易展开, 只用少数几项就够了。讨论人造卫星运动时, R' 只稍大于延伸体(地球)半径, 展开式很复杂, 将在第七章中讲述。

形状摄动在 $R' \gg r$ 时以径向为主, 对 a, e 只有周期影响。

其他摄动要针对具体天体情况讨论。

习 题

1. 在用直角坐标的受摄方程(4.6)式中, 若用 $a_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 表示六个轨道根数, 试证下面关系成立:

$$\left. \begin{aligned} \textcircled{1} \quad \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \vec{r}}{\partial a_i} \dot{a}_i &= 0 \\ \textcircled{2} \quad \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \vec{r}}{\partial a_i} \dot{a}_i &= \nabla R \end{aligned} \right\} \quad (4.67)$$

2. 利用上题结果, 进一步证明:

$$\frac{\partial R}{\partial a_i} = \sum_{s=1}^6 [a_i; a_s] \dot{a}_s$$

其中 $[a_i; a_s]$ 是 $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ 对 a_i, a_s 的拉格朗日括号, 即

$$[a_i; a_s] = \frac{\partial \vec{r}}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial a_s} - \frac{\partial \vec{r}}{\partial a_s} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial a_i}$$

3. 用上题结果, 试算出全部拉格朗日括号 $[a_i; a_s]$, 并推导出拉格朗日行星运动方程(4.16)。(注: 此三题为拉格朗日最初推导方程(4.16)式的方法, 也称为拉格朗日方法原理)。

4. 根据拉普拉斯积分(2.41)式, 证明向量函数

$$\vec{G} = \vec{h} \times \dot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r} \vec{r} - \vec{F} = 0$$

满足关系

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \left(\frac{d\vec{G}}{dt} \right)$$

5. 根据 $\hat{h}$ 在原 $O-XYZ$ 中的分量, 求出 $\dot{\hat{h}}$ 后, 用旋转矩阵方法再把 $\dot{\hat{h}}$ 变为 $O-ABC$ 系统的分量, 并证明(4.45)式成立。

6. 写出用(4.28)式定义的非奇点变量为基本变量的受摄运动方程, 并说明方程中已不再出现原有奇点。

7. 受摄运动方程(4.16)及(4.54)式在吻切轨道为双曲线时, 是否照样成立? 推导过程中是否有所不同?

8. 吻切轨道接近抛物线的彗星, 在摄动作用下, 有时吻切轨道为椭圆, 有时为双曲线。这种情况能否用本章方法讨论摄动?

9. 试分析法向分量 W 对轨道根数的影响; 并说明什么情况下, W 对根数 Ω 有长期影响。

10. 若太阳因不断辐射而质量在减小, 设质量变化关系为

$$M = M_0 - \alpha t$$

其中 M_0, α 为常数。试列出某行星在此情况下的运动方程 (不考虑其他摄动), 并讨论轨道根数 a, e, Ω, i 的变化情况。

11. 若延伸体对外一质点 P 吸引的位函数为

$$U = \frac{GM}{r} + \frac{A_2}{r^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 i \right) \quad A_2 > 0$$

试列出 P 点的运动方程, 并讨论轨道根数 a, e, i, Ω 的变化情况。

第五章 受摄运动方程的分析解法原理

受摄运动方程的建立是严格的,只要找出全部摄动因素,都可列出相应方程。但要解出受摄方程有很大困难,主要是数学上困难。传统方法是分析方法,也就是求出受摄方程的近似分析解;这是经典天体力学的主要内容。本章只介绍解法原理和解的形式,并用于讨论太阳系稳定性问题。因详尽解法要根据所讨论天体具体情况才能进行。有关内容分别组成大行星运动理论,月球运动理论,自然卫星运动理论,人造地球卫星运动理论,太阳系小天体运动理论等。近年来在恒星系统动力学中也用到摄动理论。

除分析方法外,60年代后数值方法和定性方法也有重大发展。大量实际应用课题可用数值方法求出受摄方程的解,相应的计算方法和软件技术也迅速发展而形成天体力学的一个重要分支。有关天体系统的运动特征,包括运动稳定性,运动区域,奇点性质等研究主要用定性方法进行;但也有时用数值方法进行探索。现代一些半分析,半数值方法统称半分析方法也属于分析方法范围。本章只讨论分析方法的原理,数值方法和定性方法将在另外课程中讲述。

第一节 受摄运动方程的级数解形式

上一章中讲到的各种受摄运动方程,尽管形式不同,但有一个共同特点,摄动加速度中总有一些小量因子。例如行星间引力摄

动中,产生摄动的行星质量与太阳质量之比(小于0.001)可作为小量;介质阻尼摄动中介质密度一般很小,可看作小量;形状摄动中,延伸体形状椭率一般很小,可取与它同量级的参数作为小量。这种类型的方程组常称为小参数方程。可以用这些小参数作级数解的基础,即把方程的解表示为这些小参数的幂级数。由于这些小参数是常数,故小参数的取法可任意,同量级的几个小参数可以统一成一个。有时也同时讨论几个小参数情况。

下面以拉格朗日行星运动方程为例,其中只讨论行星 P (质量为 m) 和 P' (质量为 m') 的相互引力摄动,都存在摄动函数。

在讨论 P 的运动时, P' 的引力产生的摄动加速度的摄动函数为

$$R = Gm' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'^3} \right) \quad (5.1)$$

其中 Δ 为 $|\vec{r}' - \vec{r}|$; $\vec{r}'$, $\vec{r}$ 为 P' , P 的位置向量(以日心为原点)。在讨论 P' 的运动时, P 的引力产生的摄动加速度的摄动函数为

$$R' = Gm \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} \right) \quad (5.2)$$

因拉格朗日行星运动方程是用轨道根数作基本变量,故(5.1), (5.2)式中的 $\vec{r}$, $\vec{r}'$ 应按无摄运动关系表示为轨道根数的函数,即由

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= a(\cos E - e)P + a\sqrt{1-e^2} \sin E \vec{Q} \\ \vec{P} &= \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i \\ \sin \omega \sin i \end{pmatrix} \\ \vec{Q} &= \begin{pmatrix} -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i \\ -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i \\ \cos \omega \sin i \end{pmatrix} \\ E - e \sin E &= nt + M_0 \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

$\vec{r}'$ 的结果相同, 只是上式中每个量都加上“'”。

为了突出小参数, 把受摄方程中的 m, m' 因子提到外面。用六维向量 p, q 分别表示行星 P 和 P' 的六个轨道根数, 则 P, P' 的拉格朗日行星运动方程(4.16)式可缩写为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= m' F(p, q, t) \\ \dot{q} &= m G(p, q, t) \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

其中 F, G 亦为六维向量函数, 故上式是十二阶方程组。

(5.4) 式中, p, q 都认为是 m, m' 的函数, 故 F, G 中仍隐含 m, m' 。先形式地展开为:

$$\left. \begin{aligned} p &= p^{(0 \cdot 0)} + m p^{(1 \cdot 0)} + m' p^{(0 \cdot 1)} + \dots + m^k m'^l p^{(k \cdot l)} + \dots \\ q &= q^{(0 \cdot 0)} + m q^{(1 \cdot 0)} + m' q^{(0 \cdot 1)} + \dots + m^k m'^l q^{(k \cdot l)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

相应的 F, G 也可用二重马克洛林级数:

$$\left. \begin{aligned} F &= (F)_0 + m \left(\frac{\partial F}{\partial m} \right)_0 + m' \left(\frac{\partial F}{\partial m'} \right)_0 + \frac{1}{2} \left[m^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial m^2} \right)_0 \right. \\ &\quad \left. + 2mm' \left(\frac{\partial^2 F}{\partial m \partial m'} \right)_0 + m'^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial m'^2} \right)_0 \right] + \dots \\ G &= (G)_0 + m \left(\frac{\partial G}{\partial m} \right)_0 + m' \left(\frac{\partial G}{\partial m'} \right)_0 + \frac{1}{2} \left[m^2 \left(\frac{\partial^2 G}{\partial m^2} \right)_0 \right. \\ &\quad \left. + 2mm' \left(\frac{\partial^2 G}{\partial m \partial m'} \right)_0 + m'^2 \left(\frac{\partial^2 G}{\partial m'^2} \right)_0 \right] + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

式中 $(X)_0$ 表示求完导数后再令 $m = m' = 0$ 。由于 m, m' 隐含在 p, q 中, 故可表为

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial m} &= \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial m} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial m} \\ \frac{\partial F}{\partial m'} &= \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial m'} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial m'} \end{aligned}$$

其中因 F, p, q 都是六维向量, 则

$$\frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial F}{\partial q}$$

都是 6×6 矩阵。 G 对 m, m' 的导数相同；二阶异数也是同样可求出，利用(5.5)式可得

$$\left(\frac{\partial F}{\partial m}\right)_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_0 p^{(1,0)} + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0 q^{(1,0)}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial m'}\right)_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_0 p^{(0,1)} + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0 q^{(0,1)}$$

与相应的 G 及高阶导数一起代入(5.6)式后得

$$\left. \begin{aligned} F(p, q, t) &= (F)_0 + m \left[\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_0 p^{(1,0)} + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0 q^{(1,0)} \right] \\ &\quad + m' \left[\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_0 p^{(0,1)} + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0 q^{(0,1)} \right] + \dots \\ G(p, q, t) &= (G)_0 + m \left[\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_0 p^{(1,0)} + \left(\frac{\partial G}{\partial q}\right)_0 q^{(1,0)} \right] \\ &\quad + m' \left[\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_0 p^{(0,1)} + \left(\frac{\partial G}{\partial q}\right)_0 q^{(0,1)} \right] + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

同(5.5)式一起代入(5.4)式两端可得

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k,l} m^k m'^l \dot{p}^{(k,l)} &= m' (F)_0 + m m' \left[\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_0 p^{(1,0)} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0 q^{(1,0)} \right] + m'^2 \left[\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_0 p^{(0,1)} + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0 q^{(0,1)} \right] \\ &\quad + \dots \\ \sum_{k,l} m^k m'^l \dot{q}^{(k,l)} &= m (G)_0 + m^2 \left[\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_0 p^{(1,0)} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial G}{\partial q}\right)_0 q^{(1,0)} \right] + m m' \left[\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_0 p^{(0,1)} + \left(\frac{\partial G}{\partial q}\right)_0 q^{(0,1)} \right] \\ &\quad + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

把 m, m' 看作任意参数，比较上式两端 m, m' 的同次幂系数有：

$$\dot{p}^{(0,0)} = 0, \quad \dot{q}^{(0,0)} = 0 \quad (5.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}^{(1,0)} &= 0, \quad \dot{q}^{(0,1)} = 0 \\ \dot{p}^{(0,1)} &= (F)_0 = F(p^{(0,0)}, q^{(0,0)}, t) \\ \dot{q}^{(1,0)} &= (G)_0 = G(p^{(0,0)}, q^{(0,0)}, t) \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}^{(2,0)} &= 0, \quad \dot{q}^{(0,2)} = 0 \\ \dot{p}^{(1,1)} &= \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right)_0 p^{(1,0)} + \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right)_0 q^{(1,0)} \\ \dot{q}^{(1,1)} &= \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_0 p^{(0,1)} + \left(\frac{\partial G}{\partial q} \right)_0 q^{(0,1)} \\ \dot{p}^{(0,2)} &= \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right)_0 p^{(0,1)} + \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right)_0 q^{(0,1)} \\ \dot{q}^{(2,0)} &= \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_0 p^{(1,0)} + \left(\frac{\partial G}{\partial q} \right)_0 q^{(1,0)} \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

.....

依次下去可求出任意阶系数的导数表达式，这些就是级数解系数的微分方程。由低阶系数积出后可逐次积出高阶系数。

但每次积分都要出现积分常数，而原方程(5.4)式为12阶，一共只有12个独立积分常数。而(5.9)式积出即得12个任意常数 $p^{(0)}, q^{(0)}$ ：

$$p^{(0,0)} = p^{(0)}, q^{(0,0)} = q^{(0)}$$

因 $\dot{p}, \dot{q}$ 方程右端分别有 m', m 的因子，故显然有关系：

$$\dot{p}^{(k,0)} = 0, \quad \dot{q}^{(0,l)} = 0$$

积分得

$$p^{(k,0)} = a^{(k,0)}, q^{(0,l)} = b^{(0,l)} \quad (5.12)$$

其中 $a^{(k,0)}, b^{(0,l)}, (k, l = 1, 2, \dots)$ 都是常数。而一般的 $p^{(k,l)} (l \neq 0), q^{(k,l)} (k \neq 0)$ 的式子积分后的常数记为：

$$-a^{(k,l)}, -b^{(k,l)}$$

即

$$\left. \begin{aligned} p^{(k,l)} &= f^{(k,l)}(t) - a^{(k,l)} \\ g^{(k,l)} &= q^{(k,l)}(t) - b^{(k,l)} \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

与(5.11)式一起代入(5.5)式得:

$$\left. \begin{aligned} p &= \sum_{k=1}^{\infty} m^k a^{(k,0)} + \sum_{k,l} m^k m'^l [f^{(k,l)}(t) - a^{(k,l)}] \\ q &= \sum_{l=1}^{\infty} m'^l b^{(0,l)} + \sum_{k,l} m^k m'^l [g^{(k,l)}(t) - b^{(k,l)}] \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

令 $t = t_0$ (初始时刻), 左端为 p, q 初值, 就记为 $p^{(0)}, q^{(0)}$, 比较两端 m, m' 的同次幂系数可得:

$$\left. \begin{aligned} p^{(0,0)} &= p^{(0)}, q^{(0,0)} = q^{(0)} \\ a^{(k,0)} &= 0, b^{(0,l)} = 0 \\ a^{(k,l)} &= f^{(k,l)}(t_0), (l \neq 0) \\ b^{(k,l)} &= g^{(k,l)}(t_0), (k \neq 0) \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

其中 f, g 包含的 p, q 都要成为 $p^{(0)}, q^{(0)}$, 即所有积分常数都化成 12 个初值 $p^{(0)}, q^{(0)}$ 的函数, 故只有 12 个独立。上面也表明微商不等于 0 的系数积分时, 积分下限取为初值 t_0 就行了。而且除不含 m, m' 的项外, 其他微商为 0 的系数, 积分后都为 0。

下面讨论积分过程。(5.9)式已说明积分后为初值 $p^{(0)}, q^{(0)}$; (5.10)式应为

$$\begin{aligned} p^{(1,0)} &= 0, q^{(0,1)} = 0 \\ \dot{p}^{(0,1)} &= (F)_0 = F(p^{(0)}, q^{(0)}, t) \\ \dot{q}^{(1,0)} &= (G)_0 = G(p^{(0)}, q^{(0)}, t) \end{aligned}$$

积分可得

$$\left. \begin{aligned} p^{(0,1)} &= \int_{t_0}^t F(p^{(0)}, q^{(0)}, t) dt \\ q^{(1,0)} &= \int_{t_0}^t G(p^{(0)}, q^{(0)}, t) dt \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

因它们是 m, m' 的一次幂系数, 故称为一阶摄动。故若只准到一阶摄动时, 应有

$$p = p^{(0)} + m' p^{(0,1)}, q = q^{(0)} + m q^{(1,0)} \quad (5.17)$$

含有 m, m' 二次因子的项称为二阶摄动, 由于积分常数已按上述原则处理, 故(5.11)式可简化并积出为:

$$\left. \begin{aligned} p^{(1,1)} &= \int_{t_0}^t \frac{\partial F}{\partial q} q^{(1,0)} dt \\ q^{(1,1)} &= \int_{t_0}^t \frac{\partial G}{\partial p} p^{(0,1)} dt \\ p^{(0,2)} &= \int_{t_0}^t \frac{\partial F}{\partial p} p^{(0,1)} dt \\ q^{(2,0)} &= \int_{t_0}^t \frac{\partial G}{\partial q} q^{(1,0)} dt \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

其中 $p^{(0,1)}, q^{(1,0)}$ 就是一阶摄动结果(5.16)式。由此可看出, 二阶摄动要有两次积分, 并可类推到高阶摄动。准到二阶摄动的解为:

$$\left. \begin{aligned} p &= p^{(0)} + m' p^{(0,1)} + m m' p^{(1,1)} + m'^2 p^{(0,2)} \\ q &= q^{(0)} + m q^{(1,0)} + m m' q^{(1,1)} + m^2 q^{(2,0)} \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

根据这个过程容易推广到三阶或更高阶的摄动表达式。

上面是以太阳和两个行星的相互引力形成的力学系统为例, 也就是三体问题情况。同样可推广到多体问题, 讨论方法完全相同, 只是更繁而已。

上面讨论也可以看成具有两个小参数情况的受摄运动。在很多情况下, 一个天体运动时, 受到两种摄动力作用, 可表示为受摄二体问题。仍用六维向量 p 表示天体的轨道根数, 运动方程可写为

$$\dot{p} = m_1 F(p, t) + m_2 G(p, t) \quad (5.20)$$

其中 m_1, m_2 为两种摄动力相应的小参数, F, G 为给定的六维向量函数, 只依赖于 p, t 。同前面一样, 可先展开 p 为两个小参数的形式幂级数

$$\begin{aligned} p &= p^{(0,0)} + m_1 p^{(1,0)} + m_2 p^{(0,1)} + m_1 m_2 p^{(1,1)} + m_1^2 p^{(2,0)} \\ &\quad + m_2^2 p^{(0,2)} + \dots \end{aligned} \quad (5.21)$$

代入(5.19)式,再把 F, G 也按 m_1, m_2 展开,比较两端 m_1, m_2 同次幂系数,可得与前面讨论的同样结果:

$$\left. \begin{aligned} p^{(0,0)} &= p^{(0)} \quad (\text{初值}) \\ p^{(1,0)} &= \int_{t_0}^t F(p^{(0)}, t) dt \\ p^{(0,1)} &= \int_{t_0}^t G(p^{(0)}, t) dt \\ p^{(1,1)} &= \int_{t_0}^t \left[\left(\frac{\partial F}{\partial p} \right)_0 p^{(0,1)} + \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_0 p^{(1,0)} \right] dt \\ p^{(2,0)} &= \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right)_0 p^{(1,0)} dt \\ p^{(0,2)} &= \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_0 p^{(0,1)} dt \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

积出后代入(5.21)式即得原方程的解。其中含因子 $m_1 m_2$ 的项称为两种摄动力的联合摄动项,是二阶摄动项之一。同样可以推广到三种或更多种摄动力,结果类似,只是二阶摄动要增加相应的项。如只有一种摄动力,由上面简化可得。

这种级数解的收敛性问题,现在只有原则结果;即要求函数 F, G 对 p, t 解析,小参数 m_1, m_2 等足够小是收敛的。但结合具体天体情况就复杂化了。

在天体力学中,一般问题讨论到二阶摄动已够了。极个别课题要三阶摄动。

第二节 摄动函数展开的基本方法

在上节中已看出,受摄运动方程的分析解法是级数解。一阶摄动就要对时间进行积分,被积函数是原受摄方程右端项。当所讨论的摄动存在摄动函数时,被积函数是摄动函数的偏导数组合。必须把摄动函数表为时间 t 的显函数,积分才能进行。但摄动函

数中主要包含天体坐标，它们只能通过近点角反映为时间的函数。但只有平近点角 $M = nt + M_0$ 为时间 t 的显函数，偏近点角 E 和真近点角 f 都要通过 M 表示。要把摄动函数及其偏导数表示为时间(或 M)的显函数，只能用级数展开进行，因此摄动函数展开方法成为受摄方程分析解法的关键问题之一。

上一章已讲到二体问题的关系式对受摄运动仍然成立。下面就利用二体问题的关系式展开(5.1)式：

$$\left. \begin{aligned} R &= Gm' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'^3} \right) \\ \Delta^2 &= (\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

设 H 为 $\vec{r}$, $\vec{r}'$ 之间的交角，故也有关系

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' = rr' \cos H$$

代入(5.23)式得：

$$\left. \begin{aligned} R &= Gm' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r \cos H}{r'^2} \right) \\ \Delta^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

式中 Δ^{-1} 为摄动函数主要部份，只要将它展开后，第二项可合并入展开式中某项。

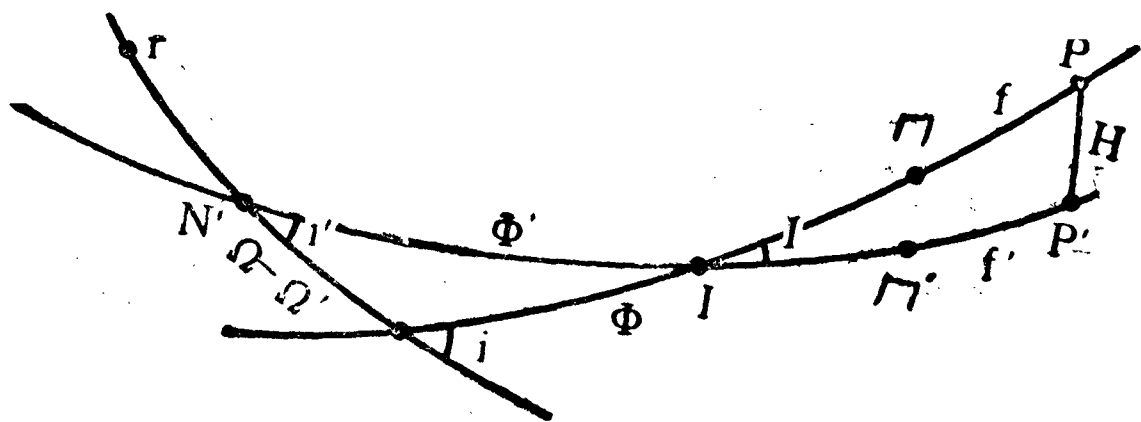


图 5.1

图 5.1 为日心天球，大圆 $rN'N$ 为某时刻的黄道， r 为春分点；大圆 $N'IP'$, NIP 为行星 P' 和 P 的轨道面； i' , i 为其轨道倾角， $rN = \Omega$, $rN' = \Omega'$ 为相应的升交点经度； $N\Pi = \omega$, $N'\Pi' =$

ω' 为近日点角距; $\Pi P = f, \Pi' P' = f'$ 即为二行星在讨论时刻 t 时的真近点角。定义

$$\left. \begin{aligned} NI = \Phi, N'I = \Phi' \\ I\Pi = \Pi, I\Pi' = \Pi' \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

则有

$$\left. \begin{aligned} \Phi = \omega - \Pi, \Phi' = \omega' - \Pi' \\ l = IP = f + \Pi, l' = IP' = f' + \Pi' \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

利用三角形 IPP' 可得

$$\cos H = \cos l \cos l' + \sin l \sin l' \cos I \quad (5.27)$$

上面出现的 I, Φ, Φ' 及 Π, Π' 为辅量, 可化为轨道根数的函数。由三角形 $N'NI$, 利用六元素的达朗贝尔公式得:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{I}{2} \sin \frac{\Phi + \Phi'}{2} &= \sin \frac{\Omega - \Omega'}{2} \sin \frac{i + i'}{2} \\ \sin \frac{I}{2} \cos \frac{\Phi + \Phi'}{2} &= \cos \frac{\Omega - \Omega'}{2} \sin \frac{i - i'}{2} \\ \cos \frac{I}{2} \sin \frac{\Phi' - \Phi}{2} &= \sin \frac{\Omega - \Omega'}{2} \cos \frac{i + i'}{2} \\ \cos \frac{I}{2} \cos \frac{\Phi' - \Phi}{2} &= \cos \frac{\Omega - \Omega'}{2} \cos \frac{i - i'}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

由此式可从 Ω, Ω', i, i' 解出 I, Φ', Φ ; 并可得

$$\Pi = \omega - \Phi, \Pi' = \omega' - \Phi' \quad (5.29)$$

因此 $I, \Phi, \Phi', \Pi, \Pi'$ 都是轨道根数的已知函数。

在太阳系的大多数天体中, i, i' 都较小; 故相应的轨道面交角 I 也较小, 可取

$$\left. \begin{aligned} \cos I &= 1 - 2 \sin^2 \frac{I}{2} = 1 - 2\delta^2 \\ \delta^2 &= \sin^2 \frac{I}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

可作为小量对待 ($I = 12^\circ$ 时, $\delta^2 \sim 0.01$)。代入 (5.27) 式可得

$$\cos H = \cos(l - l') - 2\delta^2 \sin l \sin l' \quad (5.31)$$

再代入(5.24)式有

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr'[\cos(l - l') - 2\delta^2 \sin l \sin l'] \\ &= \Delta_1^2(1 + 4rr'\delta^2 \Delta_1^{-2}) \\ \Delta_1^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(l - l') \end{aligned} \right\} (5.32)$$

即

$$\text{当条件} \quad \Delta^{-1} = \Delta_1^{-1}(1 + 4rr'\delta^2 \Delta_1^{-2})^{-\frac{1}{2}} \quad (5.33)$$

$$|4rr'\delta^2 \Delta_1^{-2}| < 1 \quad (5.34)$$

成立时, 上式可按二项式展开:

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} &= \Delta_1^{-1} - 2rr'\delta^2 \sin l \sin l' \Delta_1^{-3} \\ &\quad + 6r^2 r'^2 \delta^4 \sin^2 l \sin^2 l' \Delta_1^{-5} \\ &\quad - 20r^3 r'^3 \delta^6 \sin^3 l \sin^3 l' \Delta_1^{-7} \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (5.35)$$

这就是 Δ^{-1} 的初步展开, 但还不是时间 t 或 M 的显函数。下面分两步进行。

第一步取两行星的轨道偏心率 $e = e' = 0$, 求出相应的 Δ^{-1} 展开式; 第二步再推广到 $e \neq 0, e' \neq 0$ 的情况。第二步将在下节讲述。

现在令 $e = e' = 0$, 此时应有

$$\begin{aligned} r &= a, r' = a' \\ f &= M, f' = M' = n't + M_0' \end{aligned}$$

并定义

$$L = M + \Pi, L' = M' + \Pi' \quad (5.36)$$

以及相应的 Δ_1 记为 Δ_0 , 即

$$\Delta_0^2 = a^2 + a'^2 - 2aa'\cos(L - L') \quad (5.37)$$

且此时的 Δ 记为 $(\Delta)_0$, 则有

$$\begin{aligned} (\Delta)_0^{-1} &= \Delta_0^{-1} - 2aa'\delta^2 \sin L \sin L' \Delta_0^{-3} \\ &\quad + 6a^2 a'^2 \delta^4 \sin^2 L \sin^2 L' \Delta_0^{-5} \end{aligned}$$

$$-20a^3a'^3\delta^6\sin^3L\sin^3L'\Delta_0^{-7} \\ + \dots \quad (5.38)$$

现在先展开 Δ_0^{-s} , 由

$$\begin{aligned} \Delta_0^2 &= a^2 + a'^2 - 2aa'\cos(L-L') \\ &= a'^2[1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(L-L')] \\ &= a'^2D^2 \\ D^2 &= 1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(L-L') \end{aligned} \quad (5.39)$$

其中 $\alpha = a/a' < 1$ (若 $a > a'$, 则取 $\alpha = a'/a < 1$)

则 $D^{-s} = [1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(L-L')]^{-s}$

$$a^k a'^k \Delta_0^{-(2k+1)} = \frac{\alpha^k}{a'} D^{-s} \quad (s = 2k+1) \quad (5.40)$$

现采用复数进行展开。令

$$\left. \begin{aligned} z &= \exp[\sqrt{-1}(L-L')] \\ 2\cos(L-L') &= z + z^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} D^{-s} &= (1 + \alpha^2 - \alpha z - \alpha z^{-1})^{-s} \\ &= (1 - \alpha z)^{-s} (1 - \alpha z^{-1})^{-s} \end{aligned} \quad (5.42)$$

由定义知

$$|\alpha z| < 1, |\alpha z^{-1}| < 1$$

故上式可按二项式定理展开:

$$(1 - \alpha z)^{-s} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)}{n!} \alpha^n z^n$$

$$(1 - \alpha z^{-1})^{-s} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)}{n!} \alpha^n z^{-n}$$

此二式展开式系数相同, 代入(5.42)式后可整理为:

$$D^{-s} = \frac{1}{2} B_0^s + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^s (z^n + z^{-n}) \quad (5.43)$$

其中 B_n^s 称为拉普拉斯系数, 可从上面展开式直接导出为:

$$\frac{1}{2} B_0^s = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{s^2(s+1)^2(s+2)^2\cdots(s+m-1)^2}{(m!)^2} \alpha^{2m} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}B_n^s &= \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)}{n!} \alpha^n \left[1 + \frac{s(s+n)}{1 \cdot (n+1)} \alpha^2 \right. \\
&\quad + \frac{s(s+1)}{1 \cdot 2} \frac{(s+n)(s+n+1)}{(n+1)(n+2)} \alpha^4 + \frac{s(s+1)(s+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\
&\quad \left. \frac{(s+n)(s+n+1)(s+n+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \alpha^6 + \cdots \right] \\
&= \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)}{n!} \alpha^n F(s, s+n, n+1, \alpha^2)
\end{aligned} \tag{5.45}$$

其中 $F(a, b, c, x)$ 为超几何级数, 是常用的特殊函数之一。

根据(5.43)式, 若定义

$$B_{-n}^s = B_n^s \tag{5.46}$$

则可得

$$(1 + \alpha^2 - \alpha z - \alpha z^{-1})^{-s} = D^{-s} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n^s z^n \tag{5.47}$$

两端对 z 取微商后, 比较 z 的同幂次系数, 可得拉普拉斯系数的循环公式:

$$B_n^s = \frac{n-1}{n-s} (\alpha + \alpha^{-1}) B_{n-1}^s - \frac{n-s-2}{n-s} B_{n-2}^s \tag{5.48}$$

另外, 由于要用到摄动函数对 α, α' 的微商(二阶摄动中还要用到二阶微商), 但 $\alpha = a/a'$ 故有

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha'} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha'} = -\frac{\alpha}{\alpha'} \frac{\partial}{\partial \alpha} \tag{5.49}$$

即对 α, α' 的偏导数都可化为对 α 的偏导数。因此要用到 B_n^s 对 α 的微商。

(5.47)式两端对 α 取微商, 并比较 z 的同幂次系数可得

$$\frac{dB_n^s}{d\alpha} = s \left(B_{n-1}^{s+1} + B_{n+1}^{s+1} - 2\alpha B_n^{s+1} \right) \tag{5.50}$$

即可用函数值表示微商。又由(5.47)式对 z 微商整理为

$$\alpha^s(1-z^{-2})D^{-s-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n B_n^s z^{n-1}$$

且

$$D^{-s-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n^{s+1} z^n$$

比较 z 同次幂系数后可得:

$$n B_n^s = \alpha^s (B_{n-1}^{s+1} - B_{n+1}^{s+1}) \quad (5.51)$$

利用(5.48), (5.50), (5.51)式可导出:

$$\begin{aligned} \frac{dB_n^s}{d\alpha} &= \frac{1}{1-\alpha^2} \{2(n+s-1)B_{n-1}^s \\ &\quad + [2\alpha^s - n(\alpha + \alpha^{-1})]B_n^s\} \end{aligned} \quad (5.52)$$

即可用同一指标 s 的函数值表示微商。由此还可求出二次微商关系为:

$$\begin{aligned} (\alpha^2 - \alpha^4) \frac{d^2 B_n^s}{d\alpha^2} + [\alpha - \alpha^3(4s+1)] \frac{dB_n^s}{d\alpha} \\ - [4\alpha^2 s^2 + n^2(1-\alpha^2)] B_n^s = 0 \end{aligned} \quad (5.53)$$

这是拉普拉斯系数满足的二阶微分方程, 与超几何方程相近。用它可将二阶微商表示为函数值及一阶微商。并由此可知, 高阶微商都可化为函数值和一阶微商的函数。

上面讨论的拉普拉斯系数已很清楚, 故展开式(5.43)式可正式应用, 即

$$D^{-s} = \frac{1}{2} B_0^s + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^s z^n = \frac{1}{2} B_0^s + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^s \cos n(L-L') \quad (5.54)$$

代入(5.38)式中, 与 $\sin^k L \sin^k L'$ 相乘, 可化为 $(iL + jL')$ 的余弦级数(i, j 为所有整数), 即 $(\Delta)_0^{-1}$ 可化为

$$(\Delta)_0^{-1} = \sum_{n,i,j} A^n(i,j) \cos(iL + jL') \quad (5.55)$$

其中 n, i, j 为整数, 系数 $A^n(i, j)$ 为 $\alpha, \alpha', \delta^2$ 的多项式。

摄动函数的第二项在 $e = e' = 0$ 时可化为

$$- \frac{a}{a'^2} \cos(L - L') + \frac{a}{a'^2} \delta^2 \sin L \sin L'$$

仍为 L, L' 组合的余弦函数, 可并入(5.55)式中相应的项。

上面展开式中有两处基本展开过程, 一为二项式展开(5.35)式, 收敛条件为(5.34)式:

$$|4r'\delta^2\Delta_1^{-2}\sin l\sin l'| < 1$$

在太阳系大行星运动中, Δ_1 与 r, r' 同量级, 只要 I 不大, 可满足。对一般大行星无问题, 只是讨论冥王星和海王星相互摄动时有危险。因为 r' 有时小于 r , 最大时达 50 天文单位; I 可达 18° , Δ_1 值可小到 15 天文单位。故冥王星运动至今未建立起分析理论。一些小行星也不行。

另一个基本展开是(5.43)式, 在 $\alpha < 1$ 时是收敛的。但大行星之间的 α 在 $0.6 \sim 0.8$ 之间, 收敛很慢。也有一些人研究改进, 但实用上未采纳。

这里只对 $e = e' = 0$ 情况的展开方法, 对 $e \neq 0, e' \neq 0$ 时的讨论见下节。

第三节 纽康算子, 摄动函数的展开结果

由于在 $e = e' = 0$ 时, $r = a, r' = a', l = L, l' = L'$, 故展开记为

$$(\Delta)_0^{-1} = F(a, a', L, L') \quad (5.56)$$

对 $e \neq 0, e' \neq 0$ 时可用同一函数, 但为:

$$\Delta^{-1} = F(r, r', l, l') \quad (5.57)$$

时间 t 隐含在 r, r', l, l' 之中。利用关系

$$\left. \begin{aligned} r &= a(1 - e \cos E) = a + x \\ r' &= a'(1 - e' \cos E') = a' + x' \\ l &= L + (f - M) = L + v \\ l' &= L' + (f' - M') = L' + v' \end{aligned} \right\} \quad (5.57)$$

其中 $x = -ae\cos E$, $x' = -a'e'\cos E'$, $v = f - M$, $v' = f' - M'$ 都是与 e, e' 同量级的量。但行星的轨道偏心率一般较小, 可按 e, e' 展开为幂级数, 并把 x, x', v, v' 展开为平近点角 M, M' 的三角级数。

为了达到这种要求, 首先介绍一种指数函数算子。设 $\varphi(x)$ 为单变量解析函数, 由泰勒(Taylor)公式有

$$\begin{aligned}\varphi(x + \Delta x) &= \varphi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta x^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \varphi(x) \\ &= \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta x^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \right] \varphi(x)\end{aligned}\quad (5.58)$$

其中括号内的量可看作一个算符, 而且根据指数函数展开式:

$$\exp(w) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \quad (5.59)$$

可形式地把(5.58)式表示为

$$\varphi(x + \Delta x) = \exp\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x) \quad (5.60)$$

同理, 对两个或三个变量的解析函数, 也可以用同样符号表示:

$$\left. \begin{aligned}\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) &= \exp\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right) \varphi(x, y) \\ \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) &= \exp\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi(x, y, z)\end{aligned}\right\} \quad (5.61)$$

而且容易证明, 多变量的这种表达式有下面性质:

$$\begin{aligned}\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) &= \exp\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x}\right) \exp\left(\Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right) \varphi(x, y) \\ &= \exp\left(\Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right) \exp\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x, y)\end{aligned}$$

即可得这种指数函数算符满足指数函数关系:

$$\exp\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right) = \exp\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x}\right) \exp\left(\Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$= \exp\left(\Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right) \exp\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x}\right) \quad (5.62)$$

这种关系可以推广到任意个变量情况。下面就用这种算符来讨论上面的展开式。

按照(5.57)式,可记为:

$$F(r, r', l, l') = F(a + x, a' + x', L + v, L' + v)$$

但因 x, x' 中也有 a, a' ; 而后面还要对它们取偏导数, 不便讨论。现把 F 看作 $\ln a, \ln a'$ 的函数, 而由于

$$\ln r = \ln a (1 - e \cos E) = \ln a + \ln(1 - e \cos E)$$

可取

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \ln(1 - e \cos E) \\ \rho' &= \ln(1 - e' \cos E) \\ \ln r &= \ln a + \rho, \ln r' = \ln a' + \rho' \end{aligned} \right\} \quad (5.63)$$

由此, $e \neq 0, e' \neq 0$ 时的函数可表为

$$\left. \begin{aligned} F(\ln r, \ln r', l, l') &= F(\ln a + \rho, \ln a' + \rho', L + v, L' + v') \\ &= \exp[\rho D + \rho' D' + v D_1 + v' D_1'] F(\ln a, \ln a', L, L') \\ D &= \frac{\partial}{\partial \ln a}, \quad D' = \frac{\partial}{\partial \ln a'} \\ D_1 &= \frac{\partial}{\partial L}, \quad D_1' = \frac{\partial}{\partial L'} \end{aligned} \right\} \quad (5.64)$$

利用关系

$$\frac{d \ln a}{d a} = \frac{1}{a}, \quad \alpha = \frac{a}{a'}$$

可得

$$D = \frac{d a}{d \ln a} \frac{\partial}{\partial a} = \frac{a d a}{d a} \frac{\partial}{\partial a} = \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}$$

同理

$$D' = a' \frac{\partial}{\partial a'} = a' \frac{d a'}{d a'} \frac{\partial}{\partial a'} = -\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}$$

由此可得

$$\begin{aligned} D\alpha^n &= n\alpha^n, & D^m\alpha^n &= n^m\alpha^n \\ D'\alpha^n &= -n\alpha^n, & D'^m\alpha^n &= (-1)^m n^m\alpha^n \end{aligned}$$

另外, 定义

$$w = \exp(\sqrt{-1}L), \quad w' = \exp(\sqrt{-1}L') \quad (5.65)$$

则

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw}{dL} &= \sqrt{-1}w, & \frac{dw'}{dL'} &= \sqrt{-1}w' \\ D_1 &= \frac{\partial}{\partial L} = \sqrt{-1}w \frac{\partial}{\partial w} \\ D_1' &= \frac{\partial}{\partial L'} = \sqrt{-1}w' \frac{\partial}{\partial w'} \\ D_1 w^k &= k\sqrt{-1}w^k \\ D_1' w'^k &= k\sqrt{-1}w'^k \end{aligned} \right\} \quad (5.66)$$

而

$$\sum_{i,j} \cos(iL + jL') = \sum_{i,j} w^i w'^j$$

因此

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} &= F(\ln r, \ln r', l, l') = \sum_{i,j} A^n(i, j) w^i w'^j \\ &= F(\ln a + \rho, \ln a' + \rho', L + v, L' + v') \\ &= \exp(\rho D + \rho' D' + v D_1 + v' D_1') F(\ln a, \ln a', L, L') \\ &= \exp(\rho D + v D_1) \exp(\rho' D' + v' D_1') \\ &\quad \times F(\ln a, \ln a', L, L') \end{aligned} \quad (5.67)$$

可先讨论算子 $\exp(\rho D + v D_1)$, 第二个一样。

由(5.56)式知

$$\begin{aligned} &\exp(\rho D + v D_1) A(i, j) w^i w'^j \\ &= \exp(\rho D + i\sqrt{-1}v) A(i, j) w^i w'^j \end{aligned} \quad (5.68)$$

此式可作为展开式的一般项表达式, 但因 ρ, v 都是与 ϵ 同量级, 并可展开为 ϵ 的幂级数。

由第二章的二体问题公式知, $\cos E$ 可展开为 M 的三角级数, 系数是 e 的多项式, 如(2.112)式。也可以整理成 e 的幂级数, 系数为 M 的三角多项式。另因 $|e \cos E| < 1$, 可得

$$\rho = \ln(1 - e \cos E) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n} \cos^n E \quad (5.69)$$

以(2.112)式的 $\cos E$ 代入可得

$$\begin{aligned} \rho = & \left(\frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{32} + \frac{e^6}{96} + \dots \right) \\ & + \left(-e + \frac{3}{8}e^3 - \frac{1}{64}e^5 + \frac{127}{9216}e^7 \right) \cos M \\ & + \left(-\frac{3}{4}e^2 + \frac{11}{24}e^4 - \frac{3}{64}e^6 \right) \cos 2M \\ & + \left(-\frac{17}{24}e^3 + \frac{77}{128}e^5 - \frac{743}{5120}e^7 \right) \cos 3M \\ & + \left(-\frac{71}{96}e^4 + \frac{129}{160}e^6 \right) \cos 4M \\ & + \left(-\frac{523}{640}e^5 + \frac{10039}{9216}e^7 \right) \cos 5M \\ & - \frac{899}{960}e^6 \cos 6M - \frac{355081}{322560}e^7 \cos 7M \end{aligned} \quad (5.70)$$

这里给出到 e^7 的结果, 如要更准, 可继续展开。 ρ' 的表达式完全一样。至于 v 的展开, 因 $v = l - L = f - M$ 是中心差, 可直接用(2.114)式; v' 也完全一样。

为运算方便起见, 仍用虚变量表示 M 的三角函数, 定义

$$\left. \begin{aligned} z &= \exp(\sqrt{-1}M) \\ \cos nM &= \frac{1}{2}(z^n + z^{-n}) \\ \sin nM &= \frac{1}{2\sqrt{-1}}(z^n - z^{-n}) \end{aligned} \right\} \quad (5.71)$$

则相应的 ρ, v 都成为 z 的正负幂级数, 按 e 的幂次整理, 前几项为:

$$\begin{aligned}
\rho &= e\left(-\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^{-1}\right) + e^2\left(-\frac{3}{8}z^2 + \frac{1}{4} - \frac{3}{8}z^{-2}\right) \\
&\quad + e^3\left(-\frac{17}{48}z^3 + \frac{3}{16}z + \frac{3}{16}z^{-1} - \frac{17}{48}z^{-3}\right) \\
&\quad + \dots \\
\sqrt{-1}v &= e(z - z^{-1}) + \frac{5}{8}e^2(z^2 - z^{-2}) \\
&\quad + e^3\left(\frac{13}{24}z^3 - \frac{1}{8}z + \frac{1}{8}z^{-1} - \frac{13}{24}z^{-3}\right) + \dots
\end{aligned}
\tag{5.72}$$

由此可得:

$$\exp(\rho D + i\sqrt{-1}v) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} K_n e^n \tag{5.73}$$

其中

$$\begin{aligned}
K_1 &= \left(-\frac{1}{2}D + i\right)z + \left(-\frac{1}{2}D - i\right)z^{-1}, \\
K_2 &= \frac{1}{8}[D^2 + (-4i - 3)D + 5i + 4i^2]z^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}(D^2 + D - 4i^2) \\
&\quad + \frac{1}{8}[D^2 + (4i - 3)D - 5i + 4i^2]z^{-2}
\end{aligned}
\tag{5.74}$$

一般记为

$$K_n = \sum_{m=0}^n \Pi_{n-2m}^n z^{n-2m} \tag{5.75}$$

其中记号 Π_{n-2m}^n 就称为纽康算子, 由(5.74)式可看出:

$$\left. \begin{aligned}
\Pi_1^1 &= -\frac{1}{2}D + i, \quad \Pi_{-1}^1 = -\frac{1}{2}D - i \\
\Pi_2^2 &= \frac{1}{8}[D^2 + (-4i - 3)D + 5i + 4i^2] \\
\Pi_0^2 &= \frac{1}{4}(D^2 + D - 4i^2) \\
\Pi_{-2}^2 &= \frac{1}{8}[D^2 + (4i - 3)D - 5i + 4i^2] \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \right\} \quad (5.76)$$

故纽康算子是微商算子和整数 i 的函数，可根据展开式写出到任何指标 n 的表达式。由此可得：

$$\exp(\rho D + i\sqrt{-1}v) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^n \sum_{m=0}^n \Pi_{n-2m}^n z^{n-2m}$$

如定义

$$\Pi_0^0 = 1$$

则可记为

$$\exp(\rho D + i\sqrt{-1}v) = \sum_{n=0}^{\infty} e^n \sum_{m=0}^n \Pi_{n-2m}^n z^{n-2m} \quad (5.77)$$

代入(6.58)式得

$$\begin{aligned}
&\exp(\rho D + i\sqrt{-1}v) A(i, j) w^i w'^j \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^n \sum_{m=0}^n \Pi_{n-2m}^n A(i, j) w^i w'^j z^{n-2m}
\end{aligned}$$

调整指标 m ，取 $n - 2m$ 为 m ，只与 n 相差偶数，上式可写为：

$$\begin{aligned}
&\exp(\rho D + i\sqrt{-1}v) A(i, j) w^i w'^j \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^n \sum_{m=-n}^n \Pi_n^n A(i, j) w^i w'^j z^m
\end{aligned} \quad (5.78)$$

同理，上式再用 $\exp(\rho' D' + v' D_1')$ 运算，并令

$$z' = \exp(\sqrt{-1}M')$$

可得

$$\exp(\rho' D' + v' D_1') w^i w'^j$$

$$\begin{aligned}
&= \exp(\rho'D' + j\sqrt{-1}v')w^i w'^j \\
&= \sum_{n'=0}^{\infty} e'^{n'} \sum_{m'=-n'}^n \Pi_{-n'}^{n'} w^i w'^j z'^m
\end{aligned}$$

于是展开式全部成为：

$$\begin{aligned}
&\exp(\rho D + \rho'D_1 + vD' + v'D_1')F(\ln r, \ln r', l, l') \\
&= \sum_{i,j} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} e^n e'^{n'} \sum_{m=-n}^n \sum_{m'=-n'}^{n'} \Pi_{-n}^n \Pi_{-n'}^{n'} w^i w'^j z^m z'^m
\end{aligned}$$

再把 w, z 等的幂次换回三角函数则可得：

$$R = Gm' \sum P_{mm'}^{nn'}(i, j) e^n e'^{n'} \cos(iL + jL' + mM + m'M') \quad (5.79)$$

其中

$$P_{mm'}^{nn'}(i, j) = \Pi_{-n}^n \Pi_{-n'}^{n'} A(i, j)$$

求和号对所有式中指标求和，但 m 只取 $-n, -n+2, \dots, n-2, n$ ； m' 与 n' 的关系相同。

(5.79)式就是二行星相互引力产生的摄动函数按平近点角的展开式，是经典天体力学中的一个重要结果。最初的形式还要繁。后勒威耶在1845年用哥西数使展开式系数能系统表达，推导出 e 的七次幂结果。到1895年又由纽康采用上述纽康算子，得到本节所述结果，可展开到 e, e' 的任意次幂。

按照50年代前的要求，大行星历表准到 $0''.1$ 。相应摄动函数必须展开到 e, e' 的七次幂。各行星运动理论中的摄动函数展开式有几百到几千项。50年代后到现在，精度提高了一到二个数量级，用这样的展开式的项数也要增加相应的量级。表明这样的展开式收敛很慢。在 e, e', I 较大时很可能不收敛。现代的分析方法一般采用计算机进行级数运算，除法国夏普洪(A. Chapront)等人的半分析月球理论和 VSOP 82 行星理论在法国天文年历正式采用外，其他人的分析方法结果尚未正式启用。

如不用平近点角展开，而用偏近点角或真近点角展开，理论上讲的收敛性要好些。但是也带来新的麻烦。以汉森方法为例，他

是用所讨论行星的偏近点角 E 作自变量, 摄动函数展开为 E 和摄动行星的 E' 的三角级数。可是 E' 同 E 没有直接关系, 他就再用关系

$$E' - e' \sin E' = M' = n't + M_0'$$

把 E' 的函数化为 M' 的函数, 再用

$$M' = \frac{n'}{n}(M - M_0) + M_0'$$

把 M' 的函数化为 M 的函数; 再把 M 的函数用

$$M = E - e \sin E$$

化为 E 的函数。为了克服这种复杂过程, 他只好在关键展开时采用调和分析方法, 系数用数值给出。故成为一种半分析方法。

对于不只一个摄动行星情况, 则摄动函数由几项组成, 每一项的展开方法同上面一样。

对于形状摄动等其他形式摄动, 展开方法不同, 将在具体讨论这种摄动时, 联系所讨论天体情况讲述。

第四节 一阶摄动的讨论

有了摄动函数的展开式, 可代入受摄运动方程积分出一阶摄动结果。这里只根据上节的展开结果形式, 给出一阶摄动的某些性质。

1. 一阶摄动的基本结果, 首先在符号上再作一些简化。上节展开式(5.79)简单记为:

$$\left. \begin{aligned} R &= Gm' \sum P \cos Q, \\ Q &= jL + j'L' + mM + m'M' \\ &= j(M + \Pi) + j'(M' + \Pi') + mM + m'M' \\ &= pM + p'M' + j\Pi + j'\Pi' \\ &= (pn + p'n')t + pM_0 + p'M_0' + j\Pi + j'\Pi' \end{aligned} \right\} \quad (5.80)$$

其中 p, p' 应为任意整数; n, n' 为两行星的轨道运动平均角速度; M_0, M_0' 为轨道根数; Π, Π' 分别为轨道根数 $\Omega, \Omega', \omega, \omega', i, i'$ 的函数。 P 为展开式系数, 是轨道根数 $a, e, i, \Omega, a', e', i', \Omega'$ 的函数。有时为讨论方便起见, 把辅助量 I, Π, Π' 的函数重新整理, 使得系数 P 中只是轨道根数 a, e, i, a', e', i' 的函数; 而三角函数的引数 Q 为 $\Omega, \Omega', \omega, \omega', M_0, M_0'$ 的函数, 即

$$\begin{aligned} Q &= pM + p'M' + j\omega + j'\omega + s(\Omega - \Omega') \\ &= (pn + p'n')t + pM_0 + p'M_0' + jw + j'w' + s(\Omega - \Omega') \end{aligned} \quad (5.81)$$

此式推导不难, 只是几何及三角函数关系, 其中 Ω, Ω' 只以 $\Omega - \Omega'$ 的形式出现。

时间 t 只显含在 Q 中, 但因 p, p' 为任意整数; 当 $p = p' = 0$ 时, Q 中不再含 t , 记为 Q_0 。相应的系数记为 P_0 。为了后面讨论方便, 不显含 t 的项单独列出, 再把 G 也并入系数, 即可得关系:

$$R = m' \sum P_0 \cos Q_0 + m' \sum P \cos Q \quad (5.82)$$

这里的 P_0, Q_0 不含 t , 而第二项中的展开式每项都显含 t 。

以(5.82)式代入拉格朗日行星运动方程, 再进行积分。由第一节知, 一阶摄动的积分中, 所有轨道根数都看作常数, 取其初值。

先以 a 为例, 因

$$\dot{a} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M_0} \quad (5.83)$$

由于

$$Q_0 = j\Pi + j'\Pi'$$

不含 M_0 ; P_0 也不含 M_0 , 故用(5.82)式代入后, 第一项为 0, 即有

$$\dot{a} = -\frac{2m'}{na} \sum P \sin Q$$

积分可得:

$$a = a_0 + \frac{2m'}{na} \sum \frac{pP}{pn + p'n'} \cos Q \quad (5.84)$$

式中第二项 Q 中含 t , $\cos Q$ 为时间 t 的周期函数, 称为摄动周期项, 简记为 $P.T$ 。上式记为:

$$a = a_0 + PT \quad (5.85)$$

其中 a_0 为积分常数, 可取为初值。

再讨论轨道根数 Ω , 由方程

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} = A \frac{\partial R}{\partial i} \quad (5.86)$$

由于摄动函数 P, Q, P_0, Q_0 中都含有 i , 故以(5.82)式代入后, 应有

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} = Am' \sum & \left(\frac{\partial P_0}{\partial i} \cos Q_0 - P_0 \frac{\partial Q_0}{\partial i} \sin Q_0 \right. \\ & \left. + \frac{\partial P}{\partial i} \cos Q - P \frac{\partial Q}{\partial i} \sin Q \right) \end{aligned}$$

式中因平近点角与 i 无关, 故各偏导数都不显含 t , 故积分后成为:

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega_0 + Am' \sum & \left(\frac{\partial P_0}{\partial i} \cos Q_0 - P_0 \frac{\partial Q_0}{\partial i} \sin Q_0 \right) t \\ & + Am' \sum \left(\frac{\partial P}{\partial i} \frac{\sin Q}{pn + p'n'} + P \frac{\partial Q}{\partial i} \frac{\cos Q}{pn + p'n'} \right) \end{aligned} \quad (5.87)$$

其中 Ω_0 为常数, 可取初值; 第二项含时间 t 的因子, 系数为常数, 记为 β ; 第三项因 $\cos Q, \sin Q$ 都是时间 t 的周期函数, 故为摄动周期项, 仍记为 PT , 即

$$\Omega = \Omega_0 + \beta t + P.T$$

其他轨道根数情况相同, 只是 M_0 要补充一下。在第四章中, 曾讨论过 M_0 中 R 对 a 的偏导数应为

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right)$$

即不管近点角内隐含的 a 。这就简化了讨论。

$$\begin{aligned}\dot{M}_e &= -\frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} = A \frac{\partial R}{\partial e} + B \frac{\partial R}{\partial a} \\ &= m' \sum \left(A \frac{\partial P_0}{\partial e} + B \frac{\partial P_0}{\partial a} \right) \cos Q_0 \\ &\quad + m' \sum \left(A \frac{\partial P}{\partial e} + B \frac{\partial P}{\partial a} \right) \cos Q\end{aligned}$$

积分后仍为

$$M_0 = (M_0)_0 + \beta t + P \cdot T$$

只是平近点角 M 要用

$$M = \int n dt + M_0$$

计算。

至此已求出全部根数的一阶摄动结果，不管受到多少个行星的摄动，所得的形式仍相同，即：

$$\left. \begin{aligned}a &= a_0 + P \cdot T \\ e &= e_0 + \beta t + P \cdot T \\ i &= i_0 + \beta t + P \cdot T \\ \Omega &= \Omega_0 + \beta t + P \cdot T \\ w &= w_0 + \beta t + P \cdot T \\ M_0 &= (M_0)_0 + \beta t + P \cdot T\end{aligned} \right\} \quad (5.88)$$

下面分别对 βt 和 $P \cdot T$ 项进行讨论。

2. 长期摄动。(5.88)式中的 βt 项在 $t \rightarrow \infty$ 时也到无穷。这种项称为摄动长期项或长期摄动。长期项反映出轨道根数的变化趋势，在轨道演化中有重大作用，特别是作用变量的长期摄动。如 a 有长期摄动则轨道会无限增大或缩小为 0； e 有则会使椭圆变成双曲线； i 有则会使顺行变成逆行轨道。角变量的长期摄动不会出现性质上改变。

一阶摄动中的长期项含 t 作因子，可以预料，讨论到二阶摄动时，会出现含 t^2 的长期项。而且还可推广到 n 阶摄动。根据

太阳系行星数据, 纽康曾算出地球, 金星和木星的偏心率 e 的二阶长期摄动为:

$$e_{\text{地}} = 0.0167498 - 0.0000426t - 0.000000137t^2$$

$$e_{\text{金}} = 0.00681636 - 0.00005384t + 0.000000126t^2$$

$$e_{\text{木}} = 0.04833475 + 0.00016418t - 0.000000468t^2$$

其中 t 为 1900, 0 起算的时间, 以百年为单位。如只从上式来看, 几十万年以后, 则有 $e_{\text{木}} < 0, e_{\text{地}} < 0, e_{\text{金}} > 1$ 。这当然是只讨论到二阶摄动的结果。如到 n 阶摄动, 则会出现含 t^n 的长期项, 情况就复杂了。

其实时间 t 的幂级数也可能代表周期函数, 例如

$$\sin t + \cos t = 1 + t - \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} \dots\dots$$

此级数对 t 的任何实数值都绝对收敛, 但代表周期函数, 周期为 2π 。因此, 这里得到的长期摄动有可能不反映轨道根数的变化本质, 而是无穷级数解的有限项造成的现象。但虽然如此, 计算出摄动长期项仍然是分析方法中的一个重要课题, 在一定时间范围内能有实用价值。另外也说明分析方法有待改进。

3. 周期摄动。(5.88)式中的 P, T 为摄动周期项或称周期摄动。由于周期项中引数为 Q , 频率为 $pn + p'n'$, 积分后结果为

$$\frac{m'F}{pn + p'n'} \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} [(pn + p'n')t + G] \quad (5.89)$$

的形式。周期为

$$T = \frac{2\pi}{pn + p'n'} \quad (5.90)$$

一般情况下, $pn + p'n'$ 不是小量, T 不大, 称为短周期项(摄动)。若 $pn + p'n'$ 是小量(与小参数 m' 同量级)时, T 为很大的量, 这种摄动项称为长周期项(摄动)。在多体问题中, 两个行星的平均角速度 n, n' 之比接近于简单分数(分子分母都是较小的整数)时, 由于 p, p' 要取所有整数值, 故总有一些 p, p' 值使得 pn

+ $p'n'$ 为很小的量。例如木星和土星的 n, n' 值为：

$$n = 299''.13/\text{日}$$

$$n' = 120''.45/\text{日}$$

$$\frac{n'}{n} \sim \frac{2}{5}$$

则当 $p = -2, p' = 5$ 时有：

$$pn + p'n' = 3''.99/\text{日}$$

这一项的周期约为木星轨道周期的 75 倍，等于 890 多年。由于 $pn + p'n'$ 出现在系数的分母，相应的此项振幅很大。在木星对土星黄经摄动项中，此项系数达 $50'$ 。

对于天王星和海王星的平均运动

$$n = 42''.24/\text{日}, n' = 21''.53/\text{日}$$

当取 $p = -1, p' = 2$ 时有

$$-n + 2n' = 0''.82/\text{日}$$

此项对应的周期达 4300 年。

在小行星运动中，特别是木星摄动最大。当小行星的平均速度 n 与木星的 n' 之比成简单分数时，会出现较大的长周期摄动。长期以来已按 n/n' 的简单分数值，把小行星轨道分成群。在天体力学中，把平均角速度之比等于简单分数情况称为通约，是力学中共振情况之一。在主要的小行星群中， n/n' 等于 $2/1, 3/1, 5/2$ 的附近出现空隙，于 1866 年由科克伍德 (Kirkwood) 发现，故称为科克伍德空隙； n/n' 等于 $1/1, 4/3, 3/2$ 处附近则出现相对“聚集”。故不能简单地讲通约处摄动大，还依赖于其他条件。这是小行星环结构和演化的一个重大问题，至今仍为天体力学家重视。

对一些周期非常大的摄动长周期项，在讨论相对较短的时间内可作为长期项处理，这相当于用多项式逼近围期函数。故在很多情况下，把这些特大长周期项，也看作长期项。下节讲述的长期

项算法,实际上包括了这种长周期项。

第五节 摄动长期项的计算方法

由于摄动长期项的重要性,从经典天体力学时期就出现了一些计算长期摄动方法。基本原理是用平均化方法,消除受摄运动方程中的短周期项,即周期为两行星公转周期或更短的项。具体说就是对行星的近点角取平均。对于不同形式的受摄方程,有两种不同方法,拉格朗日方法和高斯方法。现在虽有改进,但原理仍然一样。

1. 拉格朗日方法。他从拉格朗日行星运动方程出发,先对摄动函数取平均值,消去周期项后再代入受摄方程求解。

首先要对摄动函数取平均值,只有两个行星情况时有:

$$R = Gm' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'^3} \right) \quad (5.91)$$

先证明第二项(辅助部份)平均值为0。因 $\vec{r}'$ 满足二体问题方程(只讨论一阶摄动):

$$\ddot{\vec{r}'} = - \frac{G(S + m')}{r'^3} \vec{r}'$$

由此得

$$\frac{\ddot{\vec{r}'}}{r'^3} = - \frac{1}{G(S + m')} \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = - \frac{n'^2}{G(S + m')} \frac{d^2 \vec{r}'}{dM'^2}$$

但 $\vec{r}'$ 展开为平近点角 M' 的三角级数,对 M' 的二次微商后,只剩下含有 M' 的三角函数项;再对 M' 求平均值显然为0。故结果成立。

对于主要部份 Δ^{-1} ,可按第三节的展开结果,取不含 M, M' 的项($p = p' = 0$)。为简化起见,这里只准到 e, e' 及 $\sin i, \sin i'$ 的二

次幂项, 可得,

$$\begin{aligned} \bar{R} = \left(-\frac{1}{A} \right) = Gm' [4C + (e^2 + e'^2)D - 2ee'E \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') \\ - (\gamma^2 + \gamma'^2)D + 2\gamma\gamma'D \cos(\Omega - \Omega')] \end{aligned} \quad (5.92)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \operatorname{tg} i, & \gamma' &= \operatorname{tg} i' \\ C &= \frac{1}{8a'} B_0^{1/2}, & D &= \frac{\alpha}{8a'} B_1^{3/2} \\ E &= \frac{1}{8a'} B_2^{3/2} \\ \tilde{\omega} &= \omega + \Omega, & \tilde{\omega}' &= \omega' + \Omega' \end{aligned} \right\} \quad (5.93)$$

$B_n^s = B_n^s(\alpha)$ 为拉普拉斯系数。

为了适应小偏心率和小倾角的行星情况, 采用根数:

$$\left. \begin{aligned} h &= e \sin \tilde{\omega}, & k &= e \cos \tilde{\omega} \\ p &= \sin i \sin \Omega, & q &= \sin i \cos \Omega \\ h' &= e' \sin \tilde{\omega}', & k' &= e' \cos \tilde{\omega}' \\ p' &= \sin i' \sin \Omega', & q' &= \sin i' \cos \Omega' \end{aligned} \right\} \quad (5.94)$$

作基本变量, 讨论它们的长期摄动。

以上面的根数为基础的受摄运动方程, 可按(4.25)和(4.27)式给出, 但把 $R \rightarrow \bar{R}$ 。由于 $\bar{R}$ 中不含 ε_0 , 而且

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial i} = \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial i} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial i} \right) = \frac{1}{\gamma} \left(p \frac{\partial \bar{R}}{\partial p} + q \frac{\partial \bar{R}}{\partial q} \right)$$

因此 h, k 的方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{h} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial \bar{R}}{\partial k} + \frac{k \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{\gamma na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(p \frac{\partial \bar{R}}{\partial p} + q \frac{\partial \bar{R}}{\partial q} \right) \\ \dot{k} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial \bar{R}}{\partial h} - \frac{h \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{\gamma na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(p \frac{\partial \bar{R}}{\partial p} + q \frac{\partial \bar{R}}{\partial q} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.95)$$

又因 $\overline{R}$ 中第一项只含 a, a' ;而去掉周期项后是常数, 在(5.95)式中不起作用。 $\overline{R}$ 化为 h, k, p, q 后为

$$\begin{aligned} \overline{R} = Gm'D[h^2 + k^2 + h'^2 + k'^2 - p^2 - q^2 - q'^2 - p'^2 \\ + 2pp' + 2qq'] - 2Gm'E(hh' + kk') \end{aligned} \quad (5.96)$$

略去高于 p, q, h, k 第二次幂项, (5.95)式可简化为:

$$\dot{h} = \frac{1}{na^2} \frac{\partial \overline{R}}{\partial k}, \quad \dot{k} = -\frac{1}{na^2} \frac{\partial \overline{R}}{\partial h} \quad (5.97)$$

同理可得

$$\dot{p} = \frac{1}{na^2} \frac{\partial \overline{R}}{\partial q}, \quad \dot{q} = -\frac{1}{na^2} \frac{\partial \overline{R}}{\partial p} \quad (5.97)$$

用 $\overline{R}$ 代入上式后, 要出现 h', k', p', q' ; 必须将这些量的方程列出再联立求解。相应方程推导相同, 只是摄动函数主要部份 R' 与 R 有简单关系:

$$\frac{R}{m'} = \frac{R'}{m}$$

而且展开式中求平均值后, 系数 C, D, E 是 a, a' 的对称函数, 故可通用。因此(5.97)式及相应的 h', k', p', q' 方程可化为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{h} &= \alpha k - \beta k', & \dot{k} &= \beta h' - \alpha h \\ \dot{h}' &= \alpha' k' - \beta' k, & \dot{k}' &= \beta' h - \alpha' h' \end{aligned} \right\} \quad (5.98)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= \alpha(q' - q), & \dot{q} &= \alpha(p - p') \\ \dot{p}' &= \alpha'(q - q'), & \dot{q}' &= \alpha'(p' - p) \end{aligned} \right\} \quad (5.99)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{2Gm'D}{na^2}, & \beta &= \frac{2Gm'E}{na^2} \\ \alpha' &= \frac{2GmD}{n'a'^2}, & \beta' &= \frac{2GmE}{n'a'^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.100)$$

显然 $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ 都是大于0。

(5.98), (5.99)式都是线性齐次方程组, 容易解出。为避免四

阶方程组麻烦,采用复数形式,定义

$$X = k + \sqrt{-1}h, X' = k' + \sqrt{-1}h' \quad (5.101)$$

可将(5.98)式化为二阶方程组:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \sqrt{-1}\alpha X - \sqrt{-1}\beta X' \\ \dot{X}' &= \sqrt{-1}\alpha' X' - \sqrt{-1}\beta' X \end{aligned}$$

二式中消去 X' 可得

$$\ddot{X} - \sqrt{-1}(\alpha + \alpha')\dot{X} - (\alpha\alpha' - \beta\beta')X = 0$$

此式可解出

$$X = M_1 \exp \sqrt{-1}(g_1 t + c_1) + M_2 \exp \sqrt{-1}(g_2 t + c_2) \quad (5.102)$$

其中 M_1, M_2, c_1, c_2 为积分常数; g_1, g_2 为二次方程

$$g^2 - (\alpha + \alpha')g + \alpha\alpha' - \beta\beta' = 0 \quad (5.103)$$

的根。

由于判别式

$$(\alpha + \alpha')^2 - 4(\alpha\alpha' - \beta\beta') = (\alpha - \alpha')^2 + 4\beta\beta' > 0$$

且从(5.93)式知 $D^2 > E^2$, 有

$$\alpha\alpha' - \beta\beta' > 0$$

可知 g_1, g_2 为正根。因此由(5.102)可得解为

$$\left. \begin{aligned} h &= M_1 \sin(g_1 t + c_1) + M_2 \sin(g_2 t + c_2) \\ k &= M_1 \cos(g_1 t + c_1) + M_2 \cos(g_2 t + c_2) \end{aligned} \right\} \quad (5.104)$$

同样方法可求出

$$\left. \begin{aligned} h' &= M_1' \sin(g_1 t + c_1) + M_2' \sin(g_2 t + c_2) \\ k' &= M_1' \cos(g_1 t + c_1) + M_2' \cos(g_2 t + c_2) \end{aligned} \right\} \quad (5.105)$$

系数 M_1', M_2' 与 M_1, M_2 有下列关系

$$\beta M_1' = (\alpha - g_1)M_1, \beta M_2' = (\alpha - g_2)M_2 \quad (5.106)$$

解(5.104), (5.105)式中共 4 个独立积分常数, 可由 $t=0$ 时

初值 $e_0, e_0', \tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_0'$ 定出。

由(5.104)可得:

$$e^2 = h^2 + k^2 = M_1^2 + M_2^2 + 2M_1M_2\cos[(g_1 - g_2)t + C_1 - C_2] \quad (5.107)$$

同理

$$e'^2 = h'^2 + k'^2 = M_1'^2 + M_2'^2 + 2M_1'M_2'\cos[(g_1 - g_2)t + c_1 - c_2] \quad (5.108)$$

此二式可看出偏心率 e, e' 有上下限:

$$\left. \begin{aligned} |M_1| + |M_2| > e > ||M_1| - |M_2|| \\ |M_1'| + |M_2'| > e' > ||M_1'| - |M_2'|| \end{aligned} \right\} \quad (5.109)$$

并有长周期变化, 周期为

$$2\pi/|g_1 - g_2| \quad (5.110)$$

根据木, 土二星的相互摄动, 用它们的轨道根数初值代入可算出相应周期为 70400 年, 木星的 e 在 0.026 到 0 之间, 土星的 e' 在 0.084 到 0.013 之间变化。

其实偏心率变化有上下限的结论, 可直从方程(5.98)式导出。由它可得

$$\beta'(\dot{h}\dot{h} + \dot{k}\dot{k}) + \beta(\dot{h}'\dot{h}' + \dot{k}'\dot{k}') = 0$$

用(5.100)中的 β, β' 代入可积分出为

$$mna^2e^2 + m'n'a'^2e'^2 = C \quad (5.111)$$

其中 C 为积分常数。用初值代入知 $c > 0$, 故 e, e' 变化为有限。

同样可讨论 p, q, p', q' 。若令

$$X = q + \sqrt{-1}p, X' = q' + \sqrt{-1}p'$$

则由(5.99)式得

$$\ddot{X} + \sqrt{-1}(\alpha + \alpha')\dot{X} = 0$$

相应特征方程为

$$f^2 + f(\alpha + \alpha') = 0$$

二根为 $f_2 = 0, f_1 = f = -(\alpha + \alpha')$; 对应的解为

$$\left. \begin{aligned} p &= N_1 \sin(ft + c_1) + N_2 \sin c_2 \\ q &= N_1 \cos(ft + c_1) + N_2 \sin c_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.112)$$

同理可求出 p', q' , 系数定出后得:

$$\left. \begin{aligned} p' &= -\frac{\alpha'}{\alpha} N_1 \sin(ft + C_1) + N_2 \sin c_2 \\ q' &= -\frac{\alpha'}{\alpha} N_1 \cos(ft + c_1) + N_2 \cos c_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.113)$$

类似于 e^2 情况可得

$$\left. \begin{aligned} \gamma^2 &= p^2 + q^2 = N_1^2 + N_2^2 + 2N_1 N_2 \cos(ft + c_1 - c_2) \\ \gamma'^2 &= p'^2 + q'^2 = \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} N_1^2 + N_2^2 - 2\frac{\alpha'}{\alpha} N_1 N_2 \cos(ft + c_1 - c_2) \end{aligned} \right\} \quad (5.114)$$

由此可得 $\gamma = \operatorname{tg} i, \gamma' = \operatorname{tg} i'$ 的变化周期为

$$2\pi/(\alpha + \alpha')$$

上下限分别为

$$\begin{aligned} &|N_1| + |N_2| - ||N_1| - |N_2|| \\ &\frac{\alpha'}{\alpha} |N_1| + |N_2| - \left| \frac{\alpha'}{\alpha} N_1 \right| - |N_2| \end{aligned}$$

对木土二星情况, 周期为 50700 年, 木星轨道倾角 $i = \operatorname{tg}^{-1} \gamma$ 在 $1^\circ 17'$ 到 $2^\circ 2'$ 之间变化; 土星的 $i' = \operatorname{tg}^{-1} \gamma'$ 在 $0^\circ 47'$ 到 $2^\circ 33'$ 之间变化。

以上讨论仅对两个行星情况, 在讨论一阶摄动时, 容易推广到 n 个行星之间的相互摄动。这只要把摄动函数扩充为

$$R = \sum_{i=2}^n R_i = \sum_{i=2}^n G m_i \left(\frac{1}{\Delta_i} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_i}{r_i^3} \right)$$

$$\overline{R} = \sum_{i=2}^n G m_i D_{1n} (h_1^2 + k_1^2 - p_1^2 - q_1^2 + h_i^2 + k_i^2 - p_i^2 - q_i^2)$$

$$+ 2p_1p_i + 2q_1q_i) - 2G \sum_{i=2}^n m_i E_{1i} (h_1 h_i + k_1 k_i) \quad (5.115)$$

其中 D_{1i}, E_{1i} 为行星 P_1 与 P_i 之间的量:

$$\left. \begin{aligned} D_{1i} &= \frac{\alpha_i}{8a_i} B_1^{3/2}(\alpha_i), \quad E_{1i} = \frac{1}{8a_i} B_2^{3/2}(\alpha_i) \\ \alpha_i &= a_1/a_i < 1, (\text{如 } a_i < a_1, \text{取 } \alpha_i = a_i/a_1 \text{ 式中 } a_i \text{ 改为 } a_1) \end{aligned} \right\} \quad (5.116)$$

用上面同样方法可求出。可用类似于上面的复数 X, X' ; 相应的二次方程(5.103)等应为 n 次方程; 在 n 个根为实根情况下, 可解出为:

$$\left. \begin{aligned} h_s &= \sum_{i=1}^n M_{s,i} \sin(g_i t + c_i) \\ k_s &= \sum M'_{s,i} \cos(g_i t + c_i) \end{aligned} \right\} \quad (5.117)$$

对于 p_s, q_s , 相应 n 次方程至少有一零根; 如 $f_1 = 0$, 其余 $n-1$ 个根为不等实根, 则解为

$$\left. \begin{aligned} p_s &= N_{1s} \sin c_1 + \sum_{i=2}^n N_{is} \sin(g f_i t + c_i) \\ q_s &= N_{1s} \cos c_1 + \sum_{i=2}^n N_{is} \cos(f_i t + c_i) \end{aligned} \right\} \quad (5.118)$$

两种情况中, 当 n 次方程中有复根或重根时, 情况稍复杂些, 但解的形式略有差别。而且相应的关系(5.108), (5.114)式仍然成立, 表明各轨道偏心率和倾角仍有上下限。另外, (5.111)式及对应 p, q 方程的关系

$$mna^2r^2 + m'n'a'^2r'^2 = c \quad (5.119)$$

的直接推广结果:

$$\sum_{i=1}^n m_i n_i a_i^2 e_i^2 = c \quad (5.120)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i n_i a_i^2 \gamma_i^2 = c' \quad (5.121)$$

式仍然成立。

以上方法原理和主要结果是拉格朗日在 1776 年得到的；后经勒威耶(1839), 纽康(1895), 斯托克威尔 (J.N.Stockwell, 1870), 勃劳威尔(1947), 斯克里普尼科夫(А.Скрипунников, 1968) 等人进行改进, 考虑了 e, e', γ, γ' 高阶项影响。另外, 希耳还考虑木星和土星之间摄动项中, 短周期项乘积产生的非周期项影响(1895)。经这些人改进后, 现在得到的结果见表 5.1 和 5.2, 其中没有考虑冥王星。

表 5.1 八大行星的 e, i 上下限

星 名	e_{Max}	e_{Min}	i_{Max}	i_{Min}
水 星	0.2317	0.1215	9°10′.7	4°44′.4
金 星	0.0706	0	3°16′.3	0
地 球	0.0677	0	3°6′.0	0
火 星	0.1397	0.0185	5°56′.0	0
木 星	0.0608	0.0255	0°28′.9	0°14′.4
土 星	0.0843	0.0124	1°0′.6	0°47′.3
天 王 星	0.0780	0.0118	1°7′.2	0°54′.4
海 王 星	0.0145	0.0056	0°47′.3	0°33′.7

其中轨道倾角 i 的上下限是相对于太阳系不变平面。

在根数 h, k, p, q 中的相互摄动项中, 各长周期项频率 g_i, f_i 对每个行星都相同, 只是各行星根数摄动项的系数不同。表 5.2 中给出 g_i, f_i (取 f_5 为零根) 值及相应的周期。

2. 高斯方法、同拉格朗日方法类似, 对受摄方程的右端函数取平均而消去周期项。主要适用于不存在摄动函数的受摄方程。

表 5.2

i	$g_i(1/\text{年})$	周期(年)	f_i	周期(年)
1	$+5''.4633$	237220	-5.2015	249160
2	$+7''.3447$	176450	-6.5708	197240
3	$+17.3283$	74791	-18.7436	69144
4	$+18.0023$	71991	-17.6333	73497
5	$+4.2959$	301680	0	—
6	$+27.7741$	46662	-25.7335	50362
7	$+2.7193$	476590	-2.9027	446480
8	$+0.6333$	2046400	-0.6775	1912920

现以摄动三分量 S, T, W 表达的受摄方程出发, 先取 S, T, W 对摄动行星 P' 的平近点角取平均, 定义

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S dM' \\ T_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T dM' \\ W_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W dM' \end{aligned} \right\} \quad (5.122)$$

这种平均值定义仍针对行星间引力摄动情况, 此时存在摄动函数, 故仍可用摄动函数的偏导数表达。若对其他形式不存在摄动函数的摄动, 平均值定义可取更适用的形式, 或用调和分析方法定义。

轨道根数的长期项 $\bar{a}, \bar{e}, \dots$ 定义为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{a}} &= \frac{1}{\pi n \sqrt{1-e^2}} \int_0^{2\pi} \left(e \sin f S_0 + \frac{p}{r} T_0 \right) dM \\ \dot{\bar{e}} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{2\pi n a} \int_0^{2\pi} [\sin f S_0 + (\cos f + \cos E) T_0] dM \end{aligned} \right\} \quad (5.123)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{d\dot{i}}}{dt} &= \frac{1}{2\pi na^2 \sqrt{1-e^2}} \int_0^{2\pi} r \cos u W_0 dM_0 \\
\dot{\bar{Q}} &= \frac{1}{2\pi na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \int_0^{2\pi} r \sin u W_0 dM \\
\dot{\bar{\omega}} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{2\pi nae} \int_0^{2\pi} \left[-\cos f S_0 + \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin f T_0 \right] dM \\
&\quad - \frac{\operatorname{ctg} i}{2\pi na^2 \sqrt{1-e^2}} \int_0^{2\pi} r \sin u W_0 dM \\
\dot{\bar{M}}_0 &= \frac{1}{2\pi nae} \int_0^{2\pi} \left[(1-e^2) \cos f - \frac{2re}{a} \right] S_0 dM \\
&\quad - \frac{1-e^2}{2\pi nae} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin f T_0 dM
\end{aligned}$$

式中积分过程也可用调和分析方法进行。

方法原理由高斯在 1804 年提出，后在 1896 年，亚当斯 (W. S. Adams) 用于计算狮子座流星雨轨道长期摄动时具体化；希耳于 1906 年曾用于计算金星对水星的长期摄动，对此方法有所改进。但到现在为止，用此法讨论天体运动的工作很少。

第六节 关于太阳系稳定性问题

利用本章的结果，可以讨论天文学中的一个基本课题——太阳系的稳定性。在经典天体力学中，这个问题是建立在长期摄动基础上讨论的。

1. 拉普拉斯-拉格朗日定理。早在 1773 年，青年时代的拉普拉斯就宣布，他证明了太阳系的稳定性。实际上他所得结果就是第五章第四节中一阶摄动下，行星轨道半长径 a 只有周期摄动。这就是有些文献中提出的关于太阳系稳定性的拉普拉斯定理。而且拉普拉斯当时还只是把摄动函数展开到 e, e', γ, γ' 的二次幂。

不久后，拉格朗日指出：不能只讨论 a ，如 e, i 有长期摄动也会

影响太阳系的稳定性，并于 1776 年发展了他的长期摄动计算方法，即上节讲述的内容。还推出了(5.120)，(5.121)两个结果。

1784 年，拉普拉斯根据拉格朗日的结果，发表了关于太阳系稳定性的两个定理，文献上称为拉普拉斯-拉格朗日定理：

定理一 每个行星的质量乘上半长径平方根及偏心率平方后，对所有行星求和，则总和是常数加上周期项。用公式表达即

$$\sum_{i=1}^n m_i \sqrt{a_i} e_i^2 = c + PT \quad (5.124)$$

证 用(5.120)式，利用开普勒第三定律

$$n_i^2 a_i^3 = G(1 + m_i)$$

可知

$$n_i a_i^2 = \sqrt{G(1 + m_i)} a_i$$

其中取太阳质量为 1。如只准到一阶摄动，根号中的 m_i 可略去。代入(5.120)式即得

$$\sum_{i=1}^n m_i \sqrt{a_i} e_i^2 = \text{常数}$$

但这是只讨论长期项(包括长周期项)结果，加上周期项后即 为(5.124)式，故定理得证。

定理二 每个行星质量乘上轨道半长径平方根及倾角正切的平方，再对所有行星求和。则总和是常数加上周期项： $\sum_{i=1}^n m_i \sqrt{a_i} \gamma_i^2 = \text{常数} + P.T$ 。

证明方法同定理一样，只是用(5.121)式。

这两个定理说明不仅 a 没有长期摄动，且 e 和 i 也没有。反映出太阳系应该是稳定的。但这只是近似结果，不能作为太阳系是稳定的结论。因为他们讨论中的摄动函数只展开到 e, e', γ, γ' 的二次幂项，这点经后人改进后认为影响不大。另外主要是一阶摄动结果，如讨论到二阶或更高阶摄动，情况可能有变化。这两个定理现在只认为是具有历史意义。

2. 柏松定理。讨论二阶摄动时，柏松于 1809 年得到了著名的定理。在讲述定理之前，先对摄动函数展开式结果形式作些处理，使得展开式的三角函数中只含有两行星的三个轨道根数 Ω , ω , M_0 ；而系数中只包含另三个轨道根数 a, e, i 。

根据 §5.3 的展开结果，摄动函数为

$$\left. \begin{aligned} R &= \sum P \cos Q \\ Q &= pM + p'M' + j\Pi + j'\Pi' \\ &= pM + p'M' + j\omega + j'\omega' - j\phi - j'\phi' \end{aligned} \right\} \quad (5.125)$$

其中 ϕ, ϕ' 为两个辅助量，与 I 一起在图 5.1 中定义。故上式可改为

$$R = \sum P [\cos Q_1 \cos(j\phi + j'\phi') + \sin Q_1 \sin(j\phi + j'\phi')]$$

其中 $Q_1 = pM + p'M' + j\omega + j'\omega'$ ，系数 P 中的

$$\delta^2 = \sin^2 \frac{I}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos I)$$

一起，都是轨道根数 $i, i', \Omega - \Omega'$ 的函数。函数关系除(5.28)式外，还可根据图 5.1 中球面三角形 $NN'I$ ，得到下列关系：

$$\left. \begin{aligned} \cos I &= \cos i \cos i' + \sin i \sin i' \cos(\Omega - \Omega') \\ \sin I \sin \phi &= \sin i' \sin(\Omega - \Omega') \\ \sin I \cos \phi &= \cos i' \sin i - \sin i' \cos i \cos(\Omega - \Omega') \\ \sin I \sin \phi' &= \sin i \sin(\Omega - \Omega') \\ \sin I \cos \phi' &= -\cos i' \cos i + \sin i \sin i' \cos(\Omega - \Omega') \end{aligned} \right\} \quad (5.126)$$

这些关系与(5.28)式一起，可以把 $\cos I, \sin I, \cos \phi, \cos \phi', \sin \phi, \sin \phi'$ 及它们的幂次和倍角三角函数都表达为 $\sin i, \cos i, \sin i', \cos i'$ 的幂次及 $\Omega - \Omega'$ 倍角的三角函数；再把 $\Omega - \Omega'$ 的倍角三角函数并入 Q_1 中，即得形式如：

$$\left. \begin{aligned} R &= \sum P' \cos Q' \\ Q' &= pM + p'M' + j\omega + j'\omega' + s(\Omega - \Omega') \\ P' &= P'(a, a', e, e', i, i') \end{aligned} \right\} \quad (5.127)$$

的展开式。如把非周期项单独列出,则得

$$\left. \begin{aligned} R &= \sum P_0' \cos Q_0' + \sum P' \cos Q' \\ Q_0' &= j\omega + j'\omega' + s(\Omega - \Omega') \end{aligned} \right\} \quad (5.128)$$

在这样的展开式基础上, R 对轨道数的偏导数应分为两类: 对 a, e, i 有

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \sum \frac{\partial P_0'}{\partial a} \cos Q_0' + \sum \frac{\partial P'}{\partial a} \cos Q'$$

e, i 相同, 都是 Q' 及 Q_0' 的余弦级数。而对 Ω, ω, M_0 则为

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = \sum P_0' s \sin Q_0' + \sum P' s \sin Q'$$

ω, M_0 相同, 只是对 M_0 的偏导数没有第一项都是 Q' 及 Q_0' 的正弦级数。代入拉格朗日行星运动方程后; $a, e, di/dt$ 方程右端是 Q', Q_0' 的正弦级数, 而 Ω, ω, M_0 方程右端则都是 Q', Q_0' 的余弦级数。因此积分后的一阶摄动为:

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + \sum A \cos Q' \\ e &= e_0 + e_1 t + \sum A \cos Q' \\ Q_i &= i_0 + i_1 t + \sum A \cos Q' \\ \Omega &= \Omega_0 + \Omega_1 t + \sum B \sin Q' \\ \omega &= \omega_0 + \omega_1 t + \sum B \sin Q' \\ M_0 &= M_{00} + M_{01} t + \sum B \sin Q' \end{aligned} \right\} \quad (5.129)$$

这些结果为行星 P 的轨道根数一阶摄动结果, 用第一节的记号为

$$p = p^{(0)} + m' p^{(0,1)}$$

行星 P' 的轨道根数一阶摄动结果仍为(5.129)式形式只是应记为

$$q = q^{(0)} + m q^{(1,0)}$$

现在用这个结果讨论 a 的二阶摄动, 并证明柏松定理:

行星相互引力摄动下, 轨道半长径不存在摄动长期项, 只有周期项和混合项。

其中的混合项是指时间同周期项的乘积, 文献中又称为柏松

项。

证明从 a 的二阶摄动出发。它应有两项：

$$\left. \begin{aligned} \dot{a}^{(0,2)} &= \sum \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right)_0 p^{(0,1)} \\ \dot{a}^{(1,1)} &= \sum \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right)_0 q^{(1,0)} \end{aligned} \right\} \quad (5.130)$$

其中 F 为拉格朗日行星运动方程中， $\dot{a}$ 方程右端函数：

$$F = \frac{2}{na m'} \frac{\partial R}{\partial M_0} = \sum H \sin Q' \quad (5.131)$$

全部为周期项，系数 H 仍只含有 a, e, i, a', e', i' 。 Q' 中的平近点角 M, M' 应为

$$\left. \begin{aligned} M &= M_0 + \int n dt = M_0 + \rho \\ M' &= M'_0 + \int n' dt = M'_0 + \rho' \end{aligned} \right\} \quad (5.132)$$

在二阶摄动讨论中， F 对 a 的偏导数必需考虑近点角 M 中隐含的 a ，即 ρ 中的 a ，故有

$$\frac{\partial F}{\partial a} \Delta a = \left(\frac{\partial F}{\partial a} \right) \Delta a + \left(\frac{\partial F}{\partial \rho} \right) \Delta \rho$$

其中 $\Delta \rho$ 应为对应 Δa 的摄动，当 $\Delta a = a^{(0,1)}$ 时有

$$\Delta \rho = \rho^{(0,1)} = \int n^{(0,1)} dt = - \frac{3n_0}{2a_0} \int a^{(0,1)} dt \quad (5.133)$$

由前面可得

$$\dot{a}^{(0,2)} = \left(\frac{\partial F}{\partial a} \right)_0 a^{(0,1)} + \left(\frac{\partial F}{\partial \rho} \right)_0 \rho^{(0,1)} + \left(\frac{\partial F}{\partial e} \right)_0 e^{(0,1)} + \dots \quad (5.134)$$

其中 $a^{(0,1)}, e^{(0,1)} \dots$ 为 (5.129) 式中去掉常数项 $a_0, e_0, \dots$ 的剩余项，但要去掉 m' 因子。

(5.134) 式中第一项取偏导数时只考虑 F 展开式系数中的 a ，因此有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)_0 a^{(0,1)} &= \left(\sum \frac{\partial H}{\partial a} \sin Q'\right) \cdot \sum A \cos Q' \\ &= P \cdot T\end{aligned}$$

这是两个纯周期正弦级数与余弦级数相乘, 仍为纯周期正弦级数。
又因

$$\rho^{(0,1)} = -\frac{3n_0}{2a_0} \int a^{(0,1)} dt = \sum k \sin Q'$$

故有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_0 \rho^{(0,1)} &= (\sum H p \cos Q') \cdot \sum k \sin Q' \\ &= P \cdot T\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F}{\partial e}\right)_0 e^{(0,1)} &= t \sum e_1 \frac{\partial H}{\partial e} \sin Q' \\ &+ \left(\sum \frac{\partial H}{\partial e} \sin Q'\right) \cdot \sum A \cos Q' \\ &= t(P \cdot T) + P \cdot T\end{aligned}$$

其中 $t(P \cdot T)$ 即为混合项或柏松项。

同理, $\left(\frac{\partial F}{\partial i}\right)_0 i^{(0,1)}, \left(\frac{\partial F}{\partial \Omega}\right)_0 \Omega^{(0,1)}, \left(\frac{\partial F}{\partial \omega}\right)_0 \omega^{(0,1)}, \left(\frac{\partial F}{\partial M_0}\right)_0 M_0^{(0,1)}$ 结果与 $\left(\frac{\partial F}{\partial e}\right)_0 e^{(0,1)}$ 相同。故积分后可得

$$a^{(0,2)} = t(PT) + (PT) \quad (5.135)$$

同样方法可证明 $a^{(1,1)}$ 也有一致的结果, 这就证明了柏松定理。

至于混合项, 表面看来在 $t \rightarrow \infty$ 时也会到无穷。但很多人都已指出, 这是方法造成的, 可以采用适当变换, 可不再出现混合项。当然, 二阶摄动所得的结果不是太阳系稳定的结论。

3. 高阶摄动的结果。勒威耶和厄日尼提(Egintis), 阿雷杜(Haretu)等人在 19 世纪中后期已指出, 行星轨道半长径存在三

阶微小的长期项。1955年,美弗罗瓦(J. Meffroy)具体推出了 a 的三阶摄动长期项为:

$$\frac{3^3 \times 11}{2^6} m'^3 t a^{7/2} a'^{-9/2} e'^2 \sin(2\omega - 2\omega')$$

后来经多人验证,结果可靠。

但另一方面,在1874年,纽康就提出一种逐次逼近方法,可使行星坐标摄动只出现周期项。后来邦加雷于1893年在他名著《天体力学新方法》中提出一种逼近级数概念,以及一种他称为林德斯特(Lindstedt)正则变换方法(实际上是他本人的),解含小参数的一般三体问题时,得到了以正则根数为变量的逐次逼近解,其中并不包含长期项。

本世纪60年代,李氏级数应用到天体力学中后,不少人用于研究多体问题的解。其中以英国的梅塞奇(P. J. Message)的结果最受重视。他在1976年发表了用李氏级数按邦加雷的正则变换方法,得到了平面多体问题(有一体质量特别大)的逼近解,其中只有周期项(原文发表在论文集《Long-Time Predictions in Dynamics》pp.279-293, D Reidel Publ. Co. 1976)。文中假定了初始轨道(绕大质量体)接近圆形。后来在1982年,又把些结果推广到一般三维空间多体问题,仍有大质量中心体。他在雅可比坐标系(见第六章第二节)基础上采用推广的德洛勒变量,再变换为邦加雷变量。然后用李氏级数定义的正则变换,成功地逐次消除摄动函数中的短周期项和长周期项。最后证明了在任意阶摄动下,每个行星的轨道半长径只有周期摄动(短周期和长周期)(原文发表在《Celestial Mechanics》Vol. 26. pp. 25—39, 1982)。这是迄今为止讨论半长径高阶摄动的最好结果。但仍不能作为太阳系是稳定的结论。

4. 关于太阳系稳定性的阿尔诺德(B. N. Арнольд)定理, KAM理论创立者之一阿尔诺德把KAM理论用于太阳系这个动力

系统，得到了研究太阳系稳定性的定性研究成果。由于 KAM 理论要在“天体力学定性理论”课中讲述，这里只叙述定理内容，并作适当解释。不对定理证明。

定理 若行星质量(相对太阳)，轨道偏心率，轨道倾角都足够小，则对几乎所有的初始条件来说，在行星相互引力摄动下，行星永远是拟周期运动，各自轨道永远保持在一个细小的环面上运动。

其中几乎所有表示除开使行星运动产生轨道共振的条件外。而在相空间初始条件集合中，符合轨道共振条件的子集测度为 0，即定理表明的稳定性差不多是成立，不稳定的概率为 0。而拟周期运动为一种有界的环面上运动。例如某一行星坐标

$$x = (R + r \cos \varphi) \cos \lambda$$

$$y = (R + r \cos \varphi) \sin \lambda$$

$$z = r \sin \varphi$$

而角度 $\lambda = n_1 t + \lambda_0$ ， $\varphi = n_2 t + \varphi_0$ ，其中比值 n_1/n_2 为无理数。则此行星坐标为时间 t 的拟周期函数。如 $R \gg r$ ，则 $t \rightarrow \infty$ 时，行星永远在环面上，环的中心半径为 R ，垂直于 xy 平面的截面半径为 r 。而且永远不会重复到任一经过了的位置。这就是一种简单的拟周期运动。

5. 近年对太阳系稳定性的数值探索。随着电子计算机的不断改进以及数值方法的迅速发展，近年来出现了一大批用数值方法研究太阳系稳定性的工作。多数是研究外行星运动的稳定性(木星开始)，用最大李亚普诺夫特征数 LCN 来表示轨道稳定性。首先发现冥王星的运动是混沌状态，积分 1 百万年后，LCN 值已明显接近 0.05 (原文参见 Sussman G.J; Wisdom, 《Science》Vol, 241, pp. 433—437, 1988)。虽然冥王星运动对太阳系稳定性影响不大，但也提出不可能进行长期预报精确轨道和位置的问题。法国经度局的拉斯卡(J. Laskar)近几年的这方面工作更为系统。他对太阳系 9 大行星的运动一起讨论，采用平均化(去掉短

周期项)的运动方程,用亚当斯方法数值积分,步长为500年,最长积分时间跨度为2亿年。为了进行比较,他还建立了除冥王星外的8大行星分析运动方程,准到二阶摄动以及展开式准到偏心率和倾角的5次幂;其中还考虑了月球运动和相对论的长期影响。还用JPL的DE102历表比较了4400年的计算结果。认为可靠后,再进行计算长时期的LCN值。下面先通俗解释LCN值。

初始轨道同邻近轨道之间距离设为 d ,初值为 $d(0)$,在时间 T 时为 $d(T)$ 。当 $T \rightarrow +\infty$ 时,若有

$$d(T) \sim d(0)e^{\lambda T}$$

则我们称初始轨道的LCN值为 λ 。若 $\lambda > 0$,显然轨道是不稳定,或称运动为混沌。若 $\lambda = 0$,则称为中性稳定,拟周期运动的 $\lambda = 0$ 。若 $\lambda < 0$,则称为渐近稳定(必然是非保守系统)。对于 n 维动力系统,应有 n 个LCN值,一般取 λ 为最大的那个。

拉斯卡用三种不同方案计算 d 的LCN值,得到的 $\lambda \sim 0.2$,表明了太阳系天体运动的混沌状态,绝对不可能成为拟周期运动。他还分析了产生混沌行为的原因主要是几个内行星的轨道长期共振现象(原文见《Nature》Vol. 338. No. 6212. pp. 237--238. 1989)

以上表明了分析方法和数值探索结果相互矛盾。有待进一步研究。

习 题

1 若讨论三个行星 P_1, P_2, P_3 ; 质量分别为 m_1, m_2, m_3 ; 轨道根数分别为六维向量 p, q, r 。试用第一节的方法, 给出一阶摄动项公式。

2. 同上题, 进一步给出某一行星的二阶摄动项的微商表达式。

3. 若天体所受摄动不是其他行星的引力, 而相应的摄动函数为下面形式

$$R = \varepsilon f(p, t)$$

其中 p 为所讨论天体的六个轨道根数。试给出以 p 为变量的一、二阶摄动表达式。

4. 试分析摄动函数展开过程中的主要困难。

5. 讨论(5-32)式中定义的距离 Δ_1 的几何意义, 并用大行星轨道根数值, 验证收敛条件(5.34)是否都能成立。

6. 试用第二节的有关拉普拉斯系数的结果, 证出关系(5.52)式。

7. 导出拉普拉斯系数所满足的微分方程(5.53)式。

8. (5.76)式只给出了 $n=1, 2$ 时的纽康算子, 试继续给出 $n=3$ 时的所有纽康算子的表达式。

9. 若两行星的平均角速度 n, n' 严格通约, 讨论它们一阶摄动与第五章第四节结果有哪些不同? 是否还存在长周期项?

10. 试导出根数 Ω 在另一个行星引力摄动下的二阶摄动结果。

11. 试分析现有讨论太阳系稳定性问题的各种方法, 指出各方法的不足之处。

12. 在讨论长期摄动的拉格朗日方法中, 只有两个行星引力摄动下, 特征方程(5.103)有一个根为 0 时, 对应什么条件, 此时的解如何?

13. 试列出 n 个行星相互摄动情况对应的运动方程 (5.98), (5.99) 式。

第六章 三体问题

三体问题是天体力学中最重要力学模型之一，已有三百多年的研究历史，但至今未能最后解决，仍然是活跃的前沿课题之一。本章仅限于介绍有关三体问题的最基本的结果以及重要有用的特殊三体问题。

第一节 多体问题的运动方程和积分

三体问题是多体问题的特例，故首先讲述多体(N 体)问题的基本结果。虽然在质点组动力学中已学过，但为符号和系统一致起见，这里也简要讲述。

设 n 个质点 P_i 的质量各为 m_i ；在某惯性标架中， P_i 的位置向量为 $\vec{r}_i$ ，令

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$$

为 P_i 到 P_j 的距离向量，则任一质点的在相互引力作用下运动方程可写为：

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = G \sum_{j \neq i}^n \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \quad (6.1)$$

由于天体之间引力为保守力，故右端向量是梯度向量，存在数量函数 U 为：

$$U = \frac{1}{2} G \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = G \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (6.2)$$

使运动方程成为:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \text{Grad}U = \nabla U \quad (6.3)$$

其中 ∇ 为偏微商算子向量, 对 $\vec{r}_i$ 的三个分量 x_i, y_i, z_i 取偏导数。

由于 $i = 1, 2, \dots, n$, (6.3) 式为 n 个 6 阶方程组, 共为 $6n$ 阶。 U 即为 n 体系统的**力函数**。

由方程(6.1)或(6.3)式可得出几个经典积分, 首先从(6.1)式直接可得(因 $\vec{r}_{ij} = -\vec{r}_{ji}$)

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} = 0$$

对时间 t 积分一次可得:

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{A}, \quad \vec{A} = (A_1, A_2, A_3) \quad (6.4)$$

$\vec{A}$ 为常向量, 三个分量 A_1, A_2, A_3 为积分常数, 此式称为 n 体系统运动方程的**动量守恒定律**。

(6.4) 式还可以再积分一次得:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \vec{A}t + \vec{B} \quad (6.5)$$

其中 $\vec{B}$ 也是常向量, 三个分量 B_1, B_2, B_3 也是运动方程的积分常数。由于牛顿力学中, n 质点质心 O 的坐标 $\vec{r}_0$ 应为

$$M\vec{r}_0 = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad M = \sum_{i=1}^n m_i \quad (6.6)$$

因此(6.5)式即为:

$$M\vec{r}_0 = \vec{A}t + \vec{B} \quad (6.7)$$

此式称为 n 体系统的**质心运动守恒定律**, 表明 n 体的质心在惯性坐标系中是等速直线运动。

另外, 因 $\vec{r}_i \times \vec{r}_{ij} = -\vec{r}_j \times \vec{r}_{ji}$, 故由(6.1)式可得

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_i \times \vec{r}_{ij} = 0$$

即

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = 0$$

对 t 积分可得

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \vec{D} \quad (6.8)$$

其中 $\vec{D}$ 的三个分量 D_1, D_2, D_3 也是积分常数。(6.8)式表明 n 体运动的总动量矩为一常向量, 故称为**动量矩守恒定律**。总动量矩向量 $\vec{D}$ 也在惯性坐标系中有固定指向, 故通过质量中心与 $\vec{D}$ 垂直的平面也是固定的, 此平面称为总动量矩平面。太阳系可看成一个 n 体动力系统, 它的总动量矩平面现仍称为拉普拉斯不变平面, 是拉普拉斯首先指出的。

另外从(6.3)式可看出

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^n \dot{\vec{r}}_i \cdot \nabla U = \frac{dU}{dt}$$

即

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \frac{dU}{dt}$$

对 t 积分可得

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = U + E \quad (6.9)$$

其中 T 即为 n 体系统总动能, E 为积分常数。由于力函数 U 即为 n 体总势能反号, 故 $T - U$ 为 n 体总机械能, (6.9)式又称为 n 体系统的**能量(机械能)守恒定律**。

上面已得到(6.4), (6.5), (6.8), (6.9)式共 10 个积分, 其中包含 10 个独立的积分常数: $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, D_1, D_2, D_3, E$ 。这是在 18 世纪欧拉就得到了, 称为 n 体问题的十个经典积分。这 10 个积分反映出在牛顿力学中多体问题具有四个守恒定律: 动量守恒, 质心运动守恒, 动量矩守恒, 总能量守恒。现代提出的大量

新引力理论中，以是否满足这四个守恒定律作为分类标准。四个守恒定律都满足的，称为**全守恒引力理论**；只满足后两个守恒定律的称为**半守恒理论**；四个守恒定律都不满足的称为**不守恒理论**。爱因斯坦的广义相对论是全守恒的引力理论。

自从 10 个经典积分得到后，天文学，数学和力学工作者一直在寻找 n 体问题的新积分。二百多年来的努力，至今尚未实现。

早在 1843 年，雅可比就得出结论，如果 m 阶力学系统已找到 $m-2$ 个初积分，则剩下的两个可以用他提出的方法求出。二体问题为 12 阶已找出 10 个经典积分，正好只差两个，故已解决。三体问题为 18 阶，差 8 个。但是后来的研究表明，不仅未找出新积分，反而出现了一些否定结果。1887 年，勃隆斯(H. Bruns)证明，如用直角坐标和动量作变量，则三体问题除 10 个经典积分外，不存在新的代数积分；而于 1893 年法国人班勒卫(Painlevé)进一步证明，不存在动量的代数函数新积分(坐标可为任意函数)。另外，1889 年邦加雷在《天体力学新方法》第一卷中证明，如以轨道正则根数为变量，则三体问题不存在任何单值解析新积分。即所得积分为所用变量和时间 t 的单值解析函数。这样几乎把寻找新积分的路子堵死了。

19 世纪末，数学家索弗斯·李(Sophus Lie)用李群解释积分的存在性。并对已知初积分分为两类。按照柏松方法，若 $F_1 = C_1, F_2 = C_2 \cdots F_k = C_k$ 为原动力系统正则方程组的初积分，利用每一个积分，一般可用来降低原方程组一阶。但对另一些特殊积分，满足条件，

$$\{F_i; F_k\} = 0 \quad (6.10)$$

则这些积分构成一个特殊系统，称为**对合系统**。若正则方程组有 k 个积分组成对合系统，则可用它们把原方程组降低 $2k$ 阶。这就是著名的李氏定理。

本世纪以来，不少人针对三体问题进行讨论。因为三体问题

已有 10 个经典积分,只要能组合成 9 个积分的对合系统,甚至 8 个积分的对合系统,就可以使三体问题成为可积系统。可是,经过很多人把 10 个经典积分进行各种组合,最多只能得到 6 个积分形成的对合系统。因此三体问题只能最多降低 12 阶,成为 6 阶方程组,具体降阶过程在第三节讲述。

基于一些特殊的三体问题,如限制性三体题等,将在本章后面讨论有关积分问题。

除了上述 10 积分之外, n 体问题还有一些特殊的关系式,如下面介绍的雅可比公式。

在直角坐标中,力函数 U 对所有坐标而言是 -1 阶齐次函数,因而有关系

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \nabla U = -U \quad (6.11)$$

设以 n 体质心为坐标原点,定义 n 体对质心的转动惯量为

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i. \quad (6.12)$$

则

$$\begin{aligned} \ddot{I} &= 2 \left(\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i + \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i \right) \\ &= 2 \left(2T + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \nabla U \right) \\ &= 2(2T - U) = 2(T + E) \end{aligned} \quad (6.13)$$

这就是雅可比公式。

当 $\ddot{I} > 0$, 表明 $\dot{I}$ 增加, 故会出现 $I \rightarrow +\infty$, 整个系统不稳定; 但若 $\ddot{I} < 0$, $\dot{I}$ 递减, 有可能 $I \rightarrow 0$ (I 为正), 也不稳定。故要使 n 体成为稳定的系统, 要有 $\ddot{I} = 0$, 即有

$$2T - U = T + E = 0 \quad (6.14)$$

这是著名的维里(Viril)定理。

第二节 雅可比坐标系

讨论三体问题,有时对 n 体问题,都常用到一种对称性好的相对坐标系,是由雅可比提出的。

在第四章第二节中也给出了一种相对中心体的 n 体受摄运动方程,虽然也是相对运动,但形式不对称,有时在理论上讨论不够方便。雅可比坐标系用下面原则建立。

先只考虑三体系统 P_0, P_1, P_2 ; 它们的质量为 m_0, m_1, m_2 ; 对质心某惯性坐标系的位置向量为 $\vec{r}_i$ 。由上节知,三体力函数为

$$U = G \left(\frac{m_0 m_1}{r_{01}} + \frac{m_2 m_1}{r_{12}} + \frac{m_2 m_0}{r_{20}} \right) \quad (6.15)$$

由于 $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \dots$, 应有关系

$$\nabla_{\vec{r}_1} \frac{1}{r_{12}} = - \nabla_{\vec{r}_2} \frac{1}{r_{12}} \dots \quad (6.16)$$

其中用符号 $\nabla_{\vec{r}_1}$ 表示对 $\vec{r}_1$ 的分量取梯度的运算。另外由于质心为坐标原点,坐标速度都为 0, 则有

$$m_0 \vec{r}_0 + m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0 \quad (6.17)$$

现在说明雅可比坐标系原理,取一组惯性标架为基础,坐标原点可改变。 P_1 的坐标取为相对 P_0 , 即以 P_0 为原点, 记为 $\vec{r}_1'$, 显然有

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 \quad (6.18)$$

而 P_2 则以 P_0, P_1 的质心 G_1 为原点, 坐标记为 $\vec{r}_2'$, 由于 G_1 的坐标应为

$$(m_0 \vec{r}_0 + m_1 \vec{r}_1) / (m_0 + m_1)$$

因此有

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \frac{m_0 \vec{r}_0 + m_1 \vec{r}_1}{m_0 + m_1} = \frac{m_0 + m_1 + m_2}{m_0 + m_1} \vec{r}_2 \quad (6.19)$$

由上面可得:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}_1' &= \frac{1}{m_1} \nabla_{\vec{r}_1} U - \frac{1}{m_0} \nabla_{\vec{r}_0} U = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1} \nabla_{\vec{r}_1'} U \\ \ddot{\vec{r}}_2' &= \frac{m_0 + m_1 + m_2}{m_0 + m_1} \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{m_0 + m_1 + m_2}{(m_0 + m_1) m_2} \nabla_{\vec{r}_2} U\end{aligned}$$

又因 $\vec{r}_1'$, $\vec{r}_2'$ 分别与 $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ 是线性关系, 对 $\vec{r}_1$ 取梯度运算时同 $\vec{r}_0$ 无关, 对 $\vec{r}_2$ 取梯度时则与 $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$ 无关, 因而有

$$\left. \begin{aligned}\ddot{\vec{r}}_1' &= \nabla_{\vec{r}_1'} U \\ \ddot{\vec{r}}_2' &= \nabla_{\vec{r}_2'} U\end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

其中 μ_1, μ_2 称为 P_1, P_2 的折合质量, 定义为

$$\mu_1 = \frac{m_1 m_0}{m_0 + m_1}, \quad \mu_2 = \frac{m_2 (m_0 + m_1)}{m_0 + m_1 + m_2}$$

(6.20)式就是用雅可比坐标系表示的三体问题方程。由于是相对运动方程, 已利用质心运动守恒和动量守恒的积分进行降阶, 故(6.19)为12阶。式中 U 应表为雅可比坐标的函数, 由上面关系容易看出:

$$\left. \begin{aligned}\vec{r}_0 &= -\frac{m_1}{m_0 + m_1} \vec{r}_1' - \frac{m_2}{m_0 + m_1 + m_2} \vec{r}_2' \\ \vec{r}_1 &= \frac{m_0}{m_0 + m_1} \vec{r}_1' - \frac{m_2}{m_0 + m_1 + m_2} \vec{r}_2' \\ \vec{r}_2 &= \frac{m_0 + m_1}{m_0 + m_1 + m_2} \vec{r}_2'\end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

因此有

$$\left. \begin{aligned}r_{01}^2 &= \vec{r}_1' \cdot \vec{r}_1' = r_1'^2 \\ r_{02}^2 &= \left| \vec{r}_2' + \frac{m_1}{m_0 + m_1} \vec{r}_1' \right|^2 \\ r_{12}^2 &= \left| \vec{r}_2' - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \vec{r}_1' \right|^2\end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

三体总动能

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{2} \mu_1 \dot{\vec{r}}_1' \cdot \dot{\vec{r}}_1' + \frac{1}{2} \mu_2 \dot{\vec{r}}_2' \cdot \dot{\vec{r}}_2' \quad (6.23)$$

以上讨论容易推广到 n 体系统情况。设 $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ 为 n 体, 质量为 $m_i, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 。再取 $\vec{r}_3'$ 为以 P_0, P_1, P_2 三体质心为原点的坐标; 并以此类推, $\vec{r}_{n-1}'$ 为 P_{n-1} 点相对于 $P_0, P_1, \dots, P_{n-2}$ 的质心为原点的坐标。所用标架都是同一惯性标架。如设

$$\mu_i = \frac{m_i(m_0 + m_1 + \dots + m_{i-1})}{m_0 + m_1 + \dots + m_i} \quad (6.24)$$

为 P_i 的折合质量, 则 n 体在雅可比坐标系下的运动方程为

$$\mu_i \ddot{\vec{r}}_i' = -\nabla U \quad (6.25)$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$; U 为 n 体系统的力函数。

现在回到三体问题情况。用雅可比坐标也可化为正则方程组。

就以 P_1, P_2 的坐标 $\vec{r}_1', \vec{r}_2'$ 为广义坐标 $q = (x_1', y_1', z_1', x_2', y_2', z_2')$, 相应的广义动量可用

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = (\mu_1 \dot{x}_1', \mu_1 \dot{y}_1', \mu_1 \dot{z}_1', \mu_2 \dot{x}_2', \mu_2 \dot{y}_2', \mu_2 \dot{z}_2') \quad (6.26)$$

即可将运动方程(6.20)改为正则方程组:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ H &= T - U \\ &= \frac{1}{2\mu_1} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \\ &\quad + \frac{1}{2\mu_2} (\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2 + \dot{q}_6^2) - U \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

下面利用正则变换对三体运动方程进一步降价。先介绍雅可比变换。

第三节 用雅可比变换降阶

为了全面了解雅可比变换的降阶过程, 本节仍从惯性坐标系下的 18 阶三体问题运动方程出发。设三体为 P_i' , 质量为 m_i , 在某惯性坐标系下的位置向量为 $\vec{r}_i, i=1,2,3$ 。以三体的 9 个坐标记为 $q=(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3)$, 相应的动量 $p=(m_1\dot{x}_1, m_1\dot{y}_1, m_1\dot{z}_1, m_2\dot{x}_2, m_2\dot{y}_2, m_2\dot{z}_2, m_3\dot{x}_3, m_3\dot{y}_3, m_3\dot{z}_3)$ 与 q 互为正则共轭, 运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \quad p = -\frac{\partial H}{\partial q}, \\ H &= T - U = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_i} \left(\dot{p}_{3i-2}^2 + \dot{p}_{3i-1}^2 + \dot{p}_{3i}^2 \right) \\ &\quad - G \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

现用第三章第四节中隐函数定义的正则变换, 采用定理三的形式, 设新变量为 (v, u) 。雅可比取生成函数 $S' = S'(q, u)$, 具体定义为:

$$\begin{aligned} S' &= u_1(q_4 - q_1) + u_2(q_5 - q_2) + u_3(q_6 - q_3) \\ &\quad + u_4 \left(q_7 - \frac{m_1 q_1 + m_2 q_4}{m_1 + m_2} \right) + u_5 \left(q_8 - \frac{m_1 q_2 + m_2 q_5}{m_1 + m_2} \right) \\ &\quad + u_6 \left(q_9 - \frac{m_1 q_3 + m_2 q_6}{2m_1 + m_2} \right) + u_7(m_1 q_1 + m_2 q_4 + m_3 q_7) \\ &\quad + u_8(m_1 q_2 + m_2 q_5 + m_3 q_8) + u_9(m_1 q_3 + m_2 q_6 + m_3 q_9) \end{aligned} \quad (6.29)$$

则关系:

$$p = \frac{\partial S'}{\partial q}, \quad v = -\frac{\partial S'}{\partial u} \quad (6.30)$$

为正则变换。上式各分量写出为:

$$\begin{aligned}
v_1 &= q_4 - q_1, \quad v_2 = q_5 - q_2, \quad v_3 = q_6 - q_3 \\
v_4 &= q_7 - \frac{m_1 q_1 + m_2 q_4}{m_1 + m_2}, \quad v_5 = q_8 - \frac{m_1 q_2 + m_2 q_5}{m_1 + m_2} \\
v_6 &= q_9 - \frac{m_1 q_3 + m_2 q_6}{m_1 + m_2}, \quad v_7 = m_1 q_1 + m_2 q_4 + m_3 q_7 \\
v_8 &= m_1 q_2 + m_2 q_5 + m_3 q_8, \quad v_9 = m_1 q_3 + m_2 q_6 + m_3 q_9
\end{aligned} \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned}
p_1 &= -u_1 - \frac{m_1 u_4}{m_1 + m_2} + m_1 u_7 \\
p_2 &= -u_2 - \frac{m_1 u_5}{m_1 + m_2} + m_1 u_8 \\
p_3 &= -u_3 - \frac{m_1 u_6}{m_1 + m_2} + m_1 u_9 \\
p_4 &= u_1 - \frac{m_2 u_4}{m_1 + m_2} + m_2 u_7 \\
p_5 &= u_2 - \frac{m_2 u_5}{m_1 + m_2} + m_2 u_8, \\
p_6 &= u_3 - \frac{m_2 u_6}{m_1 + m_2} + m_2 u_9.
\end{aligned} \quad (6.32)$$

$$p_7 = u_4 + m_3 u_7, \quad p_8 = u_5 + m_3 u_8, \quad p_9 = u_6 + m_3 u_9$$

注意,坐标变换(6.31)与上节(6.17),(6.18),(6.19)式一样,只是因取三体质心为坐标原点,对应的 $v_7 = v_8 = v_9 = 0$ 。因此上面正则变换,正是雅可比坐标变换的正则扩充。新坐标 (v_1, v_2, v_3) 即 P_2' 相对 P_1' 的坐标,标架未变; (v_4, v_5, v_6) 即 P_3' 相对 P_1' 同 P_2' 的质心坐标; (v_7, v_8, v_9) 为三体质心坐标。同样可看出: (u_1, u_2, u_3) 为上节的 $\vec{u_1 r_1'}$, (u_4, u_5, u_6) 为上节的 $\vec{\mu_2 r_2'}$, (u_7, u_8, u_9) 为三体质心的动量分量。如果以三体质心为坐标原点则有

$$v_7 = v_8 = v_9 = u_7 = u_8 = u_9 = 0 \quad (6.33)$$

即变换后新正则方程组已降 6 阶,成为

$$\dot{v} = \frac{\partial H}{\partial u}, \quad u = -\frac{\partial H}{\partial v} \quad (6.34)$$

H 不变

v, u 只有六个分量, 为 12 阶方程组。

雅可比又给出第二个变换, 再对(6.34)式降阶。但先要说一下原动量矩积分在上面变换后的形式。惯性坐标下的动量矩积分为

$$\sum_{i=1}^3 m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \vec{D}$$

换为新变量, 可用(6.21)式代入即得:

$$\vec{D} = \mu_1 \vec{r}_1' \times \dot{\vec{r}}_1' + \mu_2 \vec{r}_2' \times \dot{\vec{r}}_2'$$

用新变量 v, u 写出即为

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= v_2 u_3 - v_3 u_2 + v_5 u_6 - v_6 u_5 \\ D_2 &= v_3 u_1 - v_1 u_3 + v_6 u_4 - v_4 u_6 \\ D_3 &= v_1 u_2 - v_2 u_1 + v_4 u_5 - v_5 u_4 \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

(D_1, D_2, D_3) 为三个动量矩积分常数, 也是总动量矩 $\vec{D}$ 在坐标架上的分量。

雅可比的第二个变换为第三章第四节定理三的推理 2 形式。用 (Q, P) 表示新变量, 定义正则变换的生成函数 $S = S(u, Q)$, 也不显含时间 t , 具体形式为:

$$\begin{aligned} S = & - (u_2 \sin Q_5 + u_1 \cos Q_5) Q_1 \cos Q_3 \\ & - Q_1 \sin Q_3 \sqrt{(u_2 \cos Q_5 - u_1 \sin Q_5)^2 + u_3^2} \\ & - (u_5 \sin Q_6 + u_4 \cos Q_6) Q_2 \cos Q_4 \\ & - Q_2 \sin Q_4 \sqrt{(u_5 \cos Q_6 - u_4 \sin Q_6)^2 + u_6^2} \end{aligned} \quad (6.36)$$

则函数关系

$$v = - \frac{\partial S}{\partial u}, \quad P = - \frac{\partial S}{\partial Q}$$

为正则变换, 具体分量形式为

$$v_1 = Q_1 \cos Q_5 \cos Q_3 - \frac{Q_1 (u_2 \cos Q_5 - u_1 \sin Q_5) \sin Q_3 \sin Q_5}{\sqrt{(u_2 \cos Q_5 - u_1 \sin Q_5)^2 + u_3^2}}$$

$$\begin{aligned}
v_2 &= Q_1 \sin Q_5 \cos Q_3 + \frac{Q_1 (u_2 \cos Q_5 - u_1 \sin Q_5) \sin Q_3 \cos Q_5}{\sqrt{(u_2 \cos Q_5 - u_1 \sin Q_5)^2 + u_3^2}} \\
v_3 &= \frac{Q_1 u_3 \sin Q_3}{\sqrt{(u_2 \cos Q_5 - u_1 \sin Q_5)^2 + u_3^2}} \\
v_4 &= Q_2 \cos Q_6 \cos Q_4 - \frac{Q_2 (u_5 \cos Q_6 - u_4 \sin Q_6) \sin Q_4 \sin Q_6}{\sqrt{(u_5 \cos Q_6 - u_4 \sin Q_6)^2 + u_6^2}} \\
u_5 &= Q_2 \cos Q_6 \sin Q_4 - \frac{Q_2 (u_5 \cos Q_6 - u_4 \sin Q_6) \sin Q_4 \sin Q_6}{\sqrt{(u_5 \cos Q_6 - u_4 \sin Q_6)^2 + u_6^2}} \\
u_6 &= \frac{Q_2 u_6 \sin Q_6}{\sqrt{(u_5 \cos Q_6 - u_4 \sin Q_6)^2 + u_6^2}} \\
P_1 &= (u_2 \sin Q_5 + u_1 \cos Q_5) \cos Q_3 \\
&\quad + \sin Q_3 \sqrt{(u_2 \cos Q_5 - u_1 \sin Q_5)^2 + u_3^2} \\
P_2 &= (u_5 \sin Q_6 + u_4 \cos Q_6) \cos Q_4 \\
&\quad + \sin Q_3 \sqrt{(u_5 \cos Q_6 - u_4 \sin Q_6)^2 + u_6^2} \\
P_3 &= -Q_1 (u_2 \sin Q_5 + u_1 \cos Q_5) \sin Q_3 \\
&\quad + Q_1 \cos Q_3 \sqrt{(u_2 \cos Q_5 - u_1 \sin Q_5)^2 + u_3^2} \\
P_4 &= -Q_2 (u_5 \sin Q_6 + u_4 \cos Q_6) \sin Q_4 \\
&\quad + Q_2 \cos Q_4 \sqrt{(u_5 \cos Q_6 - u_4 \sin Q_6)^2 + u_6^2} \\
P_5 &= (u_2 \cos Q_5 - u_1 \sin Q_5) Q_1 \cos Q_3 \\
&\quad - \frac{Q_1 \sin Q_3 (u_2 \cos Q_5 - u_1 \sin Q_5) (u_2 \sin Q_5 + u_1 \cos Q_5)}{\sqrt{(u_2 \cos Q_5 - u_1 \sin Q_5)^2 + u_3^2}} \\
P_6 &= (u_5 \cos Q_6 - u_4 \sin Q_6) Q_1 \cos Q_4 \\
&\quad - \frac{Q_2 \sin Q_4 (u_5 \cos Q_6 - u_4 \sin Q_6) (u_5 \sin Q_6 + u_4 \cos Q_6)}{\sqrt{(u_5 \cos Q_6 - u_4 \sin Q_6)^2 + u_6^2}}
\end{aligned}
\tag{6.37}$$

此变换看起来复杂,但分析新坐标和动量的意义就清楚了。

由于 (v_1, v_2, v_3) 为 P_2 相对 P_1 的坐标,即上节的 $\vec{r}_1'$,由上式知

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = Q_1^2$$

即 $Q_1 = r_1'$ (6.38)

另外由于 P_2 相对 P_1 的运动, 受到 P_3 的引力摄动。如用吻切轨道根数, 则 P_2 的坐标仍可用二体问题结果:

$$\vec{r}_1' = r_1' \cos f_1 \vec{P} + r_1' \sin f_1 \vec{Q}$$

在惯性参考架上的分量 (v_1, v_2, v_3) 可表为

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= Q_1 (\cos \Omega_1 \cos u_1' - \sin \Omega_1 \sin u_1' \cos i_1) \\ v_2 &= Q_1 (\sin \Omega_1 \cos u_1' + \cos \Omega_1 \sin u_1' \cos i_1) \\ v_3 &= Q_1 \sin u_1' \sin i_1 \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

其中 Ω_1, i_1 为 P_2' 相对 P_1' 运动吻切轨道面对坐标 xy 面的升交点经度和倾角; $u_1' = f_1 + \omega_1$, ω_1 为近点角矩, f_1 为 P_2 在吻切轨道上的真近点角。用(6.39)式与(6.37)中的 v_1, v_2, v_3 式比较, 即可看出关系为

$$\left. \begin{aligned} Q_5 &= \Omega_1, \quad Q_3 = u_1' \\ \cos i_1 &= \frac{u_2 \cos Q_5 - u_1 \sin Q_5}{\sqrt{(u_2 \cos Q_5 - u_1 \sin Q_5)^2 + u_3^2}} \\ \sin i_1 &= \frac{u_3}{\sqrt{(u_2 \cos Q_5 - u_1 \sin Q_5)^2 + u_3^2}} \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

但 u_1, u_2, u_3 为 P_2 按折合质量 μ_1 相对 P_1 点运动的动量, 在标架 P_1-xyz 上的三个分量; 即(6.27)式中的 p_1, p_2, p_3 。因此 $u_2 \cos Q_5 - u_1 \sin Q_5$ 为动量在 xy 平面上垂直于交点方向的分量; u_3 为动量在 z 轴上分量。故 $\cos i_1, \sin i_1$ 用(6.40)式表达是合理的。

同理, Q_2 为 P_3' 相对 P_1', P_2' 质心 G_1 的向径, 若用 Ω_2, i_2, u_2' 表示此相对运动同样的量, 则

$$\left. \begin{aligned} Q_6 &= \Omega_2, \quad Q_4 = u_2' \\ \cos i_2 &= \frac{u_5 \cos Q_6 - u_4 \sin Q_6}{\sqrt{(u_5 \cos Q_6 - u_4 \sin Q_6)^2 + u_6^2}} \\ \sin i_2 &= \frac{u_6}{\sqrt{(u_5 \cos Q_6 - u_4 \sin Q_6)^2 + u_6^2}} \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

里面的 i_1, i_2 不是所讨论的基本变量, 只作为辅助变量。又因 xy 系要选惯性参考架, 可选三体不变平面(总动量矩平面)为 xy 平面, z 轴即与总动量矩向量重合。则相应总动量矩积分常数 D_1, D_2, D_3 应为

$$D_1 = D_2 = 0, \quad D_3 = D(\text{总动量矩大小}) \quad (6.42)$$

故用变换(6.37)式把动量矩积分(6.35)式化为新变量后可得:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= P_3 \sin i_1 \sin Q_5 + P_4 \sin i_2 \sin Q_6 = 0 \\ D_2 &= P_3 \sin i_1 \cos Q_5 + P_4 \sin i_2 \cos Q_6 = 0 \\ D_3 &= P_3 \cos i_1 + P_4 \cos i_2 = P_5 + P_6 = D \end{aligned} \right\} \quad (6.43)$$

下面利用这些关系式对(6.34)式进行降阶。

若所讨论的三体初始运动不在同一平面上, 即不是平面三体问题。应有 $i_1 \neq 0, i_2 \neq 0$ 。可把(6.43)式中的前两式看作 $\sin i_1, \sin i_2$ 的线性齐次方程组, 有非零解的条件为系数行列式

$$\begin{aligned} &P_3 P_4 \begin{vmatrix} \sin Q_5 & \sin Q_6 \\ \cos Q_5 & \cos Q_6 \end{vmatrix} \\ &= P_3 P_4 \sin(Q_5 - Q_6) = 0 \end{aligned} \quad (6.44)$$

用同样两式还可导出:

$$P_3 \sin i_1 + P_4 \sin i_2 \cos(Q_5 - Q_6) = 0 \quad (6.45)$$

因 P_3, P_4 为 P_2', P_3' 在雅可比坐标系中的动量矩大小应大于 0, 故只有

$$\left. \begin{aligned} \sin(Q_5 - Q_6) &= 0, \quad \cos(Q_5 - Q_6) = -1 \\ Q_5 - Q_6 &= 180^\circ, \quad \Omega_1 - \Omega_2 = 180^\circ \end{aligned} \right\} \quad (6.46)$$

上面结果反映出三体问题的两个升交点经度存在简单关系, 由雅可比在 1845 年发现称为雅可比的交线消去定理:

定理 三体 P_1', P_2', P_3' 的运动过程中, P_2' 相对 P_1' 的吻切轨道面与不变平面的交线永远与 P_3' 相对于 P_1', P_2' 质心 G_1 的吻切轨道与不平面的交线平行, 且升交点方向相反。

(6.46)式的关系也算一个积分, 但不含积分常数, 故为特殊积

分。反映出两个相对运动的升交点经度只有一个独立的。在降阶过程中也有作用。

经过雅可比的第二次变换后，因变换(6.37)式不显含时间 t ，故哈密顿函数不变，化为新变量：

$$\begin{aligned}
 H = T - U = & \frac{1}{2\mu_1} \left[P_1^2 + \frac{P_3^2}{Q_1^2} \right] + \frac{1}{2\mu_2} \left(P_2^2 + \frac{P_4^2}{Q_2^2} \right) \\
 & - \frac{Gm_1m_2}{Q_1} - Gm_1m_3 \left[Q_2^2 - 2Q_1Q_2 \frac{\mu_1}{m_1} \left(\cos Q_3 \cos Q_4 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{D^2 - P_3^2 - P_4^2}{2P_3P_4} \sin Q_3 \sin Q_4 \right) + \frac{\mu_1^2}{m_1^2} Q_1^2 \right]^{-1/2} \\
 & - Gm_2m_3 \left[Q_2^2 + 2Q_1Q_2 \frac{\mu_1}{m_2} \left(\cos Q_3 \cos Q_4 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{D^2 - P_3^2 - P_4^2}{2P_2P_4} \sin Q_3 \sin Q_4 \right) + \frac{\mu_1^2}{m_2^2} Q_1^2 \right]^{-1/2}
 \end{aligned} \quad (6.47)$$

其中 $D = P_5 + P_6$ 。故 H 中不显含 Q_5, Q_6 为循环坐标，相应

$$P_5 = \text{常数}, P_6 = \text{常数} \quad (6.48)$$

$D = P_5 + P_6$ 也是积分常数。因此相应新哈密顿正则方程为

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} \quad (6.49)$$

$i = 1, 2, 3, 4$ 为 8 阶方程组。

最后，(6.49)式中 H 不显含时间 t ，可利用能量积分

$$H = E(\text{常数}) \quad (6.50)$$

解出任何一个变量，例如 P_1 为

$$\begin{aligned}
 P_1 &= K(P_2, P_3, P_4, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, E) \\
 &= K(P_2, P_3, P_4, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, H)
 \end{aligned} \quad (6.51)$$

但因(6.49)式原为求过偏导数形式，求偏导数前不能用 $H = E$ 。

故用(6.51)式对 Q_i 取偏导数有

$$0 = \left(-\frac{\partial K}{\partial Q_i} \right) + \frac{\partial K}{\partial E} \frac{\partial H}{\partial Q_i}$$

即

$$\left(\frac{\partial K}{\partial Q_i}\right) - \frac{\partial K}{\partial E} \dot{P}_i = 0$$

其中带括号的项不管 E 或 H 中的 Q_i , 同样

$$0 = \left(\frac{\partial K}{\partial P_i}\right) + \frac{\partial K}{\partial E} \dot{Q}_i = 0, \quad i \neq 1$$

而

$$1 = 0 + \frac{\partial K}{\partial E} \dot{Q}_1$$

即

$$\frac{dt}{dQ_1} = \frac{\partial K}{\partial E} \quad (6.52)$$

此式为 t 同 Q_1 的关系式, 可用 Q_1 代替 t 作为自变量。利用上面关系, 可得按 Q_1 为自变量的方程为:

$$\frac{dP_i}{dQ_1} = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \quad \frac{dQ_i}{dQ_1} = \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad (6.53)$$

$i = 2, 3, 4$ 。其中括号去掉, 但理解为 K 对 Q_i, P_i 求偏导数时, 不管 E 或 H 中隐含的量, 只是把 E 作常数对待。

这样就得到了一般三体问题降到 6 阶的结果。至今尚未能降得更低。除雅可比外, 拉格朗日, 邦加雷也有降阶方法。

平面三体问题可降到 4 阶。

第四节 三体问题的定型解

由于二体问题中, 二体相对质心的运动是一种定型解, 即二体绕质心的运动为相似轨道, 也就是偏心率相同的圆锥曲线轨道(包括退化后的直线运动)。对于多体问题, 自然地会联想到是否有类似的轨道, 即多体沿相似的轨道运动, 而且多体构成的形状不变。一般多体问题的结果, 到现在还不多。而三体问题有较全面的结果, 是一般三体问题的特解。因在 1772 年, 由拉格朗日首先提出, 故这些特解又称为拉格朗日特解。

1. 定型解存在的条件方程。仿照二体问题情况, 如果三体问题的运动方程能化为二体问题的形式, 则定型解会存在。

仍以质心为坐标原点, 在某惯性坐标系中, 三体 P_i 的运动方程为:

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \quad (6.54)$$

其中 $i, j = 1, 2, 3$; m_j 为 P_j 质量, $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ 。若要三体的运动方程能化为与二体问题类似形式, 应有:

$$\ddot{\vec{r}}_i = -\omega^2 \vec{r}_i \quad (6.55)$$

其中 ω 为三体共同的参量, 比较上二式可得条件:

$$\left. \begin{aligned} G(m_2 r_{12}^{-3} \vec{r}_{12} - m_3 r_{31}^{-3} \vec{r}_{31}) &= -\omega^2 \vec{r}_1 \\ G(m_3 r_{23}^{-3} \vec{r}_{23} - m_1 r_{12}^{-3} \vec{r}_{12}) &= -\omega^2 \vec{r}_2 \\ G(m_1 r_{31}^{-3} \vec{r}_{31} - m_2 r_{23}^{-3} \vec{r}_{23}) &= -\omega^2 \vec{r}_3 \end{aligned} \right\} \quad (6.56)$$

此三式不独立, 分别乘 m_1, m_2, m_3 相加可得

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 = 0 \quad (6.57)$$

此式反映质心在原点。可在(6.56), (6.57)式中消去 $\vec{r}_3$, 利用关系 $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\vec{r}_{23} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2$, $\vec{r}_{31} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3$ 可得关系。

$$\left. \begin{aligned} [\omega^2 - G(m_1 + m_3)r_{31}^{-3} - Gm_2 r_{12}^{-3}] \vec{r}_1 + G(r_{12}^{-3} - r_{31}^{-3}) m_2 \vec{r}_2 &= 0 \\ Gm_1 [r_{12}^{-3} - r_{23}^{-3}] \vec{r}_1 + [\omega^2 - Gm_1 r_{12}^{-3} - G(m_2 + m_3)r_{23}^{-3}] m_2 \vec{r}_2 &= 0 \\ m_1 [\omega^2 - Gm_2 r_{23}^{-3} - G(m_1 + m_3)r_{31}^{-3}] \vec{r}_1 + [\omega^2 - Gm_1 r_{31}^{-3} - G(m_2 + m_3)r_{23}^{-3}] m_2 \vec{r}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.58)$$

这就是三体有定型解的条件, 如能满足, 则存在定型解。

2. 等边三角形特解。若 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ 永远线性无关, 即三体质心 0 与 m_1, m_2 不共线。则(6.58)式成立时, 必须 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ 的系数为 0。但从(6.58)式知, 只要满足:

$$\left. \begin{aligned} r_{12} = r_{23} = r_{31} = r \\ \omega^2 = G \frac{m_1 + m_2 + m_3}{r^3} = \frac{GM}{r^3} \end{aligned} \right\} \quad (6.59)$$

则(6.58)式的 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ 的系数全部为 0。这就是说, 只要满足条件(6.59)式, 则(6.58)式成立, 相应的(6.56)式也满足(容易验证), 于是定型解存在。

这种定型解为三体组成等边三角形, 故又称为**等边三角形特解**。由于对每一体而言, 运动方程都是(6.55)式:

$$\ddot{\vec{r}}_i = -\omega^2 \vec{r}_i$$

可得面积积分:

$$\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \vec{h} \quad (6.60)$$

反映出三体在惯性坐标系中都是平面运动; 显然, 三体组成的平面就是三体所运动的平面, 而且在惯性坐标系中为不变平面。

利用(6.59)式, 运动方程可写为

$$\ddot{\vec{r}}_i = -\frac{GM}{r^3} \vec{r}_i = -\frac{GM}{r_i^3} \left(\frac{r_i}{r} \right)^3 \vec{r}_i \quad (6.61)$$

从 $|\vec{r}_{ij}| = r$, 以及质心在坐标原点的关系(5.67)式, 容易推出下面关系:

$$\left. \begin{aligned} \frac{r_1}{r} &= \frac{\sqrt{m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3}}{M} \\ \frac{r_2}{r} &= \frac{\sqrt{m_3^2 + m_1^2 + m_1 m_2}}{M} \\ \frac{r_3}{r} &= \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2}}{M} \end{aligned} \right\} \quad (6.62)$$

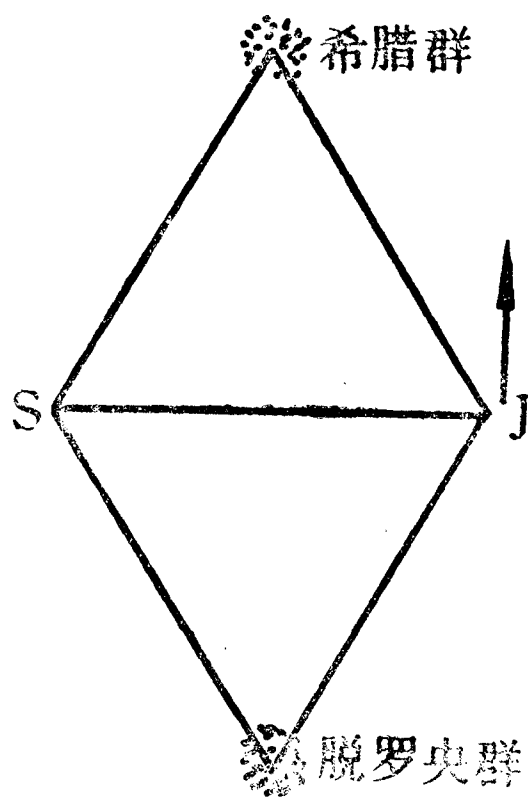
即 r_i/r 为常数, 只与三体质量有关, 记为 k_i 。于是(6.61)式完成化为二体问题方程。可知三体相对于质心的运动轨道为圆锥曲线。而且可以证明三体的圆锥曲线的偏心率相等。

相应的活力积分为:

$$v_i^2 = \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = GMk_i^3 \left(\frac{2}{r_i} - \frac{1}{a_i} \right) \quad (6.63)$$

从等边三角形条件可以求出, 三体的圆锥曲线轨道的 a_i 可能不相等, 但在椭圆轨道时, 周期却相等。

拉格朗日得到的等边三角形特解是 1772 年发表, 直到 1906 年, 德国天文学家沃尔夫(M. Wolf, 1863—1932)发现 588 号小行星(Achilles), 证实它同太阳, 木星几乎成等边三角形。以后陆续发现几十颗, 分别集中在木星轨道上, 在木星的前 60° 和后 60° 的附近(参看图 6.1)。



图中 S, J 分别为太阳和木星位置。在木星前(图中为上方) 60° 处集中的小行星称为希腊群(Greeks); 已定号的有 588 号, 624 号(Hektor), 659 号(Nestor), 911 号(Agamemnon), 1143 号(Odysseus), 1404 号(Ajas), 1437 号(Diomedes), 1583 号(Antilocus), 1647 (Menelaus), 1749 号(Telamon)等。在木星后 60° 处集中的小行星称为脱罗央群(Trojans); 已定号的有 617 号(Patroclus), 884 号(Priamus),

图6·1 脱罗央群小行星 1172 号(Aeneas), 1173 号(Anchises), 1208 号(Troilus)等。统一称为脱罗央群, 以希腊神话中脱罗伊战争双方: 希腊和脱罗伊的人物命名。

太阳, 木星的等边三角形解附近能聚集小行星, 反映出此解是稳定的。

3. 共线特解。若 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ 共线, 则由关系 $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 = 0$ 知, 三体在一直线上, 设顺序为 m_1, m_2, m_3 , 并不失一般性。以 m_1 到 m_3 为正方向, 若令

$$\left. \begin{aligned} r_{12} &= r \\ r_{23} &= x r \\ r_{13} &= (1+x)r \end{aligned} \right\} \quad (6.62)$$

由于三体质心必然在 m_1, m_3 之间, 故 $r_1 < 0, r_2$ 可正可负, $r_3 > 0$, 总有

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 = 0 \quad (6.63)$$

再利用关系 $r_2 = r_1 + r_{12}, r_3 = r_1 + r_{13}$, 可导出:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= -\frac{m_2 + (1+x)m_3}{M} r \\ r_2 &= \frac{m_1 - m_3 x}{M} r \\ r_3 &= \frac{(1+x)m_1 + x m_3}{M} r \end{aligned} \right\} \quad (6.64)$$

代入条件方程 (6.58) 式中的任意两式(因三式中只有两个独立), 如代入第一、三式得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{G m_2}{r^2} + \frac{G m_3}{(1+x)^2 r^2} &= \frac{\omega^2}{M} [m_2 + (1+x)m_3] r \\ \frac{G m_2}{x^2 r^2} + \frac{G m_1}{(1+x)^2 r^2} &= \frac{\omega^2}{M} [(1+x)m_1 + x m_2] r \end{aligned} \right\} \quad (6.65)$$

由此二式消去 ω^2 得:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)x^5 + (3m_1 + 2m_2)x^4 + (3m_1 + m_2)x^3 \\ - (m_2 + 3m_3)x^2 - (2m_2 + 3m_3)x - (m_2 - m_3) = 0 \end{aligned} \quad (6.66)$$

从 x 的定义知应为正实数, 但上面由条件方程导出的 x 的五次方程正好只有一个正实根, 数值为三体质量的函数。这表明一种质量分布对应一个 x 值, 相应一族单参数(r)的共线解。解出的

ω 值代入(6.65)式中任一式可求出对应的 ω^2 为:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{GM}{r^3} \frac{m_2(1+x)^2 + m_3}{m_2(1+x)^2 + m_3(1+x)^3} \\ &= \frac{GM}{r^3} \frac{m_1x^2 + m_2(1+x)^2}{m_1x^2(1+x)^2 + m_2x^3(1+x)^3} \\ &= \frac{GM}{r^3} \frac{m_1x^2 - m_3}{m_1x^2 - m_3x^3}\end{aligned}\quad (6.67)$$

由(6.64)式已看出 r_i/r 为常数, 只与三体质量有关, 仍记为 k_i ; 则三体的运动方程可化为与等边三角形情况相同的(6.61)式。

$$\ddot{\vec{r}}_i = -\omega^2 \vec{r}_i = -\left[GM\left(\frac{r_i}{r}\right)^3 \frac{m_1x^2 - m_3}{m_1x^2 - m_3x^3}\right] \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \quad (6.68)$$

故三体的轨道仍为圆锥曲线, 而且都在惯性坐标系中的同一固定平面上。圆锥曲线的偏心率相同; 如果为椭圆轨道, 则周期也相同。关于共线特解的稳定情况, 结论是不稳定的。

三体问题定型解的稳定性讨论, 与限制性三体问题特解的情况相同, 将在第六章第六节中讨论。

第五节 限制性三体问题

在研究一般三体问题同时, 对一些特殊的三体问题模型也进行研究, 其中成果最多, 应用最广的是限制性三体问题。这个模型是根据太阳系中一些小天体情况建立起来的, 基本结果由拉格朗日, 雅可比和希耳等人建立, 在本世纪中又有新的发展。

1. 模型和运动方程, 限制性三体问题是讨论三个质点在相互引力作用(按牛顿力学)下的运动规律, 但其中一体的质量认为是无限小, 即它对其余二体的引力可忽略不计, 而只考虑其余二体对它的引力。三体中, 无限小质量体 P 以外的二体称为有限体, 其中

质量较大的 P_1 用 m_1 表示质量, 较小的 P_2 记为 m_2 。

二有限体运动只有相互吸引, 因而是二体问题。它们相对运动及相对于质心的轨道都是圆锥曲线, 而且偏心率相同; 在椭圆运动情况中, 周期也相同。

由于二体问题的轨道为平面曲线, 此平面在惯性坐标系中为静止; 故可取为惯性参考面, 取为 $\xi\eta$ 平面。 ξ, η 轴指向固定方向; ζ 轴取为此平面法线方向, 使 ξ, η, ζ 三轴成右手系。再采用第六章第二节中定义的雅可比坐标: P_2 相对 P_1 运动; P 相对于 P_1, P_2 的质心 G 运动; 标架都用 $\xi\eta\zeta$ 系。现先列出 P 相对 G 的方程。设 r_1, r_2 为 P 同 P_1, P_2 的距离; $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)$ 为 P_1, P_2 相对 G 的坐标(在 $\xi\eta$ 平面上)。则 P 的运动方程为:

$$\ddot{\xi} = -\frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad \ddot{\eta} = -\frac{\partial W}{\partial \eta}, \quad \ddot{\zeta} = -\frac{\partial W}{\partial \zeta} \quad (6.69)$$

其中 (ξ, η, ζ) 为 P 点相对 G 的坐标, 而

$$W = G\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) \quad (6.70)$$

$$\left. \begin{aligned} r_1^2 &= (\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + \zeta^2 \\ r_2^2 &= (\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2 + \zeta^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.71)$$

其中 $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ 要由 P_1, P_2 的运动求出。

若取 P_1, P_2 相对 G 的近点时的方向 $\overrightarrow{P_1 P_2}$ 为 ξ 轴方向, 则有关系:

$$\left. \begin{aligned} (m_1 + m_2)\xi_1 &= -m_2 r \cos f \\ (m_1 + m_2)\eta_1 &= -m_2 r \sin f \\ (m_1 + m_2)\xi_2 &= m_1 r \cos f \\ (m_1 + m_2)\eta_2 &= m_1 r \sin f \end{aligned} \right\} \quad (6.72)$$

其中 f 为 P_2 相对 P_1 运动的圆锥曲线轨道上的真近点角, r 为 P_2 相对 P_1 的向径, 由圆锥曲线轨道方程:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f} \quad (6.73)$$

确定 r, f 间关系。可根据初始条件和二体问题公式算出任何时刻的 r, f 值,再代入(6.72)式求出坐标 $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)$ 。

圆锥曲线有几种轨道,由 e 的大小确定。 $e > 1$ 时,相应的问题称为双曲线型限制性三体问题; $e = 1$ 时称抛物线型限制性三体问题; $0 < e < 1$ 时,称为椭圆型限制性三体问题; $e = 0$ 时称为圆型限制性三体问题,其中只考虑平面情况(P 在 P_1P_2 的运动平面上)称为平面圆型限制性三体问题,为限制性三体问题中最简单,又是较为成熟的课题;但至今尚未解决,正从定性和数值方法继续研究。在本章中着重讲述圆型限制性三体问题的基本结果。

2. 旋转坐标系中的运动方程。由于太阳系中的小天体(小行星,天然卫星,彗星,流星等)都是在太阳和大行星吸引下运动,故建立的模型为椭圆型限制性三体问题;双星周围的小质点运动也是一样。在椭圆型限制性三体问题的研究中,多用旋转坐标系,而且是非匀速旋转的坐标系。

建立新标架 $Gxyz$, x 轴就指向 $\overrightarrow{P_1P_2}$; y 轴仍在 $\xi\eta$ 平面上,指向 P_2 的真近点角等于 90° 的方向; z 轴与 ζ 轴重合。设在 $t = 0$ 时, x 轴与 ξ 轴重合(指向 P_2 的近点),则 P 的新旧坐标关系为:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x \cos f - y \sin f \\ \eta &= x \sin f + y \cos f \\ \zeta &= z \end{aligned} \right\} \quad (6.74)$$

代入原方程(6.69)式,并消去 $\sin f, \cos f$ 后得

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{f}\dot{y} - f^2x - \ddot{f}y &= \frac{\partial W}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{f}\dot{x} - f^2y + \ddot{f}x &= \frac{\partial W}{\partial y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial W}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (6.75)$$

为符号简单起见,取 $m_1 + m_2$ 为质量单位,且 $m_2 = \mu$, 即 $m_1 = 1 - \mu$, 并有 $\mu \leq 1/2$; 取 P_2 绕 P_1 的椭圆轨道周期 T 除以 2π 作为时间单

位, 取 P_2 绕 P_1 的椭圆半长径 a 作距离单位。则相应的万有引力常数 $G=1$, 于是

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \\ r_1^2 &= (x+\mu)^2 + y^2 + z^2 \\ r_2^2 &= (x+\mu-1)^2 + y^2 + z^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.76)$$

由二体问题的面积积分知

$$\left. \begin{aligned} r^2 \dot{f} &= h = \sqrt{p} \\ \dot{f} &= \frac{h}{p^2} (1 + e \cos f)^2 \\ \ddot{f} &= -\frac{2h^2 e \sin f}{p^4} (1 + e \cos f)^3 \end{aligned} \right\} \quad (6.77)$$

可把方程(6.75)中 $\dot{f}$, $\ddot{f}$ 化为 f 的函数, 即为时间 t 的函数。在圆型限制性三体问题中 $\dot{f} = n$ 为平均角速度常数, $\ddot{f} = 0$ 。而且 $n = 2\pi/T$, 在这里所用单位为 1。故(6.75)式化为:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \dot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial \Omega}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (6.78)$$

$$\Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + W \quad (6.79)$$

1926 年, 法国人内赫维(V. Nechvil)提出一种新形式的椭圆型限制性三体问题运动方程。

定义

$$\left. \begin{aligned} \overline{r} &= \frac{r}{p} = \frac{1}{1 + e \cos f} \\ x &= \overline{r} \overline{x}, \quad y = \overline{r} \overline{y}, \quad z = \overline{r} \overline{z} \\ \dot{f} &= \frac{df}{dt} = \frac{h}{p^2} \cdot \frac{1}{\overline{r}^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.80)$$

再把自变量 t 换为 f , 用 $x' = dx/df$, 则有

$$\dot{x} = (\overline{r'}x + \overline{r}x')\dot{v}$$

$$\ddot{x} = (\overline{r''}x + 2\overline{r'}x' + \overline{r}x'')\dot{v} + (\overline{r'}x + \overline{r}x')\dot{v}\dot{v}' \dots\dots\dots$$

代入(6.75)式, 可化为:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\xi''} - 2\overline{\eta'} &= \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial \overline{\xi}} \\ \overline{\eta''} + 2\overline{\xi'} &= \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial \overline{\eta}} \\ \overline{\zeta''} &= \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial \overline{\zeta}} \end{aligned} \right\} \quad (6.81)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \overline{\Omega} &= \overline{r} \left[\frac{1}{2}(\overline{\xi}^2 + \overline{\eta}^2) - \frac{e}{2} \cos f \cdot \overline{\zeta}^2 + \frac{p^4}{h^2} W \right] \\ \overline{W} &= \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \\ \overline{r_1}^2 &= (\overline{\xi} + p\mu)^2 + \overline{\eta}^2 + \overline{\zeta}^2 \\ \overline{r_2}^2 &= (\overline{\xi} + p\mu - p)^2 + \overline{\eta}^2 + \overline{\zeta}^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.82)$$

方程形式与圆型情况的(6.78)式相同, 只是 $\overline{\Omega}$ 中显含自变量 f ; 没有类似的能量积分, 只能有一个相应的积分不变式。

第六节 圆型限制性三体问题

此时, 用旋转坐标系得到的运动方程为(6.78)式, 即

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{z}} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{z}} \\ \Omega &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \\ r_1^2 &= (x+\mu)^2 + y^2 + z^2 \\ r_2^2 &= (x+\mu-1)^2 + y^2 + z^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.83)$$

而且 $\overline{P_1 P_2} = 1$ 。

1. 雅可比积分。由于 Ω 不显含时间 t ，应存在类似的能量积分。分别用 $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ 乘(6.83)式中的前三式后相加得：

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \nabla \Omega \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\Omega}{dt}$$

积分可得

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2\Omega - C \quad (6.84)$$

这就是著名的**雅可比积分**, C 就称为雅可比积分常数, 由初始条件确定。只有圆型限制性三体问题才有这个积分, 利用它可以研究出很多结果。

首先可看出, 当常数 C 由初始条件确定后, 永远有 $2\Omega - C \geq 0$ 。而在空间中, $2\Omega - C = 0$, 即

$$x^2 + y^2 + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} - C = 0 \quad (6.85)$$

是一个曲面, 又叫零速度面。此曲面定出 P 点运动范围, 只能在 $2\Omega - C > 0$ 范围内运动。曲面的形状将在本节末讲述。

曲面上任一点 (x, y, z) 的法线向量, 与向量

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right)$$

平行。当

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0 \quad (6.86)$$

时, 法线方向不定, 为曲面的奇点。这些奇点正是下面要讨论的特解。

2. 平动点。在 xyz 坐标系中的运动方程(6.83)式中,以 $x =$ 常数, $y =$ 常数, $z =$ 常数代入时,则有

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0$$

即(6.86)式。这是 x, y, z 的三个代数方程。如果解存在,这些解 $x = X_i, y = Y_i, z = Z_i$ 就满足运动方程,为方程的特解。由于它们是相应于旋转坐标系中的平衡点,又称为**平动点**或**平动解**(Libration points or solutions)。下面先求出这些解。

根据(6.83)式中 Ω 的表达式可求出

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = x - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x+\mu) - \frac{\mu}{r_2^3}(x+\mu-1) = 0 \quad (6.87)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = y - \frac{1-\mu}{r_1^3}y - \frac{\mu}{r_2^3}y = 0 \quad (6.88)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = -\frac{1-\mu}{r_1^3}z - \frac{\mu}{r_2^3}z = 0 \quad (6.89)$$

首先从(6.89)式可得:

$$z\left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right) = 0$$

由于括号内量永远为正,故只可能 $z = 0$, 即这些平动解只可能在 xy 平面上。

又由(6.88)式知

$$y\left(1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3}\right) = 0$$

这只可能有两种情况:

①

$$y = 0 \quad (6.90)$$

②

$$y \neq 0, \quad 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} = 0 \quad (6.91)$$

先讨论②的情况。以此式乘上 x 减去(6.87)式可得

$$\frac{1-\mu}{r_1^3}\mu + \frac{\mu}{r_2^3}(\mu-1) = 0$$

即得

$$r_1 = r_2$$

代入(6.91)式则得

$$r_1 = r_2 = 1 = \overline{P_1 P_2} \quad (6.92)$$

这就是说, 平动点位于与 P_1, P_2 成等边三角形之处。上面已说明这些解都在 xy 平面上。故这种平动点只有两个, $y > 0$ 的称为 L_4 , $y < 0$ 的称为 L_5 。它们的坐标为:

$$L_4: x_4 = \frac{1}{2} - \mu, \quad Y_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad Z_4 = 0$$

$$L_5: X_5 = \frac{1}{2} - \mu, \quad Y_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad Z_5 = 0$$

现在讨论①的情况, 此时 $y = z = 0$, 故

$$r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2} = |x+\mu|, \quad r_2 = \sqrt{(x+\mu-1)^2} = |x+\mu-1|$$

代入(6.87)式得:

$$F(x) = x - \frac{1-\mu}{|x+\mu|^3}(x+\mu) - \frac{\mu}{|x+\mu-1|^3}(x+\mu-1) = 0 \quad (6.93)$$

由此式可以看出, 在 $x = -\mu, 1-\mu$ 处(即 P_1, P_2 处), $F(x)$ 不连续, 而在 x 轴其他所有的点, $F(x)$ 都是连续的。下面把 x 轴分为三个区间:

$$I_1: (-\infty, -\mu); \quad I_2: (-\mu, 1-\mu); \quad I_3: (1-\mu, +\infty)$$

在 I_1 中, 有 $x < -\mu$, 即 $x+\mu < 0$, 则

$$F(x) = x + \frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} + \frac{\mu}{(x+\mu-1)^2}$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = 1 - \frac{2(1-\mu)}{(x+\mu)^3} - \frac{2\mu}{(x+\mu-1)^3} > 0$$

而 $F(-\infty) = -\infty$, $F(-\mu) = +\infty$, 故在 I_1 中, $F(x) = 0$ 有一

实根,记为 $x = X_3$ 。

同理可知,在 I_2 中有 $F(-\mu) = -\infty, F(1-\mu) = +\infty$, 而 $dF/dx > 0$, 即在 I_2 中也有一实根,记为 X_1 , 在 I_3 中也有 $F(1-\mu) = -\infty, F(+\infty) = +\infty, dF/dx > 0$, 即在 I_3 中也有一实根 $x = X_2$ 。这三个解对应的点称为共线平动点,常记为 $L_i(X_i, 0, 0), i = 1, 2, 3$ 。

于是共得到五个平动点 $L_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ 。与一般三体问题的拉格朗日特解一致。但一般三体问题的特解不是个别的点,含有参量;而圆型限制性三体问题的特解在旋转坐标系中就是这五个点。也是由拉格朗日首先发现,又称为拉格朗日平动点。 L_4, L_5 的坐标是常数,单位为 $P_1 P_2$ 的距离;而 L_1, L_2, L_3 的坐标,则同 P_1, P_2 的质量有关,下面给出计算公式。先考虑 X_1 , 它是 $F(x)$ 在 I_2 内的根,方程为

$$X_1 - \frac{1-\mu}{|X_1+\mu|^3}(X_1+\mu) - \frac{\mu}{|X_1+\mu-1|^3}(X_1+\mu-1) = 0$$

取

$$\rho_1 = 1 - \mu - X_1$$

即

$$X_1 + \mu = 1 - \rho_1, \quad X_1 + \mu - 1 = -\rho_1$$

代入上式得:

$$1 - \mu - \rho_1 + \frac{\mu}{\rho_1^2} - \frac{1 - \mu}{(1 - \rho_1)^2} = 0$$

有理化后为:

$$\rho_1^5 - (3 - \mu)\rho_1^4 + (3 - 2\mu)\rho_1^3 - \mu\rho_1^2 + 2\mu\rho_1 - \mu = 0 \quad (6.94)$$

此式表明,至少有一个实根,但上面讨论知只有唯一的实根。上式可写为

$$\frac{\rho_1^3(3 - 3\rho_1 + \rho_1^2)}{(1 - 2\rho_1 + \rho_1^2 + 2\rho_1^3 - \rho_1^4)} = \mu \quad (6.95)$$

由此可见,当 μ 很小时, ρ_1^3 与 μ 同量级;故可把 ρ_1 表为 $\mu^{1/3}$ 的幂

级数,形式地表示为:

$$\rho_1 = a_1 \mu^{1/3} + a_2 \mu^{2/3} + a_3 \mu^{3/3} + \dots$$

代入(6.94)式,比较 μ 的同次幂系数可得:

$$a_1 = 3^{1/3}, a_2 = -\frac{1}{3} \times 3^{2/3}, a_3 = -\frac{1}{27}, \dots$$

故得

$$\begin{aligned} X_1 &= 1 - \mu - \rho_1 \\ &= 1 - \mu - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} - \frac{1}{3^2} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{3/3} + \dots \quad (6.96) \end{aligned}$$

同样在算 L_2 的坐标 X_2 时,令 $X_2 = 1 - \mu + \rho_2$,可得相应的方程:

$$\left. \begin{aligned} \rho_2^5 + (3 - \mu)\rho_2^4 + (3 - 2\mu)\rho_2^3 - \mu\rho_2^2 - 2\mu\rho_2 - \mu &= 0 \\ \frac{\rho_2^3(3 + \rho_2 + \rho_2^2)}{1 + 2\rho_2 + \rho_2^2 + 2\rho_2^3 + \rho_2^4} &= \mu \end{aligned} \right\} \quad (6.97)$$

同样可知当 μ 很小时, ρ_2 与 $\mu^{1/3}$ 同量级,形式地展开为 $\mu^{1/3}$ 的幂级数,相应的 X_2 为

$$\begin{aligned} X_2 &= 1 - \mu + \rho_2 \\ &= 1 - \mu + \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} - \frac{1}{9} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{3/3} + \dots \end{aligned} \quad (6.98)$$

X_3 的值有点不同,当 μ 很小时,经检验 L_3 在 P_1 的左边距离接近于1处,设 $\overline{L_3 P_1} = 1 - \rho_3$,则 $X_3 = -1 - \mu + \rho_3$,代入 $F(x)$ 在 I_3 中的方程,可化为:

$$\begin{aligned} \rho_3^5 - (7 + \mu)\rho_3^4 + (19 + 6\mu)\rho_3^3 - (24 + 13\mu)\rho_3^2 \\ + (12 + 14\mu)\rho_3 - 7\mu &= 0 \end{aligned}$$

即

$$\frac{\rho_3(12 - 24\rho_3 + 9\rho_3^2 - 7\rho_3^3 + \rho_3^4)}{7 - 14\rho_3 + 13\rho_3^2 - 6\rho_3^3 + \rho_3^4} = \mu$$

由此可知 μ 很小时, ρ_3 与 μ 同量级,可展开为 μ 的幂数;用待定系

数级数代入上式后,可得

$$\rho_3 = \frac{7}{12}\mu - \frac{13 \times 7^2}{12^4}\mu^3 + \dots$$

相应的

$$X_3 = -1 - \frac{5}{12}\mu + \frac{23 \times 7^2}{12^4}\mu^3 + \dots \quad (6.99)$$

其实平动点坐标的计算, 可从 $F(x) = 0$ 在三个区间 I_x 中的方程, 根据不同 μ 值, 用数值方法解出。上面的讨论只是要说明, 当 μ 值很小时(以太阳和某一大行星为二有限体, 则 $\mu < 0.001$), L_1, L_2 同 P_2 的距离与 $\mu^{1/3}$ 同量级, L_3 在 P_1 左边距离为 $1 - \rho_3$, 而 ρ_3 与 μ 同量级。这个结果在后面说明希耳范围时要用到。

3. 平动解的稳定性讨论。圆型限制性三体问题的平动解稳定性研究, 是现代天体力学中重要成果之一。这里只作初步讨论, 即讨论解在平动解附近有微小偏离时, 偏差的演化情况。

设

$$x = X_i + \xi, \quad y = Y_i + \eta, \quad z = Z_i + \zeta \quad (6.100)$$

为平动解 (X_i, Y_i, Z_i) 附近的小天体坐标, 其中偏差 ξ, η, ζ 为微量, 在运动方程中只准到它们的一阶。以(6.100)式代入运动方程(6.83)式, 并把右端函数按 ξ, η, ζ 展开, 准到一阶可得(因 X_i, Y_i, Z_i 为常数, 故方程左端只剩下 ξ, η, ζ 的微商):

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \Omega_{xx}\xi + \Omega_{xy}\eta + \Omega_{xz}\zeta \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \Omega_{yx}\xi + \Omega_{yy}\eta + \Omega_{yz}\zeta \\ \ddot{\zeta} &= \Omega_{zx}\xi + \Omega_{zy}\eta + \Omega_{zz}\zeta \end{aligned} \right\} \quad (6.101)$$

其中

$$\Omega_{xx} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}, \quad \Omega_{xy} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \dots\dots$$

且求完微商后, 把其中的 (x, y, z) 代为 (X_i, Y_i, Z_i) 。从(6.87)—(6.89)式可知, 由于 $Z_i = 0$, 故

$$\Omega_{xz} = \Omega_{yz} = 0$$

可首先讨论 ζ 的方程, 应为

$$\ddot{\zeta} = \Omega_{zz}\zeta = - \left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right) \zeta = -A\zeta \quad (6.102)$$

其中 $A > 0$, 对平动解 (X_i, Y_i, Z_i) 而言, 是不大的常数。(6.102) 为简谐运动方程, 显然是稳定的。这表明平动解在 ζ 轴方向为稳定。又由

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{xx} &= 1 - A + 3 \frac{(1-\mu)(x+\mu)^2}{r_1^5} + 3 \frac{\mu(x+\mu-1)^2}{r_2^5} \\ \Omega_{xy} &= 3y \left[\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^5} + \frac{\mu(x+\mu-1)}{r_2^5} \right] \\ \Omega_{yy} &= 1 - A + 3 \frac{(1-\mu)y^2}{r_1^5} + 3 \frac{\mu y^2}{r_2^5} \end{aligned} \right\} \quad (6.103)$$

由于各平动点坐标代入后数值不同, 这里暂保留偏导数符号。

(6.101) 式的前两式可化为四阶线性齐次方程组:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Omega_{xx} & \Omega_{xy} & 0 & 2 \\ \Omega_{xy} & \Omega_{yy} & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} \quad (6.104)$$

其中定义 $\bar{\xi} = d\xi/dt$, $\bar{\eta} = d\eta/dt$, 上式的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ \Omega_{xx} & \Omega_{xy} & \lambda & 2 \\ \Omega_{xy} & \Omega_{yy} & -2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

即

$$\lambda^4 + \lambda^2(4 - \Omega_{xx} - \Omega_{yy}) + \Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2 = 0 \quad (6.105)$$

下面分别对等边三角形和共线平动解来讨论。

对共线解 $(X_i, 0, 0)$, $i = 1, 2, 3$, 此时

$$\Omega_{xx} = 1 - A + 3A = 1 + 2A > 0$$

$$\Omega_{yy} = 1 - A < 0$$

$$\Omega_{xy} = 0$$

故(6.105)式可记为

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2 + 2b\lambda^2 - c^2 &= 0 \\ 2b &= 4 - \Omega_{xx} - \Omega_{yy}, c^2 = (A - 1)(2A + 1) \end{aligned} \right\} \quad (6.106)$$

则 λ^2 的两根为

$$-b + \sqrt{b^2 + c^2} > 0, -b - \sqrt{b^2 + c^2} < 0$$

都是实根;因此 λ 的四根为

$$\left. \begin{aligned} \pm \sqrt{-b + \sqrt{b^2 + c^2}} &= \pm c_1 \\ \pm \sqrt{b^2 + \sqrt{b^2 + c^2}} \sqrt{-1} &= \pm c_2 \sqrt{-1} \end{aligned} \right\} \quad (6.107)$$

四根中有正实部的 $+C_1$, 故一般解

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a_1 e^{c_1 t} + a_2 e^{-c_1 t} + a_3 e^{\sqrt{-1}c_2 t} + a_4 e^{-\sqrt{-1}c_2 t} \\ \eta &= b_1 e^{c_1 t} + b_2 e^{-c_1 t} + b_3 e^{\sqrt{-1}c_2 t} + b_4 e^{-\sqrt{-1}c_2 t} \end{aligned} \right\} \quad (6.108)$$

(其中 8 个系数只有 4 个独立, 由初值决定) 不稳定; 只有当 $a_1 = b_1 = 0$, 则在 $t \rightarrow +\infty$ 为稳定; 且同时 $a_3 = a_4 = b_3 = b_4 = 0$ 时为渐近稳定。因此为条件稳定。

对于等边三角形平动解 L_4, L_5 , 则有

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{xx} &= \frac{3}{4}, & \Omega_{yy} &= \frac{9}{4} \\ \Omega_{xy} &= \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \quad (L_4 \text{ 为正}, L_5 \text{ 为负}) \end{aligned} \right\} \quad (6.109)$$

代入(6.105)式后得特征方程为

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4} \mu(1 - \mu) = 0 \quad (6.110)$$

则

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}) = \frac{1}{2}(-1 \pm d) \quad (6.111)$$

$d=0$ 时, 因 $\mu \leq \frac{1}{2}$, 有

$$\mu = \mu_0 = \frac{9 - \sqrt{69}}{18} = 0.0385209\dots$$

称为临界值。可分三种情况:

① $\mu = \mu_0$ 时, λ^2 为重根, $-1/2, \lambda$ 也为重根, 解的系数中含有 t 项, 故一般为不稳定, 只有当 t 的系数为 0 时才稳定, 因而为条件稳定。

② $\mu > \mu_0$ 时, λ^2 为复根, 开方后 λ 的四个根为相互反号的两对复根, 总有两个是正实部, 因而一般为不稳定, 或条件稳定。

③ $\mu < \mu_0$, 而显然有, $0 < d < 1$, 因而 λ^2 的两根都是负实数, 故 λ 的四根均为纯虚数, 且为单根, 因而解为稳定。

以上讨论是初步的, 因振动方程只取到线性偏差项, 故称为线性稳定性; 但共线解一般不稳定肯定成立, 因此至今在自然界中未找到实际例子。

4. 梯塞朗判别式, 雅可比积分(6.84)式是对于旋转坐标系结果。若变换为对于惯性坐标系 $\xi\eta\zeta$ 的结果, 在圆型限制性三体问题以及本节所采用的单位, 新旧坐标关系应为:

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi \cos t + \eta \sin t \\ y &= -\xi \sin t + \eta \cos t \\ z &= \zeta \end{aligned} \right\} \quad (6.112)$$

代入(6.84)式后可化为:

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 - 2(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) = \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - c \quad (6.113)$$

若 $\xi\eta$ 在某固定历元的黄道面上, P_1, P_2 分别为太阳和木星, P 为某小天体(彗星或小行星)。 $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ 应为 P 相对于太阳木星的质心的运动速度, 可近似地看作相对于太阳的速度(因质心在太阳边缘附近), 近似地按二体问题关系有

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 = v^2 = (1-\mu)\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a}\right) \quad (6.114)$$

这里的单位中太阳质量为 $1-\mu$, 万有引力常数为 1, a 为小天体相对太阳运动的轨道半长径。 $\dot{\xi}\eta - \eta\dot{\xi}$ 为面积速度在 $\xi\eta$ 平面上投影, 应有

$$\dot{\xi}\eta - \eta\dot{\xi} = h\cos i = \sqrt{(1-\mu)a(1-e^2)}\cos i$$

其中 i 为小天体轨道面相对黄道面的倾角。将上两式代入(6.113)式后可得:

$$\begin{aligned} (1-\mu)\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a}\right) - 2\sqrt{(1-\mu)a(1-e^2)}\cos i \\ = \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} - c \end{aligned}$$

在这里 $\mu < 0.001$, 故近似地可得:

$$\frac{1}{a} + 2\sqrt{a(1-e^2)}\cos i = C \quad (6.115)$$

此式首先由梯塞朗(F. Tisserand, 1845—1896)提出, 主要为了判别不同时期观测到的彗星, 是否同一颗。因木星摄动使轨道根数 a, e, i 有变化。若两个时期观测到的彗星根数 a, e, i 值虽然不同, 但代入(6.115)式是同一个 C 值, 则表明它们是同一颗彗星。

5. 零速度面(希耳曲面)。前面已给出了零速度面的方程(6.85)式, 即

$$(x^2 + y^2) + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} = C \quad (6.116)$$

由于此曲面为小天体运动区域边界 $v^2 = 0$, 而 $v^2 < 0$ 不存在, 为运动禁区。故零速度面的形状和范围对讨论小天体的运动很重要。

零速度面的形状决定于 C 的数值, 它是由小天体初值所决定。因此小天体初值决定了零速度面。下面给出不同 C 值的零速度面形状, 特别是在奇点情况。由于三维曲面不好绘出, 这里只给出不同 C 值的零速度面与 xy 平面的交线, 又称为零速度线。因

零速度面的奇点(即平动点)都在 xy 平面上, 故从零速度线的变化可以看出三维曲面的特性。

(6.116)式有三项, 都是正值, 故 $C > 0$ 。当 C 为 $+\infty$ 时, 三项中至少有一项为正无穷大。第一项为 $+\infty$ 时, 表明小天体在无穷远; 第二项为 $+\infty$ 时, 小天体与 P_1 重合; 第三项为 $+\infty$, 则小天体与 P_2 重合。故除无穷远点, P_1, P_2 点外, xy 平面上所有的点(xyz 空间也一样)都是禁区。

当 C 值为充分大的正数时, 若 $(x^2 + y^2)$ 很大, 后两项会很小(分母大), 零速度线接近于

$$x^2 + y^2 = C$$

为半径 $\sqrt{C}$ 的圆(三维时为圆柱)、圆外的点使 $v^2 > 0$ 为运动区域; 若第二项很大, 即 r_1 很小, 此时其他两项都小, 故曲线接近于 $r_1 =$ 小正数; 为一个以 P_1 为中心的小圆(三维时为球)。在圆内为 $v^2 > 0$, 是运动区域; 圆外为 $v^2 < 0$, 为禁区。若第三项很大, 情况相同, 以 P_2 为中心的小圆(球)内为运动区, 圆外为禁区。由于 $1 - \mu$ 比 μ 大, 故 P_1 为心的圆大些, 大多少与 μ 值有关, μ 越小, 大得越多(见图 6.2a, 阴影区为禁区, 下同)。

当 C 连续减小, 外面的大圆缩小, 里面两个小圆逐渐增大变扁。 C 值再减小时, 要遇到奇点情况, 这里先讨论奇点(平动点)处的 C 值, 用 C_i 表示 L_i 处的值。由于平动点对 xyz 坐标系为静止, 故 $v_i = 0$, 即 C_i 应为:

$$\left. \begin{aligned} C_i &= X_i^2 + Y_i^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_{1i}} + \frac{2\mu}{r_{2i}} \\ r_{1i}^2 &= (X_i + \mu)^2 + Y_i^2 \\ r_{2i}^2 &= (X_i + \mu - 1)^2 + Y_i^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.117)$$

容易证明 $C_1 > C_2 > C_3 > C_4 = C_5$ (对所有 $\mu < 0.5$ 的值)。

C 继续减小, 首先有 $C = C_1$, 即 L_1 为零速度面的奇点, 此时对应 P_1, P_2 处的小闭曲线增大到在 L_1 处相碰(见图 6.2b)。外面大

圆也缩小。 C 继续减小到 $C = C_2$ 时, 内外闭曲线在 L_2 处相交(见图 6.2c); 以后禁区在 L_2 附近分开成马蹄状, 包含 L_3 ; 当 C 继续减小到 $C = C_3$ 时, 禁区在 L_3 处缩小成一点(见图 6.2d); C 再减小则禁区在 L_3 附近分开而成为两个蝌蚪状体(包含 L_4, L_5); C 减小到 $C = C_4 = C_5$ 时, 禁区缩成两点, 即 L_4 和 L_5 , $C > C_4$ 时, 不存在禁区。

零速度面又称为希耳曲面, 与 xy 平面的交线也称希耳曲线; 其中 $C = C_1$ 时的结果在双星研究中很重要, 两个小运动区开始连通, 双星周围物质开始交流。这种形状为零速度面又称为洛熙 (Roche) 瓣。在 $C \geq C_1$ 时, P_2 的小闭曲线内运动的小质点, 永远不会出去, 也算是一种稳定运动, 称为希耳稳定性。此小闭曲线的最大范围是 $C = C_1$ 时情况, 大致是以 $\rho_1 = \overline{L_1 P_2}$ 为半径的球, 与 $\mu^{1/3}$ 同量级, 此球称为 P_2 相对 P_1 的希耳范围。

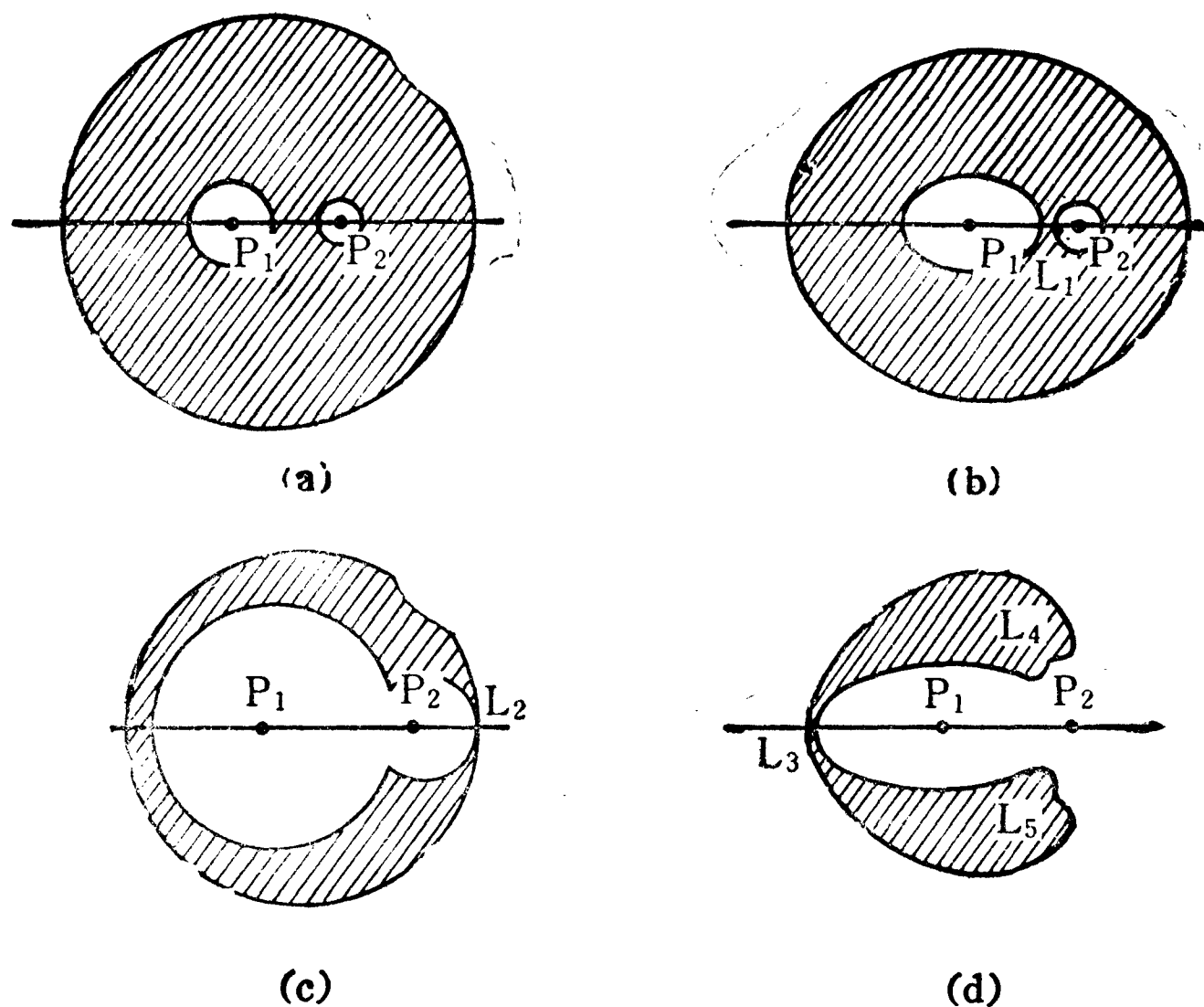


图 6.2 不同 C 值的零速度线

第七节 双不动中心问题

这也是一个有重要应用的特殊三体问题，是经典的一种可积力学模型，它的解可用于作中间轨道。由欧拉首先研究，后来主要由拉格朗日，勒让德(A-M Legendre 1752—1833)解决平面问题。有关解的详细讨论和应用，主要由前苏联学者在本世纪40—50年代完成。三维空间情况是60年代在人造卫星运动中的应用发展起来的，本节主要介绍这个力学模型的基本结果。

1. 平面情况。力学模型为一小质点 P 在另两个不动质点吸引下的运动。设两质点 P_1, P_2 的质量为 $1-\mu$ 和 μ ，相互距为 2；取其中心点 O 为坐标原点， $\overrightarrow{P_1P_2}$ 为 x 轴方向；以小质点 P 同 P_1, P_2 所在平面为 xy 平面， y 轴指向与 x 轴垂直方向。取适当时间单位，可使万有引力常数 $G=1$ 。这样 P 的运动方程可写为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} \\ U &= \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \end{aligned} \right\} \quad (6.118)$$

此式容易化为正则方程组形式：设 $p_x = \dot{x}, p_y = \dot{y}$ ，上式可化为：

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} \\ H = T - U &= \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} \end{aligned} \right\} \quad (6.119)$$

由于 H 不显含 t ，存在能量积分

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} = h \\ r_1^2 &= (x+1)^2 + y^2 \\ r_2^2 &= (x-1)^2 + y^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.120)$$

零速度线方程为

$$\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + h = 0 \quad (6.121)$$

显然, $h < 0$ 时才有运动禁区。

(6.119)式是可积系统,但要作坐标变换。欧拉提出一种叫椭圆坐标,由 P 到两个固定体距离 r_1, r_2 定义:

$$u = \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \quad v = \frac{1}{2}(r_1 - r_2) \quad (6.122)$$

因 u 为常数时, xy 平面的曲线为椭圆,但 v 为常数时是双曲线。 (u, v) 代表 P 点坐标,就称为椭圆坐标系。利用 xy 同 r_1, r_2 的关系(6.120)式可解出:

$$x = -uv, \quad y = \sqrt{(u^2 - 1)(1 - v^2)} \quad (6.123)$$

这就是新旧坐标变换关系,应有 $u \geq 1, |v| \leq 1$ 。

由此可得

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -(u\dot{v} + v\dot{u}) \\ \dot{y} &= \sqrt{\frac{1-u^2}{u^2-1}}u\dot{u} - \sqrt{\frac{u^2-1}{1-v^2}}v\dot{v} \end{aligned} \right\} \quad (6.124)$$

相应地有

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \left(\frac{\dot{u}^2}{u^2-1} + \frac{\dot{v}^2}{1-v^2} \right) \\ U &= \frac{1}{u^2 - v^2} [u - (1-2\mu)v] \end{aligned} \right\} \quad (6.125)$$

u, v 的正则共轭变量 u', v' 为

$$u' = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = \frac{u^2 - v^2}{u^2 - 1} \dot{u}, \quad v' = \frac{u^2 - v^2}{1 - v^2} \dot{v} \quad (6.126)$$

于是运动方程仍为正则形式:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\partial H}{\partial u}, & \dot{u}' &= -\frac{\partial H}{\partial u'} \\ \dot{v} &= \frac{\partial H}{\partial v}, & \dot{v}' &= -\frac{\partial H}{\partial v'} \\ H &= \frac{1}{2(u^2 - v^2)} [(u^2 - 1)u'^2 + (1 - v^2)v'^2] - U \end{aligned} \right\} \quad (6.127)$$

这里的 H 符合可分离变量的柳维定理条件,可用分离变量积出运动方程。由于 H 不显含 t ,相应哈密顿-雅可比方程为:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2(u^2 - v^2)} \left[(u^2 - 1) \left(\frac{\partial S}{\partial u} \right)^2 + (1 - v^2) \left(\frac{\partial S}{\partial v} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{u^2 - v^2} [u - (1 - 2\mu)v] + h \end{aligned}$$

此式显然已分离变量,可引入另一常数 α ,得

$$\begin{aligned} (u^2 - 1) \left(\frac{dS_1}{du} \right)^2 - 2hu^2 - 2u - 2\alpha &= 0 \\ (1 - v^2) \left(\frac{dS_2}{dv} \right)^2 + 2hv^2 + 2(1 - 2\mu)v + 2\alpha &= 0 \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} S_1 &= \int \sqrt{\frac{2hu^2 + 2u + 2\alpha}{u^2 - 1}} du, \\ S_2 &= \int \sqrt{\frac{2hv^2 + 2(1 - 2\mu)v + 2\alpha}{v^2 - 1}} dv \end{aligned}$$

生成函数

$$S = -ht + S_1 + S_2$$

故(6.127)式的解为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \alpha} &= \beta \\ \frac{\partial S}{\partial h} &= \gamma \end{aligned}$$

$$\frac{\partial S}{\partial u} = u'$$

$$\frac{\partial S}{\partial v} = v'$$

即:

$$\frac{\partial S_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_2}{\partial \alpha} = \beta,$$

$$-t + \frac{\partial S_1}{\partial h} + \frac{\partial S_2}{\partial h} = \gamma$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial u} = u'$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial v} = v'$$

以 S_1, S_2 代入可得:

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{du}{\sqrt{L(u)}} + \int \frac{dv}{\sqrt{M(v)}} &= \sqrt{2} \beta \\ \int \frac{u^2 du}{\sqrt{L(u)}} + \int \frac{v^2 dv}{\sqrt{M(v)}} &= \sqrt{2} (t + \gamma) \\ u' &= \frac{\sqrt{2L(u)}}{u^2 - 1}, \quad v' = \frac{\sqrt{2M(v)}}{1 - v^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.128)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} L(u) &= (u^2 - 1)(hu^2 + u + \alpha) \\ M(v) &= (v^2 - 1)[hv^2 + (1 - 2\mu)v + \alpha] \end{aligned} \right\} \quad (6.129)$$

因此(6.128)式的几个积分都是椭圆函数, 而且用(6.128)前两式解出 u, v 非常困难。其实可利用第三式, 再由(6.126)式联合可得:

$$\dot{u} = \frac{\sqrt{2L(u)}}{u^2 - v^2}, \quad \dot{v} = \frac{\sqrt{2M(v)}}{u^2 - v^2}$$

引入新自变量 τ , 使得:

$$\sqrt{2} dt = (u^2 - v^2) dt = r_1 r_2 d\tau \quad (6.130)$$

则上式成为

$$\frac{du}{d\tau} = \sqrt{L(u)}, \quad \frac{dv}{d\tau} = \sqrt{M(v)}$$

可先积分

$$\left. \begin{aligned} \tau - \tau_0 &= \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{L(u)}} \\ \tau - \tau_0 &= \int_{v_0}^v \frac{dv}{\sqrt{M(v)}} \end{aligned} \right\} \quad (6.131)$$

其中 u_0, v_0 认为是对应初始 t_0 时的值。然后再由(6.130)式

$$\sqrt{2}(t - t_0) = \int_{\tau_0}^{\tau} (u^2 - v^2) d\tau \quad (6.132)$$

计算 t 同 τ 的关系。

2. 三维空间情况。取 $\overrightarrow{P_1 P_2}$ 为 z 轴, xy 平面垂直于 z 轴, 原点 O 仍为 $\overrightarrow{P_1 P_2}$ 中点, 则运动方程仍为:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} \\ U &= \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \\ r_1^2 &= x^2 + y^2 + (z+1)^2, \quad r_2^2 = x^2 + y^2 + (z-1)^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.133)$$

作坐标变换

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{(u^2-1)(1-v^2)} \cos w \\ y &= \sqrt{(u^2-1)(1-v^2)} \sin w \\ z &= uv \end{aligned} \right\} \quad (6.134)$$

则同样有关系:

$$u = \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \quad v = \frac{1}{2}(r_1 - r_2)$$

由坐标变换可得

$$\dot{x} = \frac{(1-v^2)u\dot{u} - (u^2-1)v\dot{v}}{\sqrt{(u^2-1)(1-v^2)}} \cos w \quad \left. \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - \sqrt{(u^2-1)(1-v^2)} \dot{w} \sin w \\
\dot{y} &= \frac{(1-v^2) u \dot{u} - (u^2-1) v \dot{v}}{\sqrt{(u^2-1)(1-v^2)}} \sin w \\
& + \sqrt{(u^2-1)(1-v^2)} \dot{w} \cos w \\
\dot{z} &= u \dot{v} + v \dot{u}
\end{aligned} \tag{6.135}$$

动能

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{u^2-v^2}{u^2-1} \dot{u}^2 + \frac{u^2-v^2}{1-v^2} \dot{v}^2 + (u^2-1)(1-v^2) \dot{w}^2 \right]
\end{aligned}$$

新变 u, v, w 的共轭变量为

$$\left. \begin{aligned}
u' &= \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = \frac{u^2-v^2}{u^2-1} \dot{u}, \quad v' = \frac{u^2-v^2}{1-v^2} \dot{v} \\
w' &= \frac{\partial T}{\partial \dot{w}} = (u^2-1)(1-v^2) \dot{w}
\end{aligned} \right\} \tag{6.136}$$

则

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \left[\frac{u^2-1}{u^2-v^2} u'^2 + \frac{1-v^2}{u^2-v^2} v'^2 + \frac{w'^2}{(u^2-1)(1-v^2)} \right] \\
U &= \frac{u - (1-2\mu)v}{u^2-v^2}
\end{aligned}$$

故正则方程组的哈密顿函数为 $H = T - U$, 不显含 t 故哈密顿-雅可比方程(消去分母上 $u^2 - v^2$)可写为

$$\begin{aligned}
& (u^2-1) \left(\frac{\partial W}{\partial u} \right)^2 + (1-v^2) \left(\frac{\partial W}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{1}{u^2-1} + \frac{1}{1-v^2} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial w} \right)^2 \\
& = 2u - 2(1-2\mu)v + 2h(u^2-v^2)
\end{aligned} \tag{6.137}$$

又因 w 为循环坐标, 故可取

$$w' = \frac{\partial W}{\partial w} = \alpha_3 (\text{常数})$$

因此上式已分离变量,可令

$$W = W_1(u) + W_2(v) + W_3$$

(6.137)式可分离为:

$$\begin{aligned} (u^2 - 1) \left(\frac{dW_1}{du} \right)^2 &= 2hu^2 + 2u - \frac{\alpha_3^2}{u^2 - 1} + 2\alpha_2 \\ (v^2 - 1) \left(\frac{dW_2}{dv} \right)^2 &= 2hv^2 + 2(1 - 2\mu)v + \frac{\alpha_3^2}{1 - v^2} + 2\alpha_2 \\ \frac{dW_3}{dw} &= \alpha_3 \end{aligned}$$

故母函数 W 可表为

$$\left. \begin{aligned} W &= \int \frac{\sqrt{L(u)}}{u^2 - 1} du + \int \frac{\sqrt{M(v)}}{1 - v^2} dv + \alpha_3 w \\ L(u) &= (u^2 - 1)(2hu^2 + 2u + 2\alpha_2) - \alpha_3^2 \\ M(v) &= (v^2 - 1)[2hv^2 + 2(1 - 2\mu)v + 2\alpha_2] - \alpha_3^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.138)$$

解可表示为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial h} &= t + \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} = \beta_3 \\ \frac{\partial W}{\partial u} &= u', \quad \frac{\partial W}{\partial v} = v', \quad \frac{\partial W}{\partial w} = w' = \alpha_3 \end{aligned} \right\} \quad (6.139)$$

并可用平面问题中同样办法,用新自变量 τ 为

$$dt = (u^2 - v^2)d\tau$$

可将解化为:

$$\left. \begin{aligned} \tau - \tau_0 &= \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{L(u)}} \\ \tau - \tau_0 &= \int_{v_0}^v \frac{dv}{\sqrt{M(v)}} \\ t - t_0 &= \int_{\tau_0}^{\tau} (u^2 - v^2) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (6.140)$$

习 题

1. 根据多体问题的 10 个经典积分

$$F_i(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = C_i, i = 1, 2, \dots, 10$$

试求出所有的组合 $\{F_i; F_j\}$; 试讨论有几个为 0, 是否有新积分出现? (注意, 所有积分都要表示为首次积分形式, 如质心运动守恒定律的积分(6.5)式, 其中 $\vec{A}$ 要用(6.4)式代入。

2. 试导出多体问题中用雅可比坐标表示的总动能表达式。

3. 说明(6.46)式的关系(交线消去定理)的意义; 它是否是一个积分? 在降阶过程中是否起作用?

4. 试证明关系(6.62)式, 并证明等边三角形特解中, 三体在惯性坐标系内的圆锥曲线轨道的偏心率相等。

5. 等边三角形特解中, 若三体的轨道为椭圆, 试证三体轨道的半长径可能不相等, 但周期相等。

6. 试证共线特解中, 三体的圆锥曲线轨道偏心率相等; 若为椭圆轨道, 则周期相等。

7. 椭圆型限制性三体问题不存在类似的雅可比积分, 但可根据(6.81), (6.82)式, 试证下面关系成立:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(\dot{\bar{\xi}}^2 + \dot{\bar{\eta}}^2 + \dot{\bar{\zeta}}^2) &= \bar{\Omega} + \int G(f) df + C \\ G(f) &= \bar{r} e \sin f \bar{\Omega} + \frac{e}{2} \sin f \bar{r} \bar{\zeta} \end{aligned} \right\} \quad (6.141)$$

8. 试列出平面圆型限制性三体问题的正则形式的运动方程, 并利用雅可比积分和不显含 t 特点, 把方程降为 2 阶。

9. 试讨论两个不动中心问题(平面情况)的零速度线形状。

第七章 天体形状和自转理论

天体形状和自转问题自天文学诞生时就出现了，首先是地球形状和自转。但作为力学理论是在牛顿力学诞生之后，经典天体力学中已作为一个分支出现。卡西尼(G.D. Cassini, 1625—1712)是首先从天文观测研究大行星(主要是木星和土星)形状和自转的天文学家，但他反对牛顿力学。正式建立天体形状和自转力学理论的人是经典天体力学主要奠基者之一的克莱洛。后由拉普拉斯，勒让德，艾沃里(W. Ivory)，马克洛林(G. Maclaurin)，雅可比，洛熙，邦加雷，李亚普诺夫等人逐步完善。完整地建立起流体自转时的平衡理论，并讨论一些平衡形状的稳定性。这些结果不仅在太阳系天体中有用，在恒星系统动力学，星系演化等领域中也有重要作用。本章主要介绍最基本的结果。

关于地球形状(包括内部结构)和自转理论，由于航天技术和新观测技术的资料，比经典观测的精度提高很多，要求建立更精确的理论。现在已形成“地球结构力学”，“地球自转变化”，“卫星大地测量”，“形变地球动力学”等专门领域，各自可开设专门课程。在天文学界，目前仍倾向于采用的刚体模型的地球自转理论。虽然在1980年在国际地球物理和大地测量协会(IUGG)坚持下，国际天文学联合会不得不通过采用带液核的瓦尔(J.M. Wahr)章动公式。因为刚体地球可建立完整的自转理论。以后再作非刚性改正。长期以来，岁差章动理论公式是采用美国伍拉德(E.W. Woolard)在1953年给的结果，60年代以后发现有偏差，本章给出1977年木下宙(H. Kinoshita)的刚体地球自转理论。在此基础上再讨论

非刚性改正问题。章动公式仍给出瓦尔的结果。

第一节 自转流体平衡形状的研究方法

若把天体看成不可压缩流体,不受外力影响,则流体内任一质点受到两个作用力:一是受到流体内其他质点的引力,总和向内;另一是受到自转离心力,方向朝外。

设以天体质心为坐标原点,取自转轴为 z 轴,通过质心 O 垂直于 z 轴的平面为 xy 面。体内任一质点 P ,坐标为 (x, y, z) ,密度设为 $\sigma(x, y, z)$,受到压力大小为 $p(x, y, z)$,受到引力的位函数为 $V(x, y, z)$;再设 J_x, J_y, J_z 为其他力产生的加速度分量,则当天体处于平衡状态时,由流体静力学知有下列关系:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial x} - J_x \\ \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial y} - J_y \\ \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial V}{\partial z} - J_z \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

由于在这里,其他力只是自转离心力,因此有

$$J_x = -\omega^2 x, J_y = -\omega^2 y, J_z = 0 \quad (7.2)$$

其中 ω 为自转角速度大小。在本章的讨论中,都把 ω 取为常量,代入(7.1)式可得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial x} + \omega^2 x \\ \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial y} + \omega^2 y \\ \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

用 dx, dy, dz 分别乘上面三个式子相加可得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sigma} dp &= dV + \omega^2(xdx + ydy) = dW \\ W &= \frac{1}{2} \omega^2(x^2 + y^2) \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

为离心力和引力的共同位函数。当

$$dW = 0$$

即 $W = \text{常数}$ 时, 相应 $dp = 0$, 即 $p = \text{常数}$ 。而 $W = \text{常数}$ 为一曲面方程, 故此曲面为等压面, 又称为**水准面**。在天体形状理论中有重要地位。下面给出水准面的几个重要特性。

定理一 水准面也是等密度面。

证 这里我们都认为引入的各种函数 V, σ, p, W 等 $\in C^{(2)}$, 从 p 对 x, y, z 的二阶导数可交换次序, 以及关系:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \sigma \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \sigma \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \sigma \frac{\partial W}{\partial z}$$

可导出

$$\frac{\partial \sigma / \partial x}{\partial W / \partial x} = \frac{\partial \sigma / \partial y}{\partial W / \partial y} = \frac{\partial \sigma / \partial z}{\partial W / \partial z} \quad (7.5)$$

设比例因子为 K , 则可得

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz \\ &= K \left(\frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz \right) \\ &= K dW \end{aligned}$$

由式可知 $dW = 0$ 即 $d\sigma = 0$, 故定理得证。

定理二 水准面上任一点的内法线方向与此处质点的加速度方向重合。

证 因水准面方程为

$$W = \text{常数}$$

它上面任一点的内法线向量应与向量

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right) \quad (7.6)$$

平行。另外， W 又是它上面坐标为 (x, y, z) 的质点所受力(引力和离心力)的位函数，故此点的加速度就是(7.6)式的向量。故定理得证。

上面两个定理是水准面的重要性质。流体自转平衡时，表面上任一点所受的压力为 0，故表面也是一个水准面。讨论地球时，表面或内部任一点所受引力和自转离心力之和，称为重力。故地球的水准面是内法线和重力方向一致。地面这个水准面又叫大地水准面。

流体自转时，若自转速率 ω 为常数，则对自转轴有一定选择。由于流体自转平衡时，内部不再有相对运动，可看作刚体。取质心为原点的三个惯性主轴为坐标轴 xyz ，用 A, B, C 表示三个坐标轴的主惯性矩；再用 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 表示自转角速度向量在三个坐标轴上的分量。则因无外力作用，根据刚体运动的欧拉方程(见理论力学)得：

$$A\dot{\omega}_x + (C - B)\omega_y\omega_z = 0$$

$$B\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_x\omega_z = 0$$

$$C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x\omega_y = 0$$

若 $\vec{\omega}$ 为常向量，则 $\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0$ ，上式成为

$$(C - B)\omega_y\omega_z = (A - C)\omega_x\omega_z = (B - A)\omega_x\omega_y \quad (7.7)$$

由此可知，当 $A \neq B \neq C$ 时，上式可得 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 中有两个必须为 0 (不可能三个都为 0)，设为 $\omega_x = \omega_y = 0$ ，则 $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_z)$ ， z 轴为自转轴(其他任一不为 0，也是自转轴)。即自转轴必须是惯性主轴。若 $A = B \neq C$ ，则可能有两种情况：一是 $\omega_x = \omega_y = 0$ ，与上面一样， z 轴为自转轴；若 $\omega_z = 0$ ，则自转轴在 xy 平面上，但此时， xy 平

面上任一通过质心的轴都是惯性主轴。若 $A = B = C$, 表示流体为球对称, 任一通过质心的轴都是惯性主轴。由此可得邦加雷在 1900 年提出的

定理三 流体自转平衡时, 若自转角速度相对惯性主轴为常向量, 则自转轴必然是一条惯性主轴。

下面再证明邦加雷的关于 ω 大小的限制条件。以后讨论就取 z 轴为自转轴, xy 平面为赤道面。流体可由水准面族 (等密度面族) 组成, 即

$$W = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = C(\text{常数}) \quad (7.8)$$

表面 S 也是一水准面。由格林 (Green) 定理可知函数 W 有关系

$$\begin{aligned} \iiint_{(T)} \Delta W dv &= \iiint_{(T)} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) dv \\ &= \iint_{(S)} \left(\alpha \frac{\partial W}{\partial x} + \beta \frac{\partial W}{\partial y} + r \frac{\partial W}{\partial z} \right) dS \end{aligned} \quad (7.9)$$

其中 T 为整个流体, (S) 为它的表面, dv, dS 分别为相应的体积元和面积元; α, β, r 为 S 表上 dS 处的外法线方向余弦。(7.9) 式中面积分的被积函数即 dS 处加速度在外法线方向投影, 由于 S 为水准面, 上面任一点的加速度应与内法线重合, 故必有面积分小于 0, 即

$$\iiint_{(T)} \Delta W dv < 0 \quad (7.10)$$

以 (7.8) 式代入得

$$\iiint_{(T)} (\Delta V + 2\omega^2) dv < 0 \quad (7.11)$$

但 V 为流体内体积元 dv 处的位函数, 应满足柏松方程:

$$\Delta V = -4\pi G\sigma$$

其中 G, σ 为万有引力常数和 dv 处的密度。代入 (7.11) 式得

$$\iiint_{(T)} (-4\pi G\sigma + 2\omega^2) dv < 0$$

即

$$\omega^2 < 2\pi G \bar{\sigma} \quad (7.12)$$

其中 $\bar{\sigma}$ 为整个流体的平均密度：

$$\bar{\sigma} = \iiint_{(T)} \sigma dv / \iiint_{(T)} dv$$

(7.12)式即邦加雷关于 ω 大小限制条件：

定理四 自转角度为常数的流体平衡时，必有 $\omega < \sqrt{2\pi G \bar{\sigma}}$

$\sqrt{2\pi G \bar{\sigma}}$ 又称为**邦加雷极限**。此定理是流体自转平衡的必要条件。太阳系各大行星及已知自转和密度的卫星都满足这个条件。太阳和自转不快的恒星也符合。

第二节 马克洛林体和雅可比体

上节只是一般研究方法和结果，尚未具体讨论平衡形状。本节先讨论均匀流体的平衡形状，即 σ 为常数，仍设 z 轴为自转轴。由于观测到的较大天体一般为椭球体，故用椭球体来检验是否可能为平衡形状。适当取 xy 轴方向，表面方程可写为：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (7.13)$$

由于表面也是一水准面，又可表为：

$$V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{常数}$$

其中 V 为流体对其表面一点引力的位函数，根据第二章第二节的知识，可写为

$$\left. \begin{aligned}
 V &= \text{常数} - Px^2 - Qy^2 - Rz^2 \\
 P &= \pi abcG\sigma \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)\Delta} \\
 Q &= \pi abcG\sigma \int_0^\infty \frac{ds}{(b^2 + s)\Delta} \\
 R &= \pi abcG\sigma \int_0^\infty \frac{ds}{(c^2 + s)\Delta} \\
 \Delta &= \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}
 \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

代入上式得

$$\left(P^2 - \frac{\omega^2}{2}\right)x^2 + \left(Q - \frac{\omega^2}{2}\right)y^2 + Rz^2 = \text{常数}$$

此式与(7.13)式代表同一曲面,故应有

$$a^2\left(P - \frac{\omega^2}{2}\right) = b^2\left(Q - \frac{\omega^2}{2}\right) = c^2R \quad (7.15)$$

引入下列参量:

$$s = c^2\zeta, u = c^2/a^2, v = c^2/b^2 \quad (7.16)$$

则(7.14)式成为:

$$\left. \begin{aligned}
 P &= \pi G\sigma \int_0^\infty \frac{u d\zeta}{(1 + u\zeta)D} \\
 Q &= \pi G\sigma \int_0^\infty \frac{v d\zeta}{(1 + v\zeta)D} \\
 R &= \pi G\sigma \int_0^\infty \frac{d\zeta}{(1 + \zeta)D} \\
 D &= \sqrt{(1 + \zeta)(1 + u\zeta)(1 + v\zeta)}
 \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

代入(7.15)式可得两个等式:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\omega^2}{2\pi G\sigma} = \Omega &= \int_0^\infty \frac{\zeta u(1 - u) d\zeta}{(1 + \zeta)(1 + u\zeta)D} \\
 \frac{\omega^2}{2\pi G\sigma} = \Omega &= \int_0^\infty \frac{\zeta v(1 - v) d\zeta}{(1 + \zeta)(1 + v\zeta)D}
 \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

二式相减可得:

$$(u-v) \int_0^\infty (1-u-v-uv\zeta) \frac{\zeta d\zeta}{D^3} = 0 \quad (7.19)$$

这就是椭球能成为平衡形状要满足的条件。此式有两个因子，分为两种情况讨论：

1. $u=v$ 时，即 $a=b$ ，为旋转椭球体。此时(7.18)式的两个式子完全相同，可写为

$$\begin{aligned} \Omega = \varphi(u) &= \int_0^\infty \frac{u(1-u)d\zeta}{(1+u\zeta)^2(1+\zeta)^{3/2}} \\ &= \frac{1+2u}{1-u} \sqrt{\frac{u}{1-u}} \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{1-u}{u}} - \frac{3u}{1-u} \end{aligned} \quad (7.20)$$

下面再分两种情况讨论。

① 若 $a < c$ ，则 $u > 1$ ， $1-u < 0$ ， $\varphi(u)$ 应为复数；但若此椭球体为平衡形状，应有

$$\varphi(u) = \Omega = \frac{\omega^2}{2\pi G\sigma}$$

是实数，这表明

定理一 均匀流体自转时，平衡形状不可能为长球体($a=b < c$)。

② 若 $a > c$ ，即 $1-u > 0$ ，此为扁球体。再引入参量 l 为：

$$a^2 = c^2(1+l^2), \quad \sqrt{\frac{1-u}{u}} = l$$

则(7.20)式应成为：

$$\Omega = \frac{3+l^2}{l^3} \operatorname{tg}^{-1} l - \frac{3}{l^2} = \phi(l) \quad (7.21)$$

下面证明 $\phi(l)$ 在 $l \in (0, +\infty)$ 中存在唯一的极大值。对 l 取导数得：

$$\left. \begin{aligned} \phi'(l) &= \frac{9+l^2}{l^4} \theta(l) \\ \theta(l) &= \frac{7l^3+9l}{(l^2+1)(l^2+9)} - \operatorname{tg}^{-1} l \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

因此要 $\phi'(l) = 0$ 时, 只有 $\theta(l) = 0$, 但从上式知

$$\theta(0) = 0, \quad \theta(+\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

而

$$\theta'(l) = \frac{8l^4(3-l^2)}{(l^2+1)^2(l^2+9)}$$

此表明 $l < \sqrt{3}$ 时 $\theta(l)$ 单调上升, 在 $l > \sqrt{3}$ 以后单调下降, 因此 $\theta(l) = 0$ 只有一个正根, 即 $\phi(l)$ 只有一个极值。但又可看出

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(+\infty) = 0$$

而

$$\phi(l) = \Omega \geq 0, \quad \text{对 } l \in (0 + \infty)$$

因此这个极值是极大值, 此极大值的 l 可以 $\theta(l) = 0$ 用数值方法解出为

$$l = l_0 = 2.5293 \dots$$

算出

$$\phi(l_0) = 0.22467 \dots$$

由此可得

定理二 若均匀自转流体的 ω, σ 满足关系:

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi G\sigma} < 0.22467 \dots$$

则平衡形状可以为旋转椭球体(扁球体)。

这个结果由马克洛林证明, 故平衡形状为扁球体称为**马克洛林体**。

由此还可得到一个推理, 当 $a = c$ 时, 为球体, 相应的 $l = 0$, 此时有 $\phi(l) = 0$, 即

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi G\sigma} = \phi(l) = 0$$

只有 $\omega = 0$ 。即得

推理 均匀球体自转时的平衡形状不可能为球体, 只有不自

转流体平衡形状才可能为球体。

2. $u \neq v$ 时, 应有 $a \neq b \neq c$, 称为三轴椭球体。此时由(7.19)式有

$$\phi(u, v) = \int_0^\infty (1 - u - v - uv\zeta) \frac{\zeta d\zeta}{D^3} = 0 \quad (7.23)$$

另外, 再用 v, u 分别乘(7.19)的两式相减得

$$\phi(u, v) = \int_0^\infty \frac{uv\zeta d\zeta}{(1 + u\zeta)(1 + v\zeta)D} = \Omega \quad (7.24)$$

此两式可看成 u, v 的方程, 即三轴椭球体是平衡形状应满足的条件。若可从这两式解出 u, v 的值, 相应的三轴椭球体存在。

先证明一简单关系。由(7.23)式可得:

$$(1 - u - v) \int_0^\infty \frac{\zeta d\zeta}{D^2} = uv \int_0^\infty \frac{\zeta^2 d\zeta}{D^3} > 0$$

这是因为 u, v, ζ, D 都不可能为负值, 由此可得

$$1 - u - v > 0, \quad u + v < 1$$

可知 $u < 1, v < 1$, 即 $c < a, c < b$, 这说明平衡形状不可能为长椭球体, 与前面结论一致。

直接解(7.23), (7.24)式很困难, 下面先讨论函数 $\phi(u, v)$ 和 $\phi(u, v)$ 的变化。先求偏导数

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial u} &= -A_0 - A_1 u \\ A_0 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\zeta(1 + \zeta)}{D^5} [2 + (3 - u - v)\zeta - uv\zeta^2] d\zeta \\ A_1 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\zeta^2(1 + \zeta)}{D^5} [2 + (3 - u - v)\zeta - uv\zeta^2] d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

但因 $\phi(u, v)$ 对 u, v 为对称, 因此有

$$\frac{\partial \phi}{\partial v} = -A_0 - A_1 v \quad (7.26)$$

从这两式不容易判断 A_0, A_1 的符号。再用关系:

$$\frac{d}{d\zeta} \left[\frac{\zeta^2(1+\zeta)}{D^3} \right] = \frac{\zeta(1+\zeta)}{2D^5} [4 + (3+u+v)\zeta - 2uv\zeta^2 - 3uv\zeta^3]$$

两端对 ζ 进行积分, 积分限取 0 到 $+\infty$, 左端显然为 0, 可得关系:

$$0 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\zeta(1+\zeta)}{D^5} [4 + (3+u+v)\zeta - 2uv\zeta^2 - 3uv\zeta^3] d\zeta \quad (7.27)$$

用此式同(7.25)式可组合成

$$A_0 = \frac{3}{4} \int_0^\infty \frac{\zeta(1+\zeta)}{D^5} (1-u-v+uv\zeta^2) d\zeta > 0$$

$$2A_0 + 3A_1 = \frac{3}{2} (3-u-v) \int_0^\infty \frac{\zeta^2(1+\zeta)^2}{D^5} d\zeta > 0$$

由此可得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial u} &= -A_0 - A_1 v = -A_0 \left(1 - \frac{2}{3} v \right) - \frac{v}{3} (2A_0 + 3A_1) < 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial v} &= -A_0 - A_1 u = -A_0 \left(1 - \frac{2}{3} u \right) - \frac{u}{3} (2A_0 + 3A_1) < 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.28)$$

此式表明: 若 v 固定 $\phi(u, v_0)$ 为 u 的单调减小函数; 若 u 固定, $\phi(u_0, v)$ 为 v 的单调减小函数。但容易看出, 对任一 $0 < v_0 < 1$ 的 v_0 值, 有

$$\phi(0, v_0) = (1 - v_0) \int_0^\infty \frac{\zeta d\zeta}{(1+\zeta)^{3/2} (1+v_0\zeta)^{3/2}} > 0$$

$$\phi(1, v_0) = -v_0 \int_0^\infty \frac{\zeta d\zeta}{(1+\zeta)^2 (1+v_0\zeta)^{3/2}} < 0$$

这说明 u 从 0 连续增加到 1 时, 必有且只有一个 $u = u_0$ 存在使得 $\phi(u_0, v_0) = 0$, 这表明函数关系

$$\phi(u, v) = 0$$

在域 $0 < u < 1, 0 < v < 1$ 内确定了 u 为 v 的单值函数。反之也一样, 也确定了 v 为 u 的单值函数, 而且因

$$\frac{du}{dv} = - \frac{\partial \phi(u, v)}{\partial v} / \frac{\partial \phi(u, v)}{\partial u} < 0 \quad (7.29)$$

故 u 为 v 的单调减小函数(反之一样)。而且有

$$0 = \phi(u, 0) = (1-u) \int_0^\infty \frac{\zeta d\zeta}{(1+\zeta)^{3/2}(1+u\zeta)^{3/2}}$$

其中积分不可能为 0, 只有 $1-u=0$, 即 $u=1$ 。另外

$$0 = \phi(u, 1) = -u \int_0^\infty \frac{\zeta d\zeta}{(1+\zeta)^2(1+u\zeta)^{3/2}}$$

也只有 $u=0$ 。

由上可看出 u, v 的变化关系: $v=0$ 时 $u=1$; $v=1$ 时 $u=0$, v 从 0 单调增加到 1 过程中, u 则由 1 单调减小到 0, 必然会只有一次 $u=v$ 情况。设此值为 $\tau=u=v$, 显然 $0<\tau<1$ 。当 $u=v=\tau$ 时, (7.23) 式成为

$$\begin{aligned} (1-2\tau) \int_0^\infty \frac{\zeta d\zeta}{(1+\zeta)^{3/2}(1+\tau\zeta)^3} \\ = \tau^2 \int_0^\infty \frac{\zeta^2 d\zeta}{(1+\zeta)^{3/2}(1+\tau\zeta)^3} \end{aligned} \quad (7.30)$$

式中积分可积出为初等函数, 故可由它解出 τ 。用数值方法解出 τ 值为

$$\tau = 0.3396\ldots$$

下面证明, 在 $u=v=\tau$ 时 $\phi(u, v)$ 达到唯一的极大值。由于已确定 u, v 互为单调减小函数, 只要讨论 ϕ 对 u, v 之一的微商就行。取

$$\frac{d\phi}{dv} = \frac{\partial \phi}{\partial v} + \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{du}{dv}$$

其中 du/dv 用 (7.29) 式代入可得

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{d\phi}{dv} = \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial \phi}{\partial v} - \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial \phi}{\partial v} \quad (7.31)$$

由 (7.24) 式可求出:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial u} &= v \left[B_0 + B_1 \left(v - \frac{u}{2} \right) \right] \\
\frac{\partial \phi}{\partial v} &= u \left[B_0 + B_1 \left(u - \frac{v}{2} \right) \right] \\
B_0 &= \int_0^\infty \frac{\zeta(1+\zeta)^2}{D^5} \left(1 - \frac{1}{2} uv \zeta^2 \right) d\zeta \\
B_1 &= \int_0^\infty \frac{\zeta(1+\zeta)^2}{D^5} d\zeta > 0
\end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

B_0 利用关系(7.27)式可化为

$$B_0 = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{\zeta(1+\zeta)}{D^5} (1 - u - v + uv\zeta^2) d\zeta > 0 \quad (7.33)$$

连同 $\partial\phi/\partial u$, $\partial\phi/\partial v$, $\partial\phi/\partial u$, $\partial\phi/\partial v$ 代入(7.31)式右端反号后可得:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{d\phi}{dv} &= (u-v) \left[A_0 B_0 + A_0 B_1 (u+v) + \frac{3}{2} A_1 B_1 uv \right] \\
&= (u-v) [A_0 B_0 + A_0 B_1 [u + (1-u)v] \\
&\quad + \frac{1}{2} B_1 (2A_0 + 3A_1) uv] \quad (7.34)
\end{aligned}$$

其中方括号内量已可看出大于 0, 而 $\partial\phi/\partial u$ 已知为负, 因此可得 $d\phi/dv$ 与 $u-v$ 同号。

① $u-v > 0$ 时, 即 $v < \tau$, 有 $d\phi/dv > 0$ 。

② $u-v < 0$ 时, 即 $v > \tau$, 有 $d\phi/dv < 0$ 。

而 ϕ 为 v 的连续函数, 故只有 $v = \tau (u = \tau)$ 时,

$$d\phi/dv = 0$$

故 $v = \tau$ 为 ϕ 的极值, 从 $v = \tau$ 前后 $d\phi/dv$ 的符号变化可知此极值为极大。

当 $u = v = \tau$ 时, $\phi(u, v)$ 可以积出为 τ 的函数, 用 $\tau = 0.3396\cdots$ 代入可得 ϕ 的极大值为

$$\phi = \phi_1 = \Omega_1 = 0.18711484\cdots$$

在极大值时 $u = v$, 即 $a = b$, 为旋转椭球体, 由此可得

定理三 均匀流体自转平衡时,若

$$\frac{\omega^2}{2\pi G\sigma} = \Omega < \Omega_1 = 0.18711484\cdots$$

则平衡形状有可能为三轴椭球体。

这种平衡状的三轴椭球体又称为**雅可比体**。在

$$\Omega_1 \leq \Omega < 0.22467\cdots$$

可能为马克洛林体。当然 $\Omega < \Omega_1$ 时也可能为马克洛林体。

第三节 洛 熙 极 限

上两节未考虑外力作用,讨论大行星时还可以,讨论卫星形状时,由于行星的引力大,不能忽略。本节主要讨论卫星情况,而把行星近似看作球对称分布,即可认为是质点。

原点取在卫星质心 O , 设 S 为行星中心, $\vec{OS}$ 为 x 轴方向, 卫星轨道面取为 xy 平面, 并取 y, z 轴使 xyz 为右手系。设 M', M 为行星和卫星质量, 卫星轨道为圆形, 角速率为 ω , 半径为 A 。则卫星内部任一点 $P(x, y, z)$ 受到的作用力有

1. 卫星(流体)对它引力, 位函数为 V ;
2. S 对它的直接引力, 位函数为

$$U = \frac{GM'}{r}, r^2 = (x - A)^2 + y^2 + z^2 \quad (7.35)$$

3. S 对它的起潮力, 起潮加速度位函数可近似地表为 $-GM'x/A^2$;

4. 卫星公转的离心力, 位函数为

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

因此, 卫星(流体)的水准面方程为

$$V + U - \frac{GM'}{A^2}x + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{常数} \quad (7.36)$$

由于卫星很小，故 $x/A, y/A, z/A$ 都是小量，可准到三次幂足够了。故

$$\begin{aligned} U &= \frac{GM'}{r} = \frac{GM'}{A} \frac{A}{r} \\ &= \frac{GM'}{A} \left(1 - \frac{2x}{A} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{A^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= GM' \left(\frac{1}{A} + \frac{x}{A^2} + \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{2A^3} \right) \end{aligned}$$

第一项为常数，可合并到常数项中，再令

$$\omega_1 = \frac{GM'}{A^3} \quad (7.37)$$

则(7.37)式可写为

$$V + \frac{\omega_1^2}{2}(2x^2 - y^2 - z^2) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{常数}$$

但有

$$\omega^2 A^3 = G(M' + M) = GM'(1 + \mu), \mu = M/M'$$

故得

$$\omega^2 = \frac{GM'}{A^3}(1 + \mu) = \omega_1^2(1 + \mu)$$

代入上面水准面方程得：

$$2V + (3 + \mu)\omega_1^2 x^2 + \mu\omega_1^2 y^2 - \omega_1^2 z^2 = \text{常数} \quad (7.38)$$

若卫星平衡时表面形状为三轴椭球面，方程为

$$x^2 a^{-2} + y^2 b^{-2} + z^2 c^{-2} = 1 \quad (7.39)$$

由(7.14)式知

$$V = \text{常数} - Px^2 - Qy^2 - Rz^2 \quad (7.40)$$

代入(7.38)式得水准面方程为

$$[2P - (3 + \mu)\omega_1^2]x^2 + [2Q - \mu\omega_1^2]y^2 + (2R + \omega_1^2)z^2 = \text{常数}$$

而表面也是一个水准面，与(7.39)式比较可得

$$\left. \begin{aligned} 2P - (3 + \mu)\omega_1^2 &= Na^{-2} \\ 2Q - \mu\omega_1^2 &= Nb^{-2} \\ 2R + \omega_1^2 &= Nc^{-2} \end{aligned} \right\} \quad (7.41)$$

其中 N 为比例因子, 为常数。三式相加有

$$2(P + Q + R) - 2(1 + \mu)\omega_1^2 = N(a^{-2} + b^{-2} + c^{-2}) \quad (7.42)$$

但 V 满足柏松方程, 用(7.40)式代入得

$$-2(P + Q + R) = -4\pi G\sigma$$

即

$$P + Q + R = 2\pi G\sigma$$

代入(7.42)式有

$$N(a^{-2} + b^{-2} + c^{-2}) = 4\pi G\sigma - 2(1 + \mu)\omega_1^2 \quad (7.43)$$

由此可定出因子 N , 代入(7.41)式的三个式子, 其中 P , Q , R 用(7.17)式则得:

$$\begin{aligned} (1 + u + v) \int_0^\infty \frac{u d\zeta}{(1 + u\zeta)D} &= 2u + [(3 + \mu) \\ &\quad + (1 - \mu)u + (3 + \mu)v] \Omega_1 \end{aligned} \quad (7.44)$$

$$(1 + u + v) \int_0^\infty \frac{v d\zeta}{(1 + v\zeta)D} = 2v + [\mu + \mu u - (2 + \mu)v] \Omega_1 \quad (7.45)$$

$$(1 + u + v) \int_0^\infty \frac{d\zeta}{(1 + \zeta)D} = 2 - (3 + 2\mu + u + v) \Omega_1 \quad (7.46)$$

其中

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1^2}{2\pi G\sigma} \quad (7.47)$$

以 v, u 分别乘(7.44)、(7.45)式后再相减可得:

$$\Omega_1 = \frac{uv(v - u)}{3v + \mu(v - u)} \int_0^\infty \frac{\zeta d\zeta}{(1 + u\zeta)(1 + v\zeta)D} \quad (7.48)$$

代入(7.46)式则得

$$[uv(v - u) + 3v(v - 1) + \mu(v + u)(v - u + 1)] \int_0^\infty \frac{\zeta d\zeta}{D^3}$$

$$= uv[4v - u - 3 + \mu(v - u)] \int_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{D^3} \quad (7.49)$$

用这两个式子可求出不同 μ 值时, Ω_1 的极大值在 $\mu = 0$ 时, 可算出 Ω_1 极大时的值为

$$0.0450347\dots$$

相应的

$$u = 0.2330, v = 0.8909\dots$$

也就是说, 卫星要使平衡形状成椭球体, 必须

$$\Omega_1 \leqslant 0.0450347\dots$$

即

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1^2}{2\pi G\sigma} = \frac{M'}{2A^3\pi\sigma} \leqslant 0.0450347\dots$$

设行星为球形, 半径为 R , 密度为 σ' , 则

$$M' = \frac{4}{3} \pi R^3 \sigma'$$

代入上式可得

$$A \geqslant 2.45539 \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^{1/3} R \quad (7.50)$$

此式就是著名的洛熙极限。

一般卫星质量很小时, 用这个关系已够了, 但若卫星质量大, $\mu \neq 0$. 达尔文(*G. H. Darwin*)算出了不同 μ 值的 A 极限值系数如下

表 7.1

μ	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
A 的系数	2.484	2.485	2.490	2.490	2.502	2.508	2.514

对于土星环, 平均半径为 $A = 2.31R$ (土星半径), 若环密度不大于土星密度(实际情况如此), 则不符合(7.50)式, 不能形成椭球

体,分散成观测到的薄环。

第四节 不均匀流体的平衡形状问题

前两节只讨论了均匀流体情况,结果只能近似地符合天体实际。不均匀流体中密度不是常数,情况要复杂得多。相应形状理论不仅要讨论表面平衡形状,还要讨论内部密度分布。克莱洛首先提出较系统的理论,以后经很多人的发展而形成较完整理论。本节只简单介绍克莱洛理论的基本结果,有关克莱洛理论的详细介绍,可参看梯塞朗,苏被金(M.F. Subbotin)的著作。有关本世纪以来的新发展,可参看昌德拉塞卡(S. Chandrasekhar),列文(M. L. Levin)穆拉托夫(R. Z. Muratov)的著作(见后参考文献)。

克莱洛理论中认为不均匀流体的水准面(即等密度面)为旋转椭球面,并设水准面的密度 σ 和椭率 α 都是此旋转椭球面到中心平均距离 r 的函数,记为 $\sigma = \sigma(r)$, $\alpha = \alpha(r)$ 。定义

$$D = r^{-3} \int_0^r \sigma d(r^3) \quad (7.51)$$

为由中心到距离 r 处的平均密度。

$$D' = \frac{dD}{dr} = -3r^{-1}D + 3r^{-1}\sigma \quad (7.52)$$

克莱洛以这两式为基础,得到下面三个重要结果:

1. 当 $\sigma' = d\sigma/dr < 0$ 时有

$$\frac{d}{dr} [r^6 D^2 \alpha'] > 0$$

由此可得

$$\alpha' = d\alpha/dr > 0$$

这表明越外面,椭率越大。初始假设 $\sigma' < 0$ 是合理的,即越往中心

密度越大,符合天体实际情况。

2. 若 $\sigma' < 0$, 可推出

$$\frac{d}{dr}(\alpha r^{-3}) < 0$$

即 αr^{-3} 为 r 的单调减小函数。这表明 α 随 r 增加, 但没有 r^3 增加得那样快。

3. 不均匀流体自转平衡时若为旋转椭球体, 则表面的 椭 率 α_1 应满足条件:

$$\frac{1}{2}q_1 < \alpha_1 < \frac{5}{4}q_1$$

无中

$$q_1 = \frac{\omega^2}{4\pi G D_1}$$

里面的 ω 为自转角速率, D_1 为整个流体的平均密度。所有行星的行状都符合这个结果。

第五节 欧拉角和昂多瓦叶变量

从本节起讨论自转理论, 仍以刚体地球模型为基础, 但不采用伍拉德 1953 年的理论, 而是用 1977 年木下宙的理论为依据, 再考虑非刚性改正问题。

刚体转动的广义坐标选取, 传统取法是用欧拉角; 但用正则方程组后, 哈密顿函数包含变量较多, 增加问题复杂性。1923 年, 法国天文学家昂多瓦叶(H. Andoyer)提出一组变量, 建议取代欧拉角, 当时未引起注意。50 年后, 人们才重视这组变量的优点, 命名为**昂多瓦叶变量**。

1 定义、传统刚体自转运动讨论中, 用三个欧拉角, 表示固定于刚体上的坐标系相对于空间惯性坐标系之间的关系。在图 7.1

中,以刚体(地球)质心 O 作坐标原点, XYZ 为惯性坐标系; xyz 为固定于刚体上的坐标系,一般取为刚体的惯量主轴方向, z 轴指北方, xy 为赤道面。对地球而言, z 轴称为形状轴,指向形状北极, xy 平面称形状赤道面。由于在无外力情况下,总动量矩 $\vec{G}$ 守恒,图中 G 为 $\vec{G}$ 在天球上交点 $\hat{Q}\hat{P}$ 大圆以 G 为极。

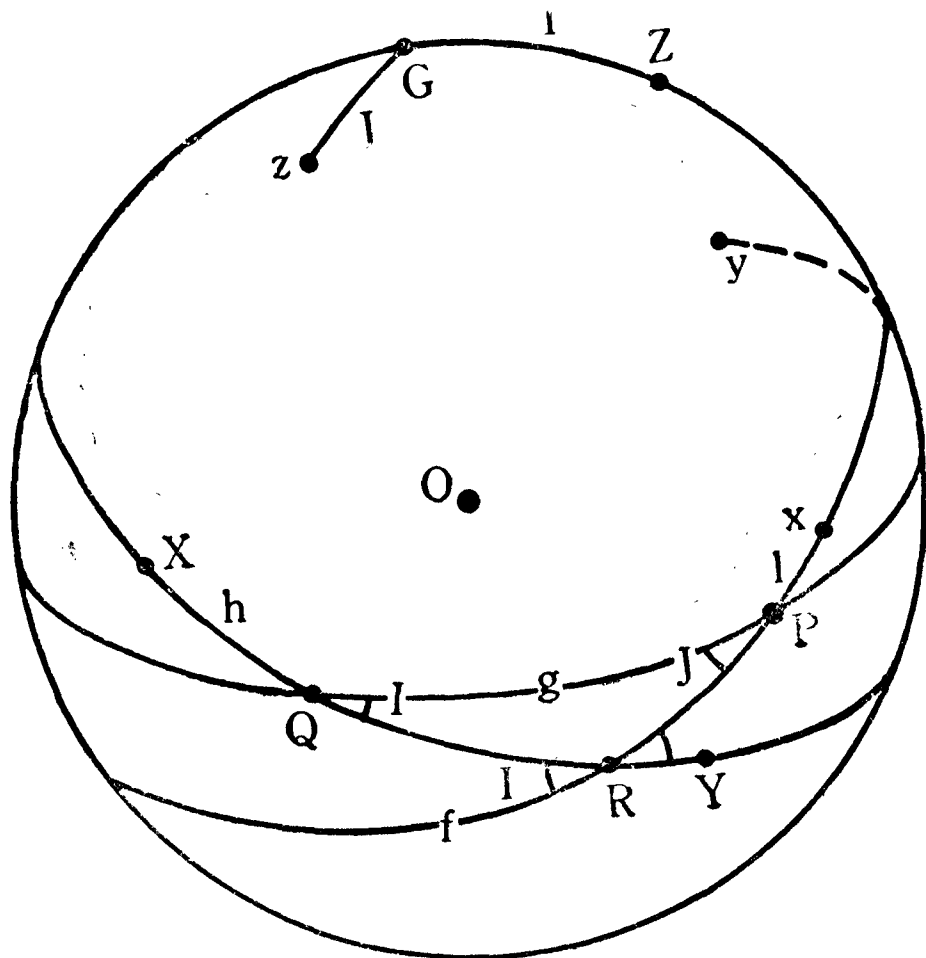


图 7.1

欧拉角取 xy 面对 XY 面的升交点 R 处的三个角度: $\hat{X}\hat{R} = h_f$, $\hat{R}\hat{x} = \phi$, 交角 I_f 。但昂多瓦叶变量却联系到三个大圆,取 $\hat{P}\hat{x} = l$, $\hat{\theta}\hat{P} = g$, $\hat{X}\hat{Q} = h$ 作为表示刚体的广义坐标。与它们正则共轭的广义动量,可从动能 T 来求出: 设 A, B, C 表示刚体对三个惯量主轴 xyz 的主惯量矩; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 为自转角速度向量 $\vec{\omega}$ 在 xyz 轴上的分量,则从刚体动力学知。

$$T = \frac{1}{2} (A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2) \quad (7.53)$$

而且总动量矩 $\vec{G}$ 在 xyz 轴上分量即为 $A\omega_x, B\omega_y, C\omega_z$ 。

因 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 分别为绕 x, y, z 轴转的角速度大小,而 $\dot{l}, \dot{g}, \dot{h}$

也是绕 z, G, Z 轴转的角速度大小。根据投影关系应有,

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{l} \cos \widehat{xz} + \dot{g} \cos \widehat{xG} + \dot{h} \cos \widehat{xZ} \\ \omega_y &= \dot{l} \cos \widehat{yz} + \dot{g} \cos \widehat{yG} + \dot{h} \cos \widehat{yZ} \\ \omega_z &= \dot{l} \cos \widehat{zz} + \dot{g} \cos \widehat{zG} + \dot{h} \cos \widehat{zZ} \end{aligned} \right\} \quad (7.54)$$

因此, l, g, h 的共轭变量 L, G, H 应为

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{\partial T}{\partial \dot{l}} = A\omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial \dot{l}} + B\omega_y \frac{\partial \omega_y}{\partial \dot{l}} + C\omega_z \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{l}} \\ &= A\omega_x \cos \widehat{xz} + B\omega_y \cos \widehat{yz} + C\omega_z \cos \widehat{zz} \\ &= G \cos \widehat{Gz} = G \cos J = C\omega_z \\ G &= G \cos \widehat{GG} = G \\ H &= G \cos \widehat{GZ} = G \cos I \end{aligned} \right\} \quad (7.55)$$

若用 G_x, G_y, G_z 表示 $\vec{G}$ 的三分量 $A\omega_x, A\omega_y, A\omega_z$ 则 $G_z = L$,

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{G_x^2}{A} + \frac{G_y^2}{B} + \frac{L^2}{C} \right) \quad (7.56)$$

而且 $\vec{G}$ 投影到 xy 平面上的分量大小为

$$\sqrt{G_x^2 + G_y^2} = \sqrt{G^2 - L^2}$$

方向为 O 到 $z\vec{G}$ 大圆延长到与 xy 大圆的交点方向; 此交点应在图 7.1 中 P 点沿 xy 方向前面 90° 处, 距 x 轴为 $90^\circ - l$, 距 y 轴为 l , 因此有

$$G_x = \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, \quad G_y = \sqrt{G^2 - L^2} \cos l \quad (7.57)$$

代入(7.56)式得

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) (G^2 - L^2) + \frac{L^2}{C} \quad (7.58)$$

由此可看出, 在无外力情况下, T 为哈密顿函数, 其中不显含 t , 而且不显含 g, h, H 。

在很多情况下, 还可近似地取 $A = B$, 此时 T 中连 l 也没有了, 即

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{G^2 - L^2}{A} + \frac{L^2}{C} \right) \quad (7.59)$$

这就是用昂多瓦叶变量的优点之一,循环坐标多,便于用正则方程组讨论。还有一个优点是 J 为小量,它是地球形状轴(z 轴)与动量矩轴($\vec{G}$)之间的交角,也就是极移量,大小仅 10^{-6} 弧度。绝大多数课题中用了 J 一次幂就足够了。利用这点也可以使问题简化。

2. 与欧拉角的关系。虽然用昂多瓦叶变量建立运动方程及解方程都比较简单,但最后表达地球自转的主要课题:地板移动(瞬时自转轴相对于形状轴的移动);岁差章动(瞬时自转轴或形状轴在空间的移动;都要牵涉到形状轴或瞬时自转轴的方向,即图 7.1 中的 h_f, I_f (f 对应形状轴)及相应于瞬时自转轴的 h_r 和 I_r (图 7.1 中未标出,但类似)。需要给出 h_f, I_f, h_r, I_r 表达为昂多瓦叶变量的关系式。

h_f, I_f, ϕ 同 l, g, h 的关系简单,可从图 7.1 中三角形 PQR , 它的三角,三边同这些量有关,由余弦定律和正弦定律可得:

$$\left. \begin{aligned} \cos I_f &= \cos I \cos J - \sin I \sin J \cos g \\ \frac{\sin(h_f - h)}{\sin J} &= \frac{\sin(\phi - l)}{\sin I} = \frac{\sin g}{\sin I_f} \end{aligned} \right\} \quad (7.60)$$

由于 J 是小量,如只准到 J 的一阶,则得

$$\left. \begin{aligned} h_f &= h + J \frac{\sin g}{\sin I} + O(J^2) \\ I_f &= I + J \cos g + O(J^2) \\ \phi &= l + g - J \cos I \sin g + O(J^2) \end{aligned} \right\} \quad (7.61)$$

至于 h_r, I_r 同昂多瓦叶变量之间的关系,要通过 h_f, I_f 来求。先用投影关系求出

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\phi} \cos \widehat{zx} + \dot{h}_f \cos \widehat{Zx} + \dot{I}_f \cos Rx \\ &= 0 + \dot{h}_f \sin \phi \sin I_f + \dot{I}_f \cos \phi \\ \omega_y &= 0 + \dot{h}_f \cos \phi \sin I_f - \dot{I}_f \sin \phi \\ \omega_z &= \dot{\phi} + \dot{h}_f \cos I_f \end{aligned} \right\} \quad (7.62)$$

用它们反过来解出：

$$\left. \begin{aligned} \dot{h}_f &= (\omega_x \sin \phi + \omega_y \cos \phi) / \sin I_f \\ \dot{I}_f &= \omega_x \cos \phi - \omega_y \sin \phi \\ \dot{\phi} &= -\frac{\cos I_f}{\sin I_f} (\omega_x \sin \phi + \omega_y \cos \phi) + \omega_z \end{aligned} \right\} \quad (7.63)$$

但只准到 J 一次幂，有

$$\left. \begin{aligned} A\omega_x &= G_x = G \sin l \sin J = JG \sin l + O(J^3) \\ B\omega_y &= G_y = G \cos l \sin J = JG \cos l + O(J^3) \\ C\omega_z &= G_z = G \cos J = G + O(J^2) \\ \omega &= \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{J^2 \left(\frac{G^2}{A^2} \sin^2 l + \frac{G^2}{B^2} \cos^2 l \right) + \omega_z^2} \\ &= \omega_z + O(J^2) \end{aligned} \right\} \quad (7.64)$$

代入上式，又由 $\phi = l + g + O(J)$, $I_f = I + O(J)$ 可得：

$$\left. \begin{aligned} \dot{h}_f &= \frac{J\omega}{\sin I} \left[-\frac{C}{A} \sin l \sin(l+g) + \frac{C}{B} \cos l \cos(l+g) \right] \\ &\quad + O(J^2) \\ \dot{I}_f &= J\omega \left[\frac{C}{A} \sin l \cos(l+g) + \frac{C}{B} \cos l \sin(l+g) \right] \\ &\quad + O(J^2) \\ \dot{\phi} &= J\omega \frac{\cos I}{\sin I} \left[-\frac{C}{A} \sin l \sin(l+g) - \frac{C}{B} \cos l \cos(l+g) \right] \\ &\quad + \omega + O(J^2) \end{aligned} \right\} \quad (7.65)$$

另外, 瞬时自转轴的赤道对应的 h_r, I_r , 是对于 XYZ 坐标系的欧拉角, $\vec{\omega}$ 与瞬时自转轴重合。若把 $\vec{\omega}$ 分解到 XYZ 三个坐标轴, 分量为

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \omega \sin h_r \sin I_r \\ \omega_y &= -\omega \cos h_r \sin I_r \\ \omega_z &= \omega \cos I_r \end{aligned} \right\} \quad (7.66)$$

同时, 又可利用投影关系, 把这三个分量表示为 $\dot{h}_f, \dot{I}_f, \dot{\phi}$ 的函数, 即

$$\omega_x = \dot{h}_f \cos \widehat{Z\hat{X}} + \dot{I}_f \cos \widehat{R'\hat{X}} + \dot{\phi} \cos \widehat{z\hat{X}}$$

其中 R' 为瞬时赤道对 XY 大圆的升交点, $\widehat{R'\hat{X}} = h_f$, 即

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{I}_f \cos h_f + \dot{\phi} \sin h_f \sin I_f \\ \omega_y &= \dot{I}_f \sin h_f - \dot{\phi} \cos h_f \sin I_f \\ \omega_z &= \dot{h}_f + \dot{\phi} \cos I_f, \end{aligned} \right\} \quad (7.67)$$

代入上式, 并用(7.68)式代入, 可解出 h_r, I_r , 若只准到 J 一次, 则可得:

$$\left. \begin{aligned} h_r &= h + \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B}\right) \frac{J}{\sin I} [\sin g - e \sin(2l + g)] \\ &\quad + O(J^2) \\ I_r &= I + \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B}\right) J [\cos g - e \cos(2l + g)] \\ &\quad + O(J^2) \\ e &= \frac{\frac{1}{B} - \frac{1}{A}}{\frac{2}{C} - \frac{1}{A} - \frac{1}{B}} \end{aligned} \right\} \quad (7.68)$$

e 表示地球偏旁旋转椭球的程度, $A = B$ 时, $e = 0$ 用史密松标准地球模型数据,

$$e = 0.00327 = \frac{1}{306} \quad (7.69)$$

从(7.61), (7.68)式看来, 瞬时自转轴或形状轴同动量矩轴之差, 仅为引数是 g 或 $2l + g$ 的周期项。因此三个轴的岁差相同, 但章动项有差别, 其中含引数为 g 的项, 系数约 $0''.3$ 或 $0''.001$, 称为奥波彻(Oppolzer)项。

3. 瞬时黄道参考系, 以前的岁差章动理论都用固定历元黄道坐标系作 $OXYZ$, 由于是惯性系, 有其优点。但日月坐标都是相对于瞬时黄道的; 故若用瞬时黄道参考系, 则在日月作用的摄动函数展开(第七章第九节)中, 要简单些。这里要进行从固定历元黄道的昂多瓦叶变量到瞬时黄道参考系的昂多瓦叶变量的变换, 以及哈密顿函数的相应改变。

图 7.2 是固定历元黄道, 瞬时黄道, 以及动量矩轴赤道面之间的关系。

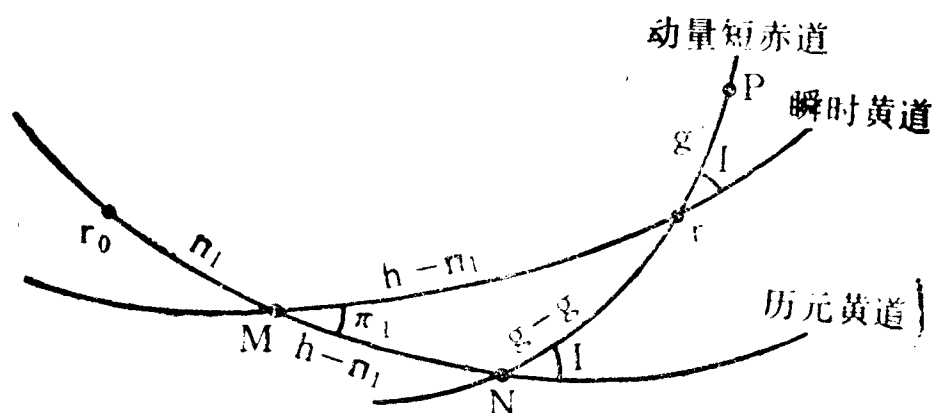


图 7.2

定义瞬时赤道面相应的 h', g' 为

$$h' = \gamma_0 M + M \gamma', g' = g - N \gamma \quad (7.70)$$

其中 γ_0 为固定历元春分点, γ 为所讨论瞬时的秋分点; Π_1, π_1 为瞬时黄道对历元黄道的欧拉角, 由地球运动理论确定, 现在仍采用纽康在 1906 年定出的值:

$$\left. \begin{aligned} \sin \pi_1 \sin \Pi_1 &= 5''.341t + 0''.1935t^2 - 0''.00019t^3 \\ \sin \pi_1 \cos \Pi_1 &= -46''.838t + 0''.563t^2 + 0''.00035t^3 \end{aligned} \right\} \quad (7.71)$$

其中 t 是从 1850 年起算的时间, 以 100 回归年为单位, γ_0 对应 1850.0 平春分点。

下面证明旧的 L, l, G, g, H, h 到新的 L, G', g', H', h' 的变换是正则变换, 需要利用球面三角形 $MN\gamma'$ 。先给出一个有用的球面三角微分公式。

对一般球面三角形, A, B, C 为三边; a, b, c 为对应三角, 根据余弦公式的微分及五元素公式可化出:

$$da = \cos C db + \cos B dc + \sin b \sin C dA \quad (7.72)$$

根据图 7.2 中三角形 $MN\gamma'$, 取 $a = g - g', b = h' - \Pi_1, c = h - \Pi_1, A = \pi_1, B = 180^\circ - I, C = I'$ 。代入可得

$$\begin{aligned} d(g - g') &= \cos I' d(h' - \Pi_1) - \cos I d(h' - \Pi_1) \\ &\quad + \sin(h' - \Pi_1) \sin I' d\pi_1 \end{aligned}$$

可整理为:

$$\begin{aligned} (dg + \cos I dh) - (dg' + \cos I' dh') \\ + \left[\cos I' \frac{d\Pi_1}{dt} - \cos I \frac{d\Pi_1}{dt} \right. \\ \left. - \sin(h' - \Pi_1) \sin I' \frac{d\pi_1}{dt} \right] dt = 0 \end{aligned}$$

乘上 G , 并在 dt 项中的 $\cos I$ 用下式代替:

$$\cos I = \cos I' \cos \pi_1 - \sin I' \sin \pi_1 \cos(h' - \Pi_1)$$

(余弦定律), 最后可整理成:

$$(G dg + H dh) - (G' dg + H' dh') + E dt = 0 \quad (7.73)$$

$$G' = G, H' = G \cos I',$$

$$E = H'(1 - \cos \pi_1) \frac{d\Pi_1}{dt}$$

$$+ G' \sin I' \left[\sin \pi_1 \cos(h' - \Pi_1) \frac{d\Pi_1}{dt} \right.$$

$$\left. - \sin(h' - \Pi_1) \frac{d\pi_1}{dt} \right] \quad (7.74)$$

(7.73)式表明左端微分式为全微分($=0$),因此由第三章第三节中的正则变换条件知, L, l, G, g, H, h 到 L, l, G', g', H', h' 的变换为正则变换(其中 L, l 未变, G 实际上也未变),而且新哈密顿函数等于旧的加上 E ,其中 π_i, Π_i 作为时间的显函数。

以后为方便起见,新变量仍用 L, G, H, l, g, h 表示。

第六节 刚体地球的运动方程

前面已得动能 T 及变换为新变量后哈密顿函数增加项 E ,只要知道外力产生的势函数后,哈密顿函数就可全部写出,运动方程就是相应的正则方程组。

1. 外面天体引力产生的势函数。与第二章第二节中求天体对外一质点引力的位函数相同的方法可以求出这里的势函数 U 。图7.3中, M' 为外面任一天体(日,月)质量就用 M' 表示 O 为地球质心, dv 为地球体内任一处的体积元,坐标为 $\vec{r}=(\xi, \eta, \zeta)$,密度为 $\sigma=\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ 。则 M' 对地球的引力势函数为

$$U = GM' \iiint_{(E)} \frac{\sigma dv}{\Delta}$$

由图7.3知

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= R^2 + r^2 - 2Rr \cos H \\ \frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{R} \left(1 + \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{R} \cos H \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{R} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} P_n(\cos H) \right] \end{aligned}$$

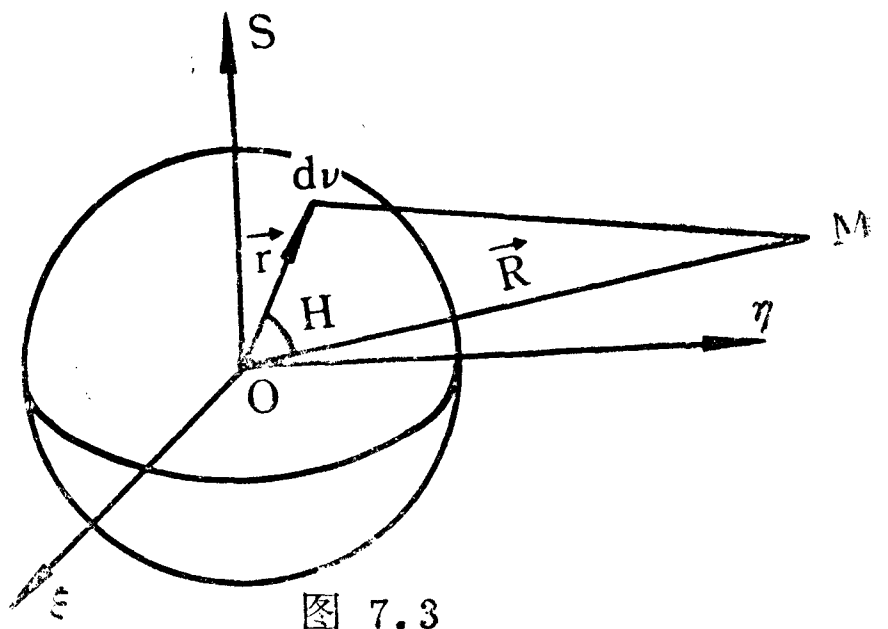


图 7.3

其中 $P_n(\cos H)$ 为 n 阶勒让德多项式。代入 U 中得

$$U = \frac{GMM'}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} GM' \iiint \frac{r^n \sigma}{R^{n+1}} P_n(\cos H) dv \quad (7.75)$$

设 M' 在同一坐标系 ($O\xi\eta\zeta$ 为地固坐标系) 中坐标为 (x, y, z) , 则

$$\cos H = \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{Rr}$$

再把 x, y, z 换为球坐标 (R, ϕ, φ) , ϕ 为经度, φ 为纬度, ($\xi\eta$ 面为形状赤道面), 即

$$x = R \cos \phi \cos \varphi, y = R \sin \phi \cos \varphi, z = R \sin \varphi$$

与上式一起代入(7.75)式, 先按 ϕ 的三角多项式整理, 与 φ 有关的都放在系数中。由于所有 ξ, η, ζ (包括 σ) 的函数都要在体积积分后消失, 故(7.75)式成为级数, 每一项呈下面形式:

$$\frac{1}{R^{n+1}} F_n^k(\varphi) (A_{nk} \cos k\phi + B_{nk} \sin k\phi) \quad (7.76)$$

这是三个变量分开的形式, 可用势函数满足的拉普拉斯方程来最后解出。以直角坐标表示的拉普拉斯方程为

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

化为球坐标后, 方程形式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \\ + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = 0 \end{aligned} \quad (7.77)$$

为符号简单起见, 用 $c = \sin \varphi$, 上式可化为

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial c} \left[(1 - c^2) \frac{\partial U}{\partial c} \right] + \frac{1}{1 - c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = 0 \quad (7.78)$$

以(7.77)式作为 U 的一般形式代入得

$$\begin{aligned} F_2 F_3 \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dF_1}{dR} \right) + F_1 F_3 \frac{d}{dc} \left[(1 - c^2) \frac{dF_2}{dc} \right] \\ + \frac{F_1 F_2}{1 - c^2} \frac{d^2 F_3}{d\phi^2} = 0 \end{aligned}$$

其中 $F_1 = F_1(R) = \frac{1}{R^{n+1}}$

$$F_2 = F_2(\varphi) = F_2(c)$$

$$F_3 = F_3(\phi) = A_{nk} \cos k\phi + B_{nk} \sin k\phi$$

以 F_1, F_3 代入, 只留下 F_2 的方程, 可化简为:

$$(1 - c^2) \frac{d^2 F_2}{dc^2} - 2c \frac{dF_2}{dc} + \left[n(n+1) - \frac{k^2}{1-c^2} \right] F_2 = 0 \quad (7.79)$$

这是一般的勒让德方程, 解为**缔合勒让德函数**:

$$F_2 = F_2(c) = (1 - c^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k}{dc^k} P_n(c) = P_n^k(c) \quad (7.80)$$

其中 $P_n(c)$ 即勒让德多项式, $k=0$ 时

$$P_0^n(c) = P_n(c)$$

按习惯取地球赤道半长径 a 为长度标准, U 的展开式最后取为:

$$U = GM' \left[\frac{M}{R} + M \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a^n}{R^{n+1}} P_n^k(c) (A_{nk} \cos k\phi + B_{nk} \sin k\phi) \right] \quad (7.81)$$

由于取地球质心为坐标原点, 容易从(7.75) 式中证明, $n=1$ 的项为 0。另外, 习惯上把 $k=0$ 的项单独列出(不含 ϕ), 最后写为

$$U = \frac{GMM'}{R} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{J_n a^n}{R^n} P_n(c) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{a^n}{R^n} P_n^k(c) (A_{nk} \cos k\phi + B_{nk} \sin k\phi) \right] \quad (7.82)$$

其中

$$J_n = -A_{n0}$$

不含 ϕ 的项与 M' 的经度无关, 称为**带谐项**, J_n 称为**带谐系数**; 含 ϕ 的项称**田谐项**, A_{nk}, B_{nk} 就称为**田谐系数**。

这是一般展开式, 有广泛应用, 在本章中只用到少数几项足够

了。讨论人造卫星运动时 R, ϕ, φ 为人造卫星球坐标，上式去掉 M' 的因子后就成为地球对人造卫星引力的位函数。

有了势函数 U ，地球自转运动方程的哈密顿函数 F (因 H 已用来作昂多瓦叶变量之一) 为：

$$F = T + E - U \quad (7.83)$$

这是对新昂多瓦叶变量而言。如对按固定历元黄道定义的变量，式中没有 E 项。

2. 主要项的量级估计。势函数中 $n=2$ 的项为本章中起主要作用的项，现单独讨论。先从(7.75)式中，把 $n=2$ 的项单独提出，记为 (万有引力常数记为 $\overline{G}$)。

$$U_1 = \frac{\overline{G}M'}{R^3} \iiint r^2 \sigma P_2(\cos H) dv$$

其中

$$\begin{aligned} P_2(\cos H) &= \frac{3}{2} \cos^2 H - \frac{1}{2} \\ &= 1 - \frac{3}{2} \sin^2 H \\ r^2 &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \end{aligned}$$

若取 ξ, η, ζ 三个坐标轴，就是地球的惯量主轴，则主惯量矩 A, B, C 应为

$$\begin{aligned} A &= \iiint (\eta^2 + \zeta^2) \sigma dv, \quad B = \iiint (\zeta^2 + \xi^2) \sigma dv, \\ C &= \iiint (\xi^2 + \eta^2) \sigma dv \end{aligned}$$

于是有
$$\iiint r^2 dv = \frac{1}{2} (A + B + C)$$

另外， $r \sin H$ 为 dv 到 $\overline{OM'}$ 的距离，记 I 为地球绕 $\overline{OM'}$ 轴的转动惯量，则有

$$I = \iiint r^2 \sin^2 H \sigma dv$$

利用这些关系,

$$U_1 = \frac{\overline{GM}'}{2R^3} (A + B + C - 3I) \quad (7.84)$$

再根据转动惯量的转轴定理, 设 l, m, n 为 $\overrightarrow{OM'}$ 在 $O\xi\eta\zeta$ 坐标系中的方向余弦, 这里应有

$$l = \frac{x}{R}, \quad m = \frac{y}{R}, \quad n = \frac{z}{R}$$

则有

$$I = Al^2 + Bm^2 + Cn^2 = \frac{Ax^2 + By^2 + Cz^2}{R^2}$$

代入(7.84)式为

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{\overline{GM}'}{R^3} \left[\frac{A+B-2C}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{z^2}{R^2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{B-A}{4} \left(\frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{R^2} \right) \right] \\ &= \frac{\overline{GM}'}{R^3} \left[\frac{A+B-2C}{2} P_2(\sin\varphi) + \frac{B-A}{4} P_2^2(\sin\varphi) \cos 2\phi \right] \end{aligned} \quad (7.85)$$

与(7.82)式中 $n=2$ 的项比较可得:

$$J_2 = \frac{2C - A - B}{2Ma^2}, \quad A_{22} = \frac{B - A}{4Ma^2}, \quad B_{22} = 0 \quad (7.86)$$

记为

$$U = U_1 + U_2 \quad (7.87)$$

U_2 表示 U 中除 U_1 外的所有项之和。

哈密顿函数记为:

$$F = T - U_1 + E - U_2 \quad (7.88)$$

现在粗略估计这些项的量级。

T 中可近似地取 $A = B = C$, 则得

$$T = \frac{1}{2} C \omega^2$$

ω 为地球自转角速度。

在 U_1 中, M' 为日, 月质量都与地球有公转关系, 设轨道为圆, n' 为平均角速度, 可从开普勒第三定律近似求出。

$$\frac{\overline{GM'}}{R^3} \simeq \frac{M'}{M' + M} n'^2$$

即

$$U_1 \simeq \frac{M' n'^2}{M' + M} \cdot \frac{2C - A - B}{2}$$

后面项更小, 暂略去, 则

$$\frac{U_1}{T} \simeq \frac{M'}{M' + M} \left(\frac{n'}{\omega} \right)^2 \frac{2C - A - B}{C} \quad (7.89)$$

其中 $(C - A)/C$, 或 $(C - B)/C$ 又称力学椭率, 由观测定出的值约 $1/300$, 因此对月球和太阳分别可得:

$$\frac{U_1}{T} \simeq 10^{-9} (\text{月}), 5 \times 10^{-8} (\text{太阳})$$

U_2 中 n 越大系数越小, 可只用含 J_3 项作 U_2 代表, 则

$$\frac{U_2}{U_1} \simeq \frac{J_3}{J_2} \frac{a}{R}$$

根据测定, $J_3/J_2 \simeq 2 \times 10^{-3}$, 因此可得:

$$\frac{U_2}{U_1} \simeq 4 \times 10^{-5} (\text{月}), 10^{-7} (\text{太阳})$$

从上面各项量级估计, T 看作零阶项(无摄动), U_1 作为一阶摄动项, U_2 作为二阶摄动项。 E 较难估计, 从(7.74)式(其中各量的“/”去掉), 根据 π_1 , Π_1 的数值, 肯定比一阶项更小, 木下宙视为二阶项。

于是地球自转运动方程列出为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{L} &= -\frac{\partial F}{\partial l}, & \dot{G} &= -\frac{\partial F}{\partial g}, & \dot{H} &= -\frac{\partial F}{\partial h} \\ \dot{l} &= +\frac{\partial F}{\partial L}, & \dot{g} &= +\frac{\partial F}{\partial G}, & \dot{h} &= +\frac{\partial F}{\partial H} \end{aligned} \right\} \quad (7.90)$$

第七节 自由刚体的运动

由上节知,哈密顿函数中 T 为主要项,最大摄动项只有 T 的 $10^{-8} - 10^{-9}$ 。在讨论初步地球自转运动时,可以不考虑外力及 E 项。这里主要讨论 $A = B$ 情况, $A \neq B$ 时只给出结果。

1. $A = B$ 情况, T 按(7.59)式:

$$T = \frac{1}{2} \frac{G^2 - L^2}{A} + \frac{L^2}{2C}$$

它就是哈密顿函数,不显含 l, g, h, H , 故昂多瓦叶变量 L, G, H, h 都是常数, l, g 为时间的线性函数。

$$\left. \begin{aligned} l &= l_0 + n_1 t, \quad g = g_0 + n_2 t \\ n_1 &= \dot{l} = \frac{\partial T}{\partial L} = -\frac{L}{A} \cdot \frac{C-A}{C} \\ n_2 &= \dot{g} = \frac{\partial T}{\partial G} = \frac{G}{A} \end{aligned} \right\} \quad (7.91)$$

如只准到 J 的一阶,则有

$$L = G \cos J \simeq G \simeq C \omega_z \quad (7.92)$$

以上是无外力情况且 $A = B$ 时。基本结果,可以说明下面结论:

① $G, h, H = G \cos J$ 是常数,表明动量矩 $\vec{G}$ 守恒,图 7.1 中大圆 PQ 不变。形状赤道与动量矩赤道交角 J 不变。

② 因 $g = g_0 + n_2 t, n_2 = G/A \sim \omega_z \sim \omega$, 周期为 1 恒星日,表明 xy 平面逆时针移动,保持 J 不变;也就是 z 轴逆时针绕 G 轴转动,周期为 1 恒星日,半径为 J 。

③ 因 $l = l_0 + n_1 t, n_1 \simeq -\omega(C-A)/C \simeq -\omega/300$, 表明 x 在顺时针转动,周期约 300 恒星日。

④ 可求出自转角速度 $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, 动量矩 $\vec{G} = (A\omega_x,$

$A\omega_y, C\omega_z$)以及形状轴 z 轴的 单 $\vec{i}_z = (0, 0, 1)$ 有: $(\vec{\omega} \times \vec{i}_z) \cdot \vec{G} = 0$, 表明此三向量共面。 $\vec{G}$ 同 z 交角为 J , $\vec{\omega}$ 同 z 交角为 $\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} / \omega$

但由(7.64)式知

$$\omega_x \simeq \frac{G}{A} J \sin l, \quad \omega_y \simeq \frac{G}{A} J \cos l, \quad \omega_z \simeq \omega \simeq \frac{G}{C} \quad (7.93)$$

代入上式可得

$$\frac{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}{\omega} \simeq \frac{C}{A} J > J$$

由此可得自转轴与动量矩轴间交角为

$$\frac{C}{A} J - J = \frac{C - A}{C} J \simeq \frac{1}{300} J$$

即三轴共面, $\vec{G}$ 在中间, 自转轴更靠近 $\vec{G}$ 。

⑤ (7.93)式也可用于描述自转轴 $\vec{\omega}$ 绕形状轴 $\vec{z}$ 的运动, 即 **极移**。在地面 z 端点(即形状极)处小块地区看作平面, 与赤道面平行, 取 x 轴仍与赤道上 x 轴平行, y 轴则取反方向(习惯取法); 自转极在此 (x, y) 平面的坐标 (x_p, y_p) 称为地极坐标。从(7.93)式可得:

$$\left. \begin{aligned} x_p &= \frac{\omega_x}{\omega} = \frac{C}{A} J \sin l, \\ y_p &= -\frac{\omega_y}{\omega} = -\frac{C}{A} J \cos l \end{aligned} \right\} \quad (7.94)$$

这表明自转极在绕形状极转动, 周期约 300 恒星日, 半径约为 J ($0''.3$)。这就是著名的欧拉周期(运动)。

另外, 虽然 I, J 为常数, 但图 7.1 知

$$\cos I_f = \cos I \cos J - \sin I \sin J \cos g \quad (7.95)$$

而 g 有线性变化。因此 I_f 在变, 而且不是时间 t 的线性函数。故用 I_f 作变量讨论不如用昂多瓦叶变量。

2. $A \neq B$ 情况。 T' 应采用(7.58)式:

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) (G^2 - L^2) + \frac{L^2}{C}$$

不显含 g, h, H 。故 G, H, h 仍为常数; 而 L 不再是常数 (相应 J 不是常数, 而 I 仍为常数)。木下宙引入三个参变量 $\bar{L}, \bar{l}, \bar{g}$, 为 L, l, g 的主要部份。其中 $\bar{L}$ 为常数, 而

$$\bar{l} = l_0 + n_1 t, \bar{g} = g_0 + n_2 t$$

$$n_1 = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{2A} - \frac{1}{2B} \right) \left[1 - \frac{e^2}{8} (3 + \sec^2 \bar{J}) \right] \bar{L}$$

$$n_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) G + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{2A} - \frac{1}{2B} \right) (1 + \sec^2 \bar{J}) e^2 G$$

(7.96)

e 即由(7.68)式所定义, 是小量。 $\bar{J}$ 也由 $\bar{L} = G \cos \bar{J}$ 定义。木下宙解出了准到 e^2 的结果:

$$\left. \begin{aligned} l &= \bar{l} - \frac{e}{4} (1 + \sec^2 \bar{J}) \sin 2\bar{l} + \frac{e^2}{64} (1 + 6\sec^2 \bar{J} \\ &\quad + \sec^4 \bar{J}) \sin 4\bar{l} \\ g &= \bar{g} + \frac{e}{2} \sec \bar{J} \sin 2\bar{l} - \frac{e^2}{16} \sec \bar{J} (1 + \sec^2 \bar{J}) \sin 4\bar{l} \\ L &= \bar{L} \left[1 - \frac{e}{2} \operatorname{tg}^2 \bar{J} \cos 2\bar{l} - \frac{e^2}{8} \operatorname{tg}^2 \bar{J} (1 + \sec^2 \bar{J}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^2}{16} \operatorname{tg}^4 \bar{J} \cos 4\bar{l} \right] \end{aligned} \right\}$$

(7.97)

这样, L, g, l 的变化很复杂, 但只在 $\bar{L}, \bar{l}, \bar{g}$ 的附近变化。其余三变量 G, H, h 仍为常数。相应地极移动公式成为

$$\left. \begin{aligned} x_p &= \frac{G}{A\omega} \sin J \sin l \\ y_p &= -\frac{G}{B\omega} \sin J \cos l \end{aligned} \right\} \quad (7.98)$$

详细推导可参看木下宙 1972 年文献。

第八节 岁差章动方程解法原理

在讨论岁差章动时,必须考虑日月引力,哈密顿函数

$$F = T + E - U_1 - U_2$$

运动方程按昂多瓦叶变量表示,即为(7.90)式。 F 中除昂多瓦叶变量 L, G, H, l, g, h 外,还有日月坐标,看作时间 t 的已知函数, U 也要展开成这些变量的函数,将在下节进行。

木下宙用掘源一郎的李氏变换方法,即第三章第十节介绍的用李氏级数定义的正则变换,解地球自转的正则方程组。由于哈密顿函数 F 显含 t ,要采用非保守系统的掘源一郎方法。

用生成函数 W 产生出非保守的李氏变换。旧变量 $p = (L, G, H), q = (l, g, h)$ 变换为

$$p^* = (L^*, G^*, H^*), q^* = (l^*, g^*, h^*)$$

哈密顿函数由 F 变为 F^* 。与 W 一起都表示为零阶项,一阶项,二阶项。

$$\left. \begin{aligned} F &= T - U_1 + E - U_2 \\ W &= W_1 + W_2 \\ F^* &= F_0^* + F_1^* + F_2^* \end{aligned} \right\} \quad (7.99)$$

按掘源一郎方法,首先引新入自变量 t^* ,解方程组:

$$\frac{dq^*}{dt^*} = \frac{\partial T}{\partial p^*}, \quad \frac{dp^*}{dt^*} = -\frac{\partial T}{\partial q^*} \quad (7.100)$$

其中 T 内的所有昂多瓦叶变量都要加上 * 号,这个方程组就是上节讨论的自由刚体运动方程,已求出积分。为简单起见,只讨论 $A = B$ 的情况,这时 G^*, H^*, L^*, h^* 是常数; l^*, g^* , 为 t^* 的线性函数,频率为 n_1, n_2 , 即(7.91)式, 只是所有变量加上 * 号(t 也是)。

U_1, U_2, E 中的各昂多瓦叶变量及 t 也加 * 号。 U 展开为角变量 l^*, g^*, h^* 及 t 的三角级数, 系数为 L^*, G^*, H^* 的函数(下节)。后面要把含 t^* 与不含 t^* 部份分开; 不含 t^* 的项即不含 l^*, g^* , 为长期部份, 含 t^* 的为周期部份。 U_1, U_2 中不含 t^* 的为 U_{1s} 和 U_{2s} , 含 t^* 的为 U_{1p} 和 U_{2p} 。于是可列出关系:

$$F_0^* = T(\text{其中量加 * 号}) \quad (7.101)$$

$$F_1^* = U_{1s} \quad (7.102)$$

$$W_1 = \int U_{1p} dt \quad (7.103)$$

$$F_2^* = U_{2s} + E + \frac{1}{2} \{U_1 + F_1^*; W_1\}_s \quad (7.104)$$

$$W_2 = \int U_{2p} dt + \frac{1}{2} \{U_1 + F_1^*; W_1\}_p \quad (7.105)$$

其中已用 t 代替 t^* , 其中要积分的(7.103), (7.105)式中, 昂多瓦叶变量要代入自由刚体的解。

在(7.104)式中, 已把 E 作为长期项处理, E 中有很长的周期项, 如 $\sin \pi_1, \sin \Pi_1$ 等。但都可以作为长期项处理。

从上面各式求出 $F^* = F_0^* + F_1^* + F_2^*, W_1, W_2$ 后, 再解方程组:

$$\frac{dq^*}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial p^*}, \quad \frac{dp^*}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial q^*}$$

由于 F^* 中不含 l, g , 故 L^*, G^* 为常数, 问题归结为解:

$$\frac{dh^*}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial H^*}, \quad \frac{dH^*}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial h^*} \quad (7.106)$$

这就是岁差方程。

从上式解出 h^*, H^* 为 t 的函数后, F^* 中所有的量都成为时间 t 的函数, 因而可以解:

$$\frac{dl^*}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial L^*}, \quad \frac{dg^*}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial G^*} \quad (7.107)$$

同 W_1, W_2 一起, 可得到最后的解:

$$\left. \begin{aligned} q &= q^* + \frac{\partial(W_1 + W_2)}{\partial p^*} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial p^*}; W_1 \right\} \\ p &= p^* - \frac{\partial(W_1 + W_2)}{\partial q^*} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial q^*}; W_1 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (7.108)$$

此式就是章动的结果; (7.106) 式的解是岁差结果, 将在后面分别讨论。

第九节 摄动函数的展开

要得到上节的岁差章动解, 首先要把 U 展开为昂多瓦叶变量和时间的显函数。展开方法不难, 但很繁, 本节只给出方法原理和结果。

1. 坐标系转换。在 U 的表达式(7.82), (7.85)式可看出, 月球和太阳的位置为以地球形状赤道面为基础的赤道球坐标 (R, ϕ, φ) , 经纬度 ϕ, φ 应为赤经, 赤纬, 常用 α (从 x 起算), δ 表示。要化为瞬时黄道坐标系中的黄道球坐标 (R, λ, β) , λ 即黄经, β 为黄纬。关系见图 7.4, 图中给出了历元黄道, 瞬时黄道, 形状赤

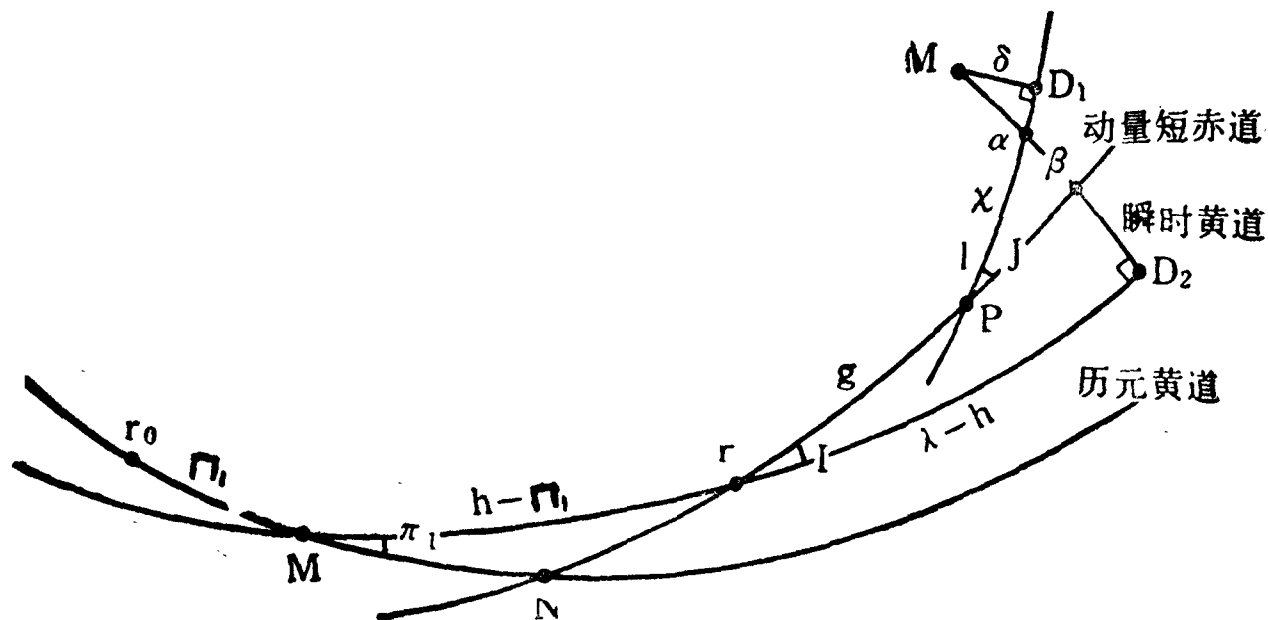


图 7.4 坐标系转换

道, 动量矩赤道以及天体(日, 月)坐标关系的天球图。天体 M' 原坐标为 α, δ , 经度起算点在 x 处; xy 平面为形状赤道上; 要逐步化到以瞬时黄道为基本大圆, 经度起算点在 r' (与动量矩赤道交点)。天体的黄经 λ 是从历元平春分点 γ_0 起算。由 M' 向形状赤道作垂直大圆相交于 D_1 , 则 $MD_1 = \delta$, $\widehat{x D_1} = \alpha$; M' 向瞬时黄道作垂直大圆相交于 D_2 , 则 $\widehat{M' D_2} = \beta$, $\gamma_0 M + MD_2 = \lambda$; 但 h (实为变换后的 h') 为 $\gamma_0 M + M\gamma$, 故 $\gamma D_2 = \lambda - h$ 。其他量也都标在图上。

现在作变换, 用旋转矩阵完成。原 M' 对形状赤道坐标系的方向余弦为 $(\cos \delta \cos \alpha, \cos \delta \sin \alpha, \sin \delta)$, 变换后对瞬时黄道坐标系的方向余弦, 经度起算点在 γ , 为 $[\cos(\lambda - h) \cos \beta, \sin(\lambda - h) \cos \beta, \sin \beta]$ 按顺序经四次旋转。①沿形状赤道把 x 转到 P , 此为旋转矩阵 $R_z(-l)$; ②绕 P 点转到动量矩赤道, 旋转矩阵为 $R_x(-J)$; ③沿动量矩赤道从 P 转到 γ , 矩阵为 $R_z(-g)$; ④绕 γ 转到瞬时黄道, 矩阵为 $R_x(-I)$ 。公式表示为

$$\begin{pmatrix} \cos(\lambda - h) \cos \beta \\ \sin(\lambda - h) \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} = R_x(-I) R_z(-g) R_x(-J) R_z(-l) \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad (7.109)$$

2. 展开过程, $\bar{U}$ 中 α, δ , 即(7.82), (7.85)式中的 ϕ, φ , 一般出现形式为

$$P_n^k(\sin \delta) \exp(\sqrt{-1} k \alpha)$$

木下宙给出了把这种 α, δ 球谐函数变换为 $\lambda - h, \beta$ 的完整方法, 其中引入了改进的雅可比多项式。这里不具体讲述, 可参看他在 1972 和 1974 年发表的文献。

第二步是把日, 月的黄道球坐标 $r, \lambda - h, \beta$ 表示为轨道根数和时间的函数; 要用纽康的太阳表和布朗的月球表。木下宙采用

了厄克尔特(W. J. Eckert)对布朗月球表的改进公式, 黄经多 20 项, 黄纬多 30 项, 视差多 110 项, 精度明显提高。他还用计算机实现下列各展开式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right) (1 - 3 \sin^2 \beta) &= \sum_m A_m^{(0)} \cos Q_m \\ \left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin \beta \cos \beta \sin(\lambda - h^*) &= \sum_m A_m^{(1)} \cos Q_m \\ \left(\frac{a}{r} \right)^3 \cos^2 \beta \cos 2(\lambda - h^*) &= \sum_m A_m^{(3)} \cos Q_m \end{aligned} \right\} \quad (7.110)$$

其中

$$Q_m = k_1 l_m + k_2 l_s + k_3 F + k_4 D + k_5 \Omega$$

$$m = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)$$

$$l_m = \text{月球平近点角}$$

$$l_s = \text{太阳平近点角}$$

$$L_m = \text{月球平黄经}$$

$$L_s = \text{太阳平黄经}$$

$$\Omega = \text{月球升交点平黄经}$$

$$F = L_m - \Omega, D = L_m - L_s, k_5 > 0$$

给出的 A_m 为具体数值。由行星摄动, 太阳偏心率有长期变化, 故 A_m 也略有变化, 取为

$$A_m^{(j)} = A_{m0}^{(j)} + A_{m1}^{(j)} t \quad (7.111)$$

t 为 1900 年起算的儒略世纪数。两组系数已列表(见木下宙 1977 年文献)。

Q_m 的各引数中只有 Ω 与经度起算点有关。故变量 h^* 以 $\Omega_0 - h^*$ 形式出现(代替 Ω), Ω_0 为从历元平春分点起算的升交点经度。

3. U_1 的展开结果。分为两项:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{r} \right)^3 P_2(\sin \delta) &= \frac{9}{2} \left(\cos^2 J - \frac{1}{3} \right) \sum_m B_m \cos Q_m \\ &\quad - \frac{3}{2} \sin 2J \sum_m \sum_{\varepsilon = \pm 1} C_m(\varepsilon) \cos(g - \varepsilon Q_m) \end{aligned}$$

$$+ \frac{3}{4} \sin^2 J \sum_m \sum_{\varepsilon=\pm 1} D_m(\varepsilon) \cos(2g - \varepsilon Q_m) \quad (7.112)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{r}\right)^3 P_2^2(\sin \delta) \cos 2\alpha = & -\frac{9}{2} \sin^2 J \sum_m \sum_{\varepsilon=\pm 1} B_m \cos(2l - \varepsilon Q_m) \\ & - 3 \sin J \sum_{\rho=\pm 1} (1 + \rho \cos J) \sum_m \sum_{\varepsilon=\pm 1} \\ & C_m(\varepsilon) \cos(g + 2\rho l - \varepsilon Q_m) \\ & - \frac{3}{4} \sum_{\rho, \varepsilon=\pm 1} (1 + \rho \cos J)^2 \sum_m \\ & D_m(\varepsilon) \cos(2g + 2\rho l - \varepsilon Q_m) \end{aligned} \quad (7.113)$$

其中 $B_m = -\frac{1}{6}(3\cos^2 J - 1)A_m^{(0)} - \frac{1}{2}\sin 2I A_m^{(1)} - \frac{1}{4}\sin^2 I A_m^{(2)}$

$$C_m(\varepsilon) = -\frac{1}{4}\sin 2I A_m^{(0)} + \frac{1}{2}(1 + \varepsilon \cos I)(-1 + 2\varepsilon \cos I)$$

$$A_m^{(1)} + \frac{1}{4}\varepsilon \sin I(1 + \varepsilon \cos I)A_m^{(2)}$$

$$D_m(\varepsilon) = -\frac{1}{2}\sin^2 I A_m^{(0)} + \varepsilon \sin I(1 + \varepsilon \cos I)A_m^{(1)}$$

$$- \frac{1}{4}(1 + \varepsilon \cos I)^2 A_m^{(2)}$$

最大摄动项为(7.112)式, 其中不显含 l , 即 $A=B$ 时, 有摄动的 L 也是常数。在这些系数中, 月球摄动的

$$A_{(0,0,0,0,0)}^{(0)}, \quad A_{(0,0,0,0,1)}^{(1)}$$

两个系数最重要; 第一个形成岁差重要项, 第二个形成章动主要项。

第十节 章 动

由生成函数 W 按(7.108)式给出的新旧变量的关系是章动, 引数是角变量 $l, g, l_m, l_s, F, D, \Omega$ 。主要章动项是 W_1 形成, 而且是 $A=B$ 情况。本节主要介绍这些结果。 $A \neq B$ 时, 以及 W_2 形成的章动项为次要项。

1. $A=B$ 时的生成函数 W_1 。按定义是 U_{1p} 的积分, U_{1p} 为 U_1 的周期部份, 即

$$W_1 = \frac{\overline{GM}'}{a^3} (C - A) \int_p \left[\left(\frac{a}{r} \right)^3 P_2(\sin \delta) \right] dt \quad (7.114)$$

周期部份即含角变量 $l, g, l_m, l_s, F, D, \Omega$ 的项它们是时间的线性函数出现在三角函数中。各量的频率为 $n_1, n_2, n_{1m}, n_{1s}, F_1, D_1, \Omega_1$ 。以(7.112)式代入上式即可积分得 W_1 , 因(7.112)式中除 $m = (0, 0, 0, 0)$ 时的 B_m 项外都是周期项。积分后可得:

$$W_1 = \frac{1}{2} (3 \cos^2 J - 1) W_1^{(0)} - \frac{1}{2} \sin 2J W_1^{(1)} + \frac{1}{4} \sin^2 J W_1^{(2)} \quad (7.115)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} W_1^{(0)} &= k' \sum_{m \neq 0} \frac{B_m}{N_m} \sin Q_m \\ W_1^{(1)} &= k' \sum_m \sum_{\varepsilon = \pm 1} \frac{C_m(\varepsilon)}{n_2 - \varepsilon N_m} \sin(g - \varepsilon Q_m) \\ W_1^{(2)} &= k' \sum_m \sum_{\varepsilon = \pm 1} \frac{D_m(\varepsilon)}{2n_2 - \varepsilon N_m} \sin(2g - \varepsilon Q_m) \\ k' &= \frac{2\overline{GM}'}{a^3} (C - A) \\ N_m &= k_1 n_{1m} + k_2 n_{1s} + k_3 F_1 + k_4 D_1 + k_5 \Omega_1 \end{aligned} \right\} \quad (7.116)$$

注意,式中各昂多瓦叶变量都有*号,现略去。

2. 章动主要项,在昂多瓦叶变量中,最主要的章动是 $\Delta h, \Delta I$; 按通常记号为 $\Delta\psi, \Delta\varepsilon$, 即黄经章动和交角章动。 h 是变量之一,可直接求; I 则为 $H = G \cos I$, 而且讨论受迫极移时要用到 J 的变化,要用 $L = G \cos J$ 来求。微商关系有:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial H} &= -\frac{1}{G \sin I}, & \frac{\partial I}{\partial G} &= \frac{1}{G} \cos I \\ \frac{\partial J}{\partial L} &= -\frac{1}{G \sin J}, & \frac{\partial J}{\partial G} &= \frac{1}{G} \cot J \end{aligned} \right\} \quad (7.117)$$

如用 Δh 表示 h 的改正项,即(7.108)式中一阶项。则因 W_1 中未直接写出 L, H, G , 只有 I, J , 有

$$\left. \begin{aligned} \Delta h &= -\frac{\partial W_1}{\partial H} = -\frac{1}{G \sin I} \frac{\partial W_1}{\partial I} \\ \Delta I &= \frac{\partial I}{\partial G} \Delta G + \frac{\partial I}{\partial H} \Delta H \\ &= \frac{1}{G} \left(-\frac{1}{\sin I} \Delta H + \cot I \Delta G \right) \\ &= \frac{1}{G} \left(-\frac{1}{\sin I} \frac{\partial W_1}{\partial h} - \cot I \frac{\partial W_1}{\partial g} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7.118)$$

以(7.115)式代入即得章动主要项。其他几个量的章动项也可相应求出,在求奥波彻项和受迫极移时要用到。

$$\left. \begin{aligned} \Delta l &= -\frac{1}{G \sin J} \frac{\partial W_1}{\partial J} \\ \Delta g &= \frac{1}{G} \left(\cot J \frac{\partial W_1}{\partial J} + \cot I \frac{\partial W_1}{\partial I} \right) \\ \Delta J &= \frac{1}{G} \left(\frac{1}{\sin I} \frac{\partial W_1}{\partial l} - \cot J \frac{\partial W_1}{\partial g} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7.119)$$

3. 形状轴和自转轴的章动主要项。根据(7.61)式,可求出形状轴章动主要项为

$$\left.
\begin{aligned}
\Delta h_f &= \Delta h + \Delta\left(\frac{J \sin g}{\sin I}\right) \\
&= \Delta h + \frac{1}{\sin I} (\sin g \Delta J + J \cos g \Delta g) - \frac{\cos I}{\sin^2 I} J \sin g \Delta I \\
\Delta I_f &= \Delta I + \Delta(J \cos g) \\
&= \Delta I + \cos g \Delta J - J \sin g \Delta J
\end{aligned}
\right\} \quad (7.120)$$

又根据(7.68)式可得自转轴的章动主要项为:

$$\left.
\begin{aligned}
\Delta h_r &= \Delta h + \left(1 - \frac{C}{A}\right) (\Delta h_f - \Delta h) \\
\Delta I_r &= \Delta I + \left(1 - \frac{C}{A}\right) (\Delta I_f - \Delta I)
\end{aligned}
\right\} \quad (7.121)$$

其中因 $A = B$, 略去含 e 项。

形状轴, 自转轴的章动项与动量矩轴章动项的差, 就称为奥波彻项, 即(7.120), (7.121)式中除第一项以外的各项。据木下宙的计算, 奥波彻项中最大项的引数为 $2F + 2\Omega$, 周期为 13.7 天, 黄经中的振幅为 $0''.01737$, 交角的为 $0''.00641$ 。

4. 受迫极移。由于章动使 J 和 l 有变化使极移有相应的改正, 称为受迫极移, 公式为

$$\left.
\begin{aligned}
\Delta x_p &= \frac{C}{A} \Delta(J \sin l) = \frac{C}{A} (\sin l \Delta J + J \cos l \Delta l) \\
\Delta y_p &= -\frac{C}{B} \Delta(J \cos l) = -\frac{C}{B} (\cos l \Delta J - J \sin l \Delta l)
\end{aligned}
\right\} \quad (7.122)$$

5. 章动次要项。木下宙在他的 1977 年文献中详细讨论了 $A \approx B$ 时所增加的项, 结果表明, 各项振幅都小于 $0''.5 \times 10^{-4}$, 对三个自转轴的章动均无影响。

W_2 产生的章动最大项是三阶球函数 ($n=3$) 造成, 其中黄经章动最大项为 $-6''.6 \times 10^{-5} \cos g_m$, g_m 为月球地点经度。其余的

项可以不予考虑。

第十一节 岁 差

岁差是昂多瓦叶变量的长期变化，即经过一次李氏变换后的新变量 $l^*, g^*, h^*, L^*, G^*, H^*$ 的变化。

1. 运动方程。新哈密顿函数 F^* 是原 F 中去掉周期项部分，即(7.102), (7.104)式：

$$F_1^* = U_{1s}, F_2^* = U_{2s} + E + \frac{1}{2} \{U_1 + F_1^*; W_1\}_s$$

U_{1s} 只有一项即(7.112)式中系数为 B_0 的项；木下宙详细研究了 U_{2s} 和 $\frac{1}{2} \{U_1 + F_1^*; W_1\}$ 的所有项，结果也只有一项大于岁差精度，即

$$\left(\frac{3}{2} \frac{\overline{G}M_1}{a_1^3} \cdot \frac{2C - A - B}{2} A_1 \right)^2 \frac{2}{G^* \Omega_1} \cos 2I^* \cos I^* \quad (7.123)$$

其中 M_1, a_1 为月球质量和轨道半长径

$$A_1 = A_{(0,0,0,0,0),0}^{(1)} \quad [\text{见}(7.111)\text{式}] \quad (7.124)$$

于是可得：

$$\begin{aligned} F_1^* + F_2^* = & k_1' \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 J^* \right) \left[-\frac{1}{2} M_0' (3 \cos^2 I^* - 1) \right. \\ & - \frac{3}{2} M_1' \sin 2I^* - \frac{3}{4} M_2' \sin^2 I^* \\ & + 3M_3' \frac{M_1}{M + M_1} \frac{n_{1m}^2}{\omega \Omega_1} \cdot \frac{2C - A - B}{2C} \\ & \left. \cos 2I^* \cos I^* \right] + k_2' \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 J^* \right) \end{aligned}$$

$$\left[-\frac{1}{2}(S_0 + \Delta S_0 t)(3\cos^2 I^* - 1) - \frac{3}{4}S_2 \sin^2 I^* \right] + E \quad (7.125)$$

$$E = G^* \sin I^* \left[-\sin(h^* - \Pi_1) \frac{d\pi_1}{dt} + \sin \pi_1 \cos(h^* - \Pi_1) \frac{d\Pi_1}{dt} \right] + H^*(1 - \cos \pi_1) \frac{d\Pi_1}{dt} \quad (7.126)$$

其中, M_0', M_1', M_2', M_3' 是对应月球摄动系数:

$$M_0' = A_{(0,0,0,0,0),0}^{(0)}$$

$$M_1' = A_{(0,0,0,0,0),0}^{(1)}$$

$$M_2' = A_{(0,0,0,0,0),0}^{(2)}$$

$$M_3' = \frac{3}{2} A_{(0,0,0,0,0),0}^{(1)}$$

S_0, S_2 与 M_0', M_2' 相同, 只是对应太阳摄动

$$\Delta S_0 = A_{(0,0,0,0,0),1}^{(0)}$$

k_1', k_2' 为(7.116)式中的 k' ; k_1' 对月球, k_2' 对太阳。

岁差方程即(7.106), (7.107)式。由于岁差要用 I^* , 不用 H^* , 用关系(7.117), 并取 $G^* = C\omega$, 则(7.106)式可化为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh^*}{dt} &= -\frac{1}{C\omega \sin I^*} \frac{\partial F^*}{\partial I^*} \\ \frac{dI^*}{dt} &= \frac{1}{C\omega \sin I^*} \frac{\partial F^*}{\partial h^*} \end{aligned} \right\} \quad (7.127)$$

这就是传统岁差章动理论中的柏松方程, 只是 F^* 中不含周期项。

由于方程中 $F^* = T + F_1^* + F_2^*$, 零阶项 T 中不含 h^* 和 I^* 故右端有一阶小因子。

根据图 7.3 可知, h^*, I^* 是在秋分点处计量(图中的 γ'), 不合传统习惯, 现改回春分点处。图 7.5 为各岁差量的定义。图中绘

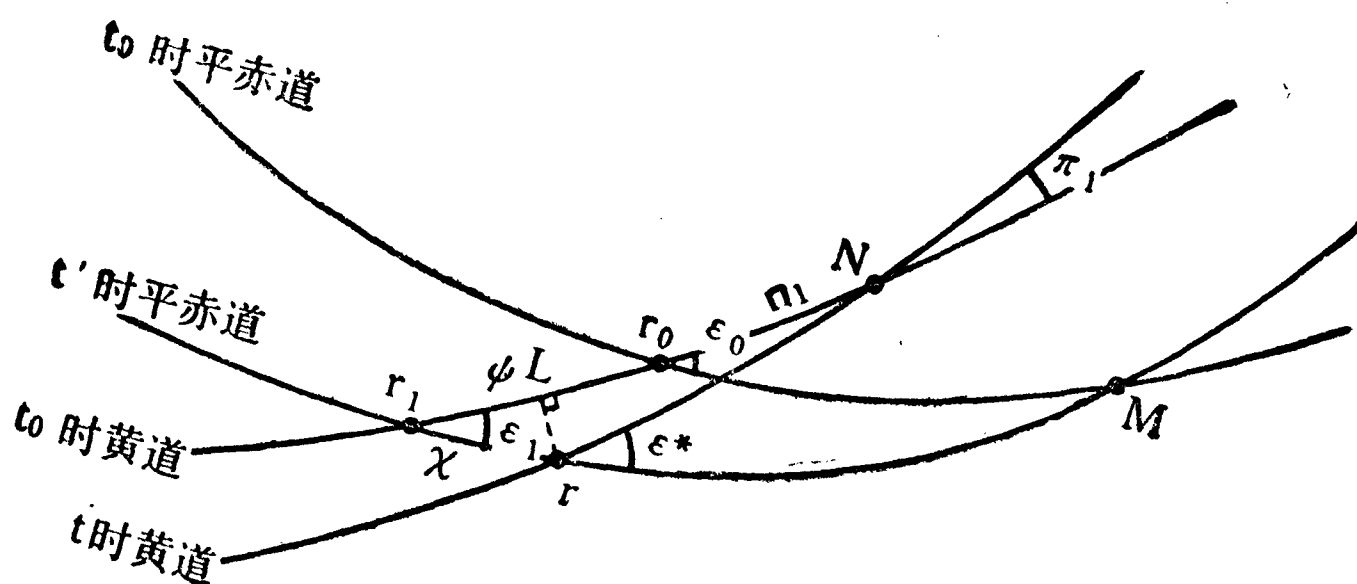


图 7.5

出天球上的 t_0 时和 t 时平赤道以及黄道, $\gamma, \gamma_0, \gamma_1$ 都是春分点, γ_0, γ 为 t_0 时和 t 时平春分点, γ_1 对应黄道不变化情况的 t 时平春分点。各种岁差定义如下: (昂多瓦叶定义)

黄经总岁差 $\phi = 180^\circ - h^*$ $\gamma N = \phi + \Pi_1$

黄赤交角 $\epsilon^* = -I^*$

另外原组康定义的总岁差为 $\phi_N = \gamma_0 L$, 相应日月岁差为 $\phi = \gamma_0 \gamma_1$; 行星岁差 $x = \gamma_1 \gamma$; 因此(7.125), (7.127)式可得 ϕ, ϵ 的方程为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{R(\epsilon)}{\sin \epsilon} - \cot \epsilon \left[\sin(\phi + \Pi_1) \frac{d\pi_1}{dt} \right. \\ &\quad \left. + \sin \pi_1 \cos(\phi + \Pi_1) \frac{d\Pi}{dt} - (1 - \cos \pi_1) \frac{d\Pi_1}{dt} \right] \\ \frac{d\epsilon}{dt} &= \cos(\phi + \Pi_1) \frac{d\pi_1}{dt} - \sin \pi_1 \sin(\phi + \Pi_1) \frac{d\Pi_1}{dt} \\ &= \cos \phi \frac{d}{dt} (\sin \pi_1 \cos \Pi_1) - \sin \phi \frac{d}{dt} (\sin \pi_1 \sin \Pi_1) \\ &\quad + 2 \sin^2 \frac{\pi_1}{2} \cos(\phi + \Pi_1) \frac{d\pi_1}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (7.128)$$

$$\left. \begin{aligned}
\text{其中 } R(\varepsilon) &= (P_0 + P_1 t) \sin \varepsilon \cos \varepsilon + Q_0 \cos 2\varepsilon \\
&\quad + V_0 (6 \cos^2 \varepsilon - 1) \sin \varepsilon \\
P_0 &= k_1' \left(M_0' - \frac{1}{2} M_2 \right) + k_2' \left(S_0 - \frac{1}{2} S_2 \right) \\
Q_0 &= k_1' M_1' \\
V_0 &= -k_1' M_3 \frac{M_1}{M + M_1} - \frac{n_{1m}^2}{\omega \Omega_1} \frac{2C - A - B}{2C} \\
P_1 &= k_2' \Delta S_0
\end{aligned} \right\} \quad (7.129)$$

除了求 ϕ, ε 外, 还要求出 $\varepsilon_1, \phi, \chi$ 。可从图 7.4 中球面三角关系推出:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{d\varepsilon_1}{dt} &= R(\varepsilon) \sin x, \\
\sin \varepsilon_1 \frac{d\phi}{dt} &= R(\varepsilon) \cos x, \\
\sin \varepsilon_1 \sin x &= \sin \pi_1 \sin(\phi + \Pi_1) \\
\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\phi - \chi) &= - \frac{\operatorname{tg} x \cos(\varepsilon + \varepsilon_1)/2}{\cos(\varepsilon - \varepsilon_1)/2}
\end{aligned} \right\} \quad (7.130)$$

2. 岁差公式。从方程(7.128)式求出严格分析解相当困难。由于 $\sin \pi_1 \cos \Pi_1, \sin \pi_1 \sin \Pi_1$ 已给出为 t 的多项式, 故在时间不太长时, 各种岁差都可以表示为 t (从 t_0 起量) 的多项式。先形式地记为:

$$\left. \begin{aligned}
\phi &= ht + h't^2 + h''t^3 \\
\varepsilon &= \varepsilon_0 + at + a't^2 + a''t^3 \\
\varepsilon_1 &= \varepsilon_0 + bt + b't^2 + b''t^3 \\
\phi &= ft + f't^2 + f''t^3 \\
\chi &= gt + g't^2 + g''t^3 \\
R(\varepsilon) &= R_0(\varepsilon) + R_1(\varepsilon)t + R_2(\varepsilon)t^2
\end{aligned} \right\} \quad (7.131)$$

代入 (7.128), (7.130) 式, 比较 t 的同次幂系数, 可全部求出 (7.131) 式中所有系数的表达式, 写出太繁而从略, 可参看木下宙

1975年文献。有关岁差常数在后面讨论。

第十二节 地球非刚性改正问题

以上理论是以地球为刚体的模型得到的，而地球实际上不是严格的刚体，表面有水层，固体部份有弹性。从海潮和固体潮的观测结果可以证实。而地球核心部份，有一定证据认为是流体。因此，地球非刚性改正问题，就是地球弹性改正和液核改正。从理论上来说，要先建立这方面的模型。

地球内部结构的非刚性模型研究，并用于岁差和章动，早在本世纪 50 年代就开始。最著名的是英国的捷弗里斯 (H. Jeffreys) 和南斯拉夫的莫洛金斯基 (S. M. Molodensky)，他们的工作分别发表在 MN. Vol. 117, P. 142 和 P. 162 (1957)。60 年代以来，利用地震学的观测资料，建立了很多地球非刚性模型，较著名的有十几种。不同模型是采用不同频率的地震波资料建立起来的。

周期在 5 秒以下的地震波称为体波 (其中纵波又称 P 波，横波又称 S 波)；周期在 5 秒到 1 千秒左右的振荡叫面波；周期更长的叫长周期振荡，其中周期小于 1 小时的又称为自由振荡。所建立的地球模型就是地震波资料的反演，现在已建立了全球性台站网。下面只简单介绍两种影响最大的地球模型。

一种是英国的吉伯特 (F. Gilbert) 和齐旺斯基 (A. M. Dziewonski) 根据两套全球地震记录，用数值分析成功地得到 1064 个自由振荡的频率；并以此为约束，得到两个不同的地球模型：代号为 1066A 和 1066B。其中在深度为 1000 公里以上的地幔结构有些差别，于 1975 年发表 (载 Phil. Trans. Roy. Soc. London. A278, P. 187) 另一种是齐旺斯基同其他人用上述 1064 个自由振荡结果与体波和面波资料一起，于 1975 年整理成三个模型，代号为

PEM-O、PEM-A、PEM-C(载 Phys. Earth Planet. Int. Vol. 12.P.12), 后来于 1981 年归纳整理为一个模型, 代号为 PREM (载同一刊物 Vol.25, p.297)。这两种模型至今仍有广泛应用。

以弹性和液核的地球模型为基础, 可求出相应的章动系数, 当前有两种具体处理办法。

1. 摄动法。以刚体地幔作为基础, 形变产生的椭率变化和自转运动变化作为摄动项, 用摄动法解出各相应章动项系数。这里以莫洛金斯基的方法作为例子, 他考虑一种简单的液核结构, 用他自己提出地球模型, 用摄动法解出频率为 n 的章动项系数 a 同刚体地球相应系数 a_0 的关系为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{a_0} &= 1 + 0.1124 \frac{n}{\Omega} (\beta - 4.1) \\ \beta &= 1.7 + \frac{41.15}{0.2159 + \frac{100n}{\Omega - n}} \end{aligned} \right\} \quad (7.132)$$

其中 Ω 为地球自转频率(角速度)。由此可求出弹性地球和液核在黄经章动 $\Delta\psi$ 和黄赤交角章动 $\Delta\varepsilon$ (即前面的 Δh 和 ΔI) 中的各项系数。这个结果曾得到公认, 在 1979 年召开的国际天文学联合会(IAU)第 17 届大会上, 通过的 1979 IAU 章动理论中, 刚体地球是木下宙的结果, 而非刚性地球为莫洛金斯基的结果。

2. 广义球函数展开法。由史密斯(M.L.Smith)和瓦尔(J.M.Wahr)等人提出。从地震波资料谱分析中, 周期在 70 秒到 1 小时范围内的振荡约有 2000 个, 以这些震波建立的地球模型称为简正模(Normal Mode)。他们选取旋转地球的参考系, 建立地球自转运动方程, 并引入柏松方程和弹性的虎克(Hooke)定律作为基础, 史密斯将上述方程线性化后用于研究简正模谱, 用广义球函数展开方法建立了微椭自转地球的简正模理论 (载 Geophys. J. RAS. Vol.37, P.491, 1974)。瓦尔则用史密斯的结果讨论日月引潮力作用下的章动理论。对任一频率为 ω 章动项, 刚体地球的

振幅为 a_0 , 非刚性模型的振幅为 a , 瓦尔推出下面公式

$$a = a_0 \left[1 + B_0 + (\omega - 0.927\Omega) \left(\frac{B_1}{\omega_1 - \omega} + \frac{B_2}{\omega_2 - \omega} + \frac{B_3}{\omega_3 - \omega} \right) \cdot \frac{\Omega - \omega}{\Omega} \cdot \frac{\Omega - \omega_3}{\Omega} \right] \quad (7.133)$$

其中 B_0, B_1, B_2 是与 ω 无关的常数, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 是三个标准频率。瓦尔用 1066A 模型定出 $B_0 = 0.416, B_1 = 0.810, B_2 = 0.665, B_3 = 1.06$; a_0 对应木下宙理论的振幅; $\omega_1 = 2.478 \times 10^{-3}\Omega, \omega_2 = -1.0021714\Omega, \omega_3 = -3.28 \times 10^{-3}\Omega$ 。用(7.133)式算出了地球形状轴的章动公式, 已被国际大地测量和地球物理联合会(IUGG)推荐, 被 IAU 接受而成为 IAU 1980 章动公式, 具体结果见后面附表二, 瓦尔的理论发表在 Geophys, J. RAS. Vol.64, P.705, 1981)。

这里附带谈一下地极的自由摆动周期。按第七章第七节的结果, 这个周期 T 对应的频率为 n_1 , 按(7.91)式有

$$T = \frac{2\pi}{n_1} = \frac{2\pi}{\Omega} \cdot \frac{A}{C-A} \approx 305 \text{ 恒星日}$$

即所谓欧拉周期。但观测定出的周期则为 427 恒星日, 称为张德勒摆动(Chandler's Wobble)。这个结果反映出地球不是刚体。在引入表示地球弹性的洛夫数 (Love number) k 后, 相应的周期 T_1 应为

$$T_1 = T / \left(1 - \frac{k}{k_0} \right) \text{ 恒星日} \\ = 445 \text{ 恒星日}$$

其中 k 由观测定出为 0.301, 而 k_0 为

$$k_0 = \frac{3G}{\Omega a^5} (C - A) = 0.942$$

这个周期接近于观测结果。

第十三节 数值表示和新进展

正式采用的岁差章动结果都是用数值表示的, 这里简单介绍最基本的常数确定情况。

岁差基本常数可从(7.128), (7.129)式求出, 就是在 $t = t_0$ (历元时刻), 黄经岁差中时间 t 的一次幂系数, 记为 $f(t_0)$, 即

$$f(t_0) = P_0 \cos \varepsilon_0 + Q_0 \frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0} - V_0 (6 \cos^2 \varepsilon_0 - 1) \quad (7.134)$$

章动基本常数是章动公式中最大项(引数为 Ω , 即月球轨道升交点黄经)的系数, 由(7.118)式及(7.115), (7.116)式可求出此项系数为

$$\left. \begin{aligned} N &= -\frac{k_1'}{\Omega_1} \left(N_1 \cos \varepsilon_0 - N_0 \frac{3 \cos^2 \varepsilon_0 - 1}{6 \sin \varepsilon_0} - \frac{N_2}{4} \sin \varepsilon_0 \right) \\ N_0 &= A_{(0)0,0,0,1}^{(0)} \\ N_1 &= A_{(0)0,0,0,1}^{(1)} \\ N_2 &= A_{(0)0,0,0,1}^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (7.135)$$

ε_0 为 t_0 时的 ε 值。

木下宙采用 1976 年的 IAU 天文常数系统所规定的常数值, 取 $t_0 = 2000.0$ (见附表一)。

$$f(2000) = 5038''.7784/JC$$

$$M_1/M = 0.01230002$$

$$M_s/(M + M_1) = 328900.5$$

$$\varepsilon_0 = 23^\circ 26' 21''.448$$

则算出 $N = 9''.2278$ 以及章动公式中全部各项系数, 以及五个引数的变率。

$$\dot{l}_m(2000) = 8328.691425 \text{ Rad}/JC,$$

$$\dot{l}_s(2000) = 628.301940 \text{ Rad}/JC$$

$$\dot{D}(2000) = 7771.377144 \text{ Rad}/JC$$

$$\dot{F}(2000) = 8433.466179 \text{ Rad}/JC$$

$$\dot{\Omega}(2000) = -33.757074 \text{ Rad}/JC$$

其中 JC 表示儒略世纪(36525 平太阳日), Rad 为弧度。

1980 年以后, 由于大量精确观测资料的积累, 特别是 $VLBI$ 观测结果, 明显发现现采用的章动公式有 $0''.001$ 量级的偏差。经分析有下面四种原因: ①以前定系数时所用观测资料不够准; ②刚体地球自转理论(指木下宙的)不完善; ③瓦尔的计算(非刚性改正)不够精确; ④可能有其他物理因素未考虑到。近年来主要从下面两种途径进行研究, 已有成效。

1. 改进刚体地球自转理论。研究者很多, 主要有: ①捷克冯德拉克(J. Vondrak)等增加摄动函数展开项数, 系数大于 $0''.000005$ 的项都计入(结果载 Bull. Astron. Inst. Czech. Vol. 34, P.184 和 P.311, 1983); ②朱圣源等(在英国)用更准的月亮历表 ELP 2000(法国 Chapront 等于 1983 年完成)及行星历表 VSOP 82(法国 Bretagnan 等 1982 年完成)作基础, 重新推导刚体地球自转理论, 系数准到 $0''.00001$, 使 $\Delta\psi$ 增加 156 项, $\Delta\epsilon$ 增加 76 项(结果载 A.J. Vol.98, P.1104.1989); ③木下宙等改进自己原来的工作, 也以历表 ELP2000, VSOP82 为基础, 重新推导, 系数准到 $0''.000005$, 比②要多十几项, 并考虑到某些二阶项(结果载 CM Vol.48, P.187, 1990); ④德国索菲耳(M. Soffel)等也用类似方法(结果载 CM. Vol.47. P.219. P.219.1990)给出结果; ⑤美国的沙士托克(J. Schastok)用数值方法给出章动系数, 上述结果尚未得到公认。

2. 用观测资料直接求出章动改正。1985 年以后, 出现两种直接用观测资料(主要是 $VLBI$ 资料和激光测月观测资料)求章动

改正的方法。一种是用观测资料求出每天的黄经章动 $\Delta\psi$ 的改正量 $\delta\Delta\psi$ 和黄赤交角章动 $\Delta\varepsilon$ 的改正量 $\delta\Delta\varepsilon$; 一种是直接求出章动公式中主要项系数的改正量。所谓改正, 都是以 IAU 1980 章动公式为基础。这方面的具体研究情况, 可参考 IAU 127th Colloquium, 1991。现在由 IERS (International Earth Rotation Service) 的公报 IERS Bulletin 公布每天的 $\delta\Delta\psi$ 和 $\delta\Delta\varepsilon$, 精度可达 $0''.0006$ 。

有关影响章动的其他物理因素: 岁差常数偏差, 海洋潮效应不准, 地球内部非刚性模型不准等, 正在继续研究中。

习 题

1. 设地球表面为旋转椭球面,是一个水准面。定义表面上任一点 P 的地理纬度 φ 为 P 点内法线与赤道面交角。试证在任一子午线上,赤道附近地理纬度相差一度的距离,比两极附近相差一度的距离要小。

2. 若流体自转速度在缓慢减小,试讨论 §7.1, §7.2 中的结论是否有变化。

3. 试利用(7.23), (7.24)式证明 $u \neq v$ 时,也不可能出现长椭球体($c > a, c > b$)成为平衡形状。

4. 若行星不是球状对称,而是有很小扁率的旋转椭球体;设密度仍为均匀,赤道面与卫星轨道面重合。试讨论相应的洛熙极限有什么变化?

5. 说明用昂多瓦叶变量能否确定地固坐标系 $Oxyz$ 同空间惯性坐标系之间的关系?(即确定刚体在惯性坐标系中的方位)。

6. 求昂多瓦叶变量的正则共轭广义动量的方法,能否推广到任意三个角变量情况?

7. 用球面三角关系推出(7.72)式。

8. 试求出不含 J (即只准到 J 的零阶)昂多瓦叶变量的章动项。

9. 说明行星岁差 χ 的产生原因。

附录一 IAU 1976天文常数系统

一、定义常数

高斯引力常数 $k = 0.01720209895$

二、基础常数

光速	$c = 299792458$ 米/秒
天文单位的光行时	$\tau_A = 499^s.004782$
地球赤道半径	$a_e = 6378140$ 米
地球力学形状因子	$J_2 = 108263 \times 10^{-8}$
地心引力常数	$GE = 3.986005 \times 10^{14}$ 米 ³ /秒 ²
引力常数	$G = 6.672 \times 10^{-14}$ 米 ³ /公斤·秒 ²
地月质量比	$\mu = 0.01230002(1/81.3007)$
黄经总岁差(2000)	$p = 5029''.0966/$ 回归世纪
黄赤交角(2000)	$\varepsilon = 23026'21''.448$
章动常数(2000)	$N = 9''.2109$

三、导出常数

天文单位	$A = c\tau_A = 149597870 \times 10^3$ 米
太阳视差	$\pi = \sin^{-1}(a_e/A) = 8''.794148$
光行差常数	$k = 20''.49552$

地球扁率	$1/f = 298.257$
日心引力常数	$GS = 132712348 \times 10^{12} \text{ 米}^3/\text{秒}^2$
日地质量比	$S/E = 332946.0$
日与地月系质量比	$S/(1 + \mu)E = 328900.5$
太阳质量	$S = 19891 \times 10^{26} \text{ 公斤}$

四、行星质量系统(太阳质量/行星质量)

水星	60236000	木星	1047.355
金星	408523.5	土星	3498.5
火星	3098710	天王星	22869
地月系	328900.5	海王星	19314
		冥王星	3600000

附表二 IAU1984 采用的瓦尔章动公式

引 数					周期	黄经章动		交角章动	
l	l'	F	D	Ω	(日)	(0''.0001)		(0''.0001)	
0	0	0	0	1	6798.4	-171996	-172.4T	82025	8.9T
0	0	0	0	2	3399.2	2062	0.2T	-895	0.5T
-2	0	2	0	1	1305.5	46		-24	
2	0	-2	0	0	1095.2	11			
-2	0	2	0	2	1615.7	-3		1	
1	-1	0	-1	0	3232.9	-3			
0	-2	2	-2	1	6786.3	2		1	
2	0	-2	0	1	943.2	1			
0	0	2	-2	2	182.6	-13187	-1.6T	5736	-3.1T
0	1	0	0	0	365.3	1426	-3.4T	54	-0.1T
0	1	2	-2	2	121.7	-517	1.2T	224	-0.6T
0	-1	2	-2	2	365.2	217	0.5T	-95	0.3T
0	0	2	-2	1	177.8	129	0.1T	-70	
2	0	0	-2	0	205.9	48		1	
0	0	2	-2	0	173.3	-22			
0	2	0	0	0	182.6	17	-0.1T		
0	1	0	0	1	386.0	-15		9	
0	2	2	-2	2	91.3	-16	0.1T	7	
0	-1	0	0	1	346.3	-12		6	
-2	0	0	2	1	192.8	-6		3	
0	-1	2	-2	1	346.6	-5		3	

(续)

引 数					周期	黄经章动		交角章动	
<i>l</i>	<i>l'</i>	<i>F</i>	<i>D</i>	Ω	(日)	(C".0001)		(D".0001)	
2	0	0	-2	1	212.3	4		-2	
0	1	2	-2	1	119.6	4		-2	
1	0	0	-1	0	411.8	-4			
2	1	0	-2	0	131.7	1			
0	0	-2	2	1	169.0	1			
0	1	-2	2	0	329.8	-1			
0	1	0	0	2	409.2	1			
-1	0	0	1	1	388.3	1			
0	1	2	-2	0	117.5	-1			
0	0	2	0	2	13.7	-2274	-0.2T	977	-0.5T
1	0	0	0	0	27.6	712	0.1T	-7	
0	0	2	0	1	13.6	-386	-0.4T	200	
1	0	2	0	2	9.1	-301		129	-0.1T
1	0	0	-2	0	31.8	-158		-1	
-1	0	2	0	2	27.1	123		-53	
0	0	0	2	0	14.8	63		-2	
1	0	0	0	1	27.7	-63	0.1T	-33	
-1	0	0	0	1	27.4	-58	-0.1T	32	
-1	0	2	2	2	9.6	-59		26	
1	0	2	0	1	9.1	-51		27	
0	0	2	2	2	7.1	-38		16	
2	0	0	0	0	13.8	29		-1	
1	0	2	-2	2	23.9	29		-12	
2	0	2	0	2	6.9	-31		13	
0	0	2	0	0	13.6	26		-1	
-1	0	2	0	1	27.0	21		-10	
-1	0	0	2	1	32.0	16		-8	

(续)

引 数					周期	黄经章动	交角章动
<i>l</i>	<i>l</i> "	<i>F</i>	<i>D</i>	Ω	(日)	(0".0001)	(0".0001)
1	0	0	-2	1	31.7	-13	7
-1	0	2	2	1	9.5	-10	5
1	1	0	-2	0	34.8	-7	
0	1	2	0	2	13.2	7	-3
0	-1	2	0	2	14.2	-7	3
1	0	2	2	2	5.6	-8	3
1	0	0	2	0	9.6	6	
2	0	2	-2	2	12.8	6	-3
0	0	0	2	1	14.8	-6	3
0	0	2	2	1	7.1	-7	3
1	0	2	-2	1	23.9	6	-3
0	0	0	-2	1	14.7	-5	3
1	-1	0	0	0	29.8	5	
2	0	2	0	1	6.9	-5	3
0	1	0	-2	1	15.4	-4	
1	0	-2	0	0	26.9	4	
0	0	0	1	0	29.5	-4	
1	1	0	0	0	25.6	-3	
1	0	2	0	0	9.1	3	
1	-1	2	0	2	9.4	-3	1
-1	-1	2	2	2	9.8	-3	1
-2	0	0	0	1	13.7	-2	1
3	0	2	0	2	5.5	-3	1
0	-1	2	2	2	7.2	-3	1
1	1	2	0	2	8.9	2	-1
-1	0	2	-2	1	32.6	-2	1
2	0	0	0	1	13.8	2	-1

(续)

引 数					周期	黄经章动	交角章动
l	l'	F	D	Ω	(日)	(0."0001)	(0."0001)
1	0	0	0	2	27.8	-2	1
3	0	0	0	0	9.2	2	
0	0	2	1	2	9.3	2	-1
-1	0	0	0	2	27.3	1	-1
1	0	0	-4	0	10.1	-1	0
-2	0	2	2	2	14.6	1	-1
-1	0	2	4	2	5.8	-2	1
2	0	0	-4	0	15.9	-1	
1	1	2	-2	2	22.5	1	-1
1	0	2	2	1	5.6	-1	1
-2	0	2	4	2	7.3	-1	1
-1	0	4	0	2	9.1	1	
1	-1	0	-2	0	29.3	1	
2	0	2	-2	1	12.8	1	-1
2	0	2	2	2	4.7	-1	
1	0	0	2	1	9.6	-1	
0	0	4	-2	2	12.7	1	
3	0	2	-2	2	8.7	1	
1	0	2	-2	0	23.8	-1	
0	1	2	0	1	13.1	1	
-1	-1	0	2	1	35.0	1	
0	0	-2	0	1	13.6	-1	
0	0	2	-1	2	25.4	-1	
0	1	0	2	0	14.2	-1	
1	0	-2	-2	0	9.5	-1	
0	-1	2	0	1	14.2	-1	
1	1	0	-2	1	34.7	-1	

(续)

引 数					周期	黄经章动	交角章动
l	l'	F	D	Ω	(日)	(0."0001)	(0."0001)
1	0	-2	2	0	32.8	-1	
2	0	0	2	0	7.1	1	
0	0	2	4	2	4.8	-1	
0	1	0	1	0	27.3	1	

表中 T 为 2000 年 1 月 1.5 日起算的儒略世纪数; 引数为 $l=l_m$, $l'=l_s$, 计算公式为:

$$l=134^{\circ}57'46''.733+(1325^r+198^{\circ}52'02''.633)T+31''.310T^2+0''.064T^3,$$

$$l'=357^{\circ}31'39''.804+(99^r+359^{\circ}03'01''.224)T-0''.577T^2-0''.012T^3,$$

$$F=93^{\circ}16'18''.877+(1342^r+82^{\circ}01'03''.137)T-13''.257T^2+0''.011T^3,$$

$$D=297^{\circ}51'01''.307+(1236^r+307^{\circ}06'41''.328)T-6''.891T^2-0''.019T^3$$

$$\Omega=125^{\circ}02'40''.280-(5^r+134^{\circ}08'10''.539)T+7.455T^2+0.008T^3$$

主要参考文献

1. 易照华编著:《天体力学引论》,科学出版社,1978。
2. 赵进义编著, 易照华修订:《天体力学》, 上海科技出版社, 1983。
3. 易照华、孙义燧编著:《摄动理论》,科学出版社,1981。
4. 布劳威尔、克莱门斯著;刘林、丁华译:《天体力学方法》, 科学出版社,1986。
5. Wintner A.:《The Analytical Foundations of Celestial Mechanics》,Princeton Univ.Press.1947.
6. Hori G.:Publ.Astron.Soc.Japan.18,p.287.1966.
7. Tisserand F.:《Traité de Mécanique Céleste》,Paris.1889.
8. Kinoshita H.:Celestial Mechanics,15,p.277,1977.
9. Kinoshita H.:Publ.Intern.Lat.Obs.Mizuzawa,12, p.71. 1979.
10. Wahr J.M.:Geophys.J.Roy.Astron.Soc.64 p.705,1981.

责任编辑 高锦明
封面设计 刘宗源

P13
H1



ISBN 7-305-02081-8

P·86 定价：8.50元